

A presente obra apresenta uma introdução ao estudo da Álgebra Linear, com a finalidade de atender aos alunos dos cursos da área de Ciências Exatas que contemplam essa disciplina. Utiliza-se uma linguagem simples e objetiva, porém precisa, com exemplos resolvidos, de forma a esclarecer a teoria exposta, ilustrando graficamente, quando possível, e com alguns comentários sobre erros frequentes. Além disso, propõem-se exercícios de fixação dos conceitos e resultados abordados ao final de cada capítulo, e exercícios gerais no final do livro. São abordados tão somente os tópicos que, usualmente, são ensinados nos cursos de graduação, além de um capítulo introdutório, com informações sobre formas de demonstração de teoremas, de forma que o estudante possa melhor compreender o texto que está estudando.

ELIETE MARIA GONÇALVES é licenciada em Matemática pela Fundação Educacional de Bauru – FEB (1977), mestre em Matemática (Fundamentos da Matemática) pela UNESP (1994) e doutora em Agronomia (Energia na Agricultura) pela UNESP (2000). Em 1978, ingressou no Departamento de Matemática da FEB, posteriormente incorporada à UNESP, onde desenvolve seu trabalho docente e direciona suas pesquisas para o Ensino de Matemática.

LUIZ FRANCISCO DA CRUZ é licenciado em Matemática pela Universidade Federal de São Carlos (1982), mestre em Fundamentos da Matemática pela UNESP/Rio Claro (1996) e doutor em Agronomia (Energia na Agricultura – Matemática Aplicada) pela UNESP/Botucatu (2001). Atualmente é professor assistente doutor do Departamento de Matemática, UNESP/Bauru. Tem experiência na área de Matemática, com ênfase nas disciplinas Geometria Analítica, Álgebra Linear e Cálculo I. Atua em pesquisa com Lógica Fuzzy, produção de material didático para graduação, ensino a distância e formação continuada de educadores.

VANILDA MIZIARA MELLO CHUEIRI é licenciada e bacharel em Matemática pela Fundação Educacional de Bauru – FEB (1976), mestre em Ciências (Equações Diferenciais) pelo Instituto de Matemática da UFRJ (1981) e doutora em Agronomia (Energia na Agricultura) pela UNESP (1994). Em 1977, ingressou no Departamento de Matemática da FEB, posteriormente incorporada à UNESP, onde desenvolve seu trabalho docente e direciona suas pesquisas para o Ensino de Matemática.



Eliete Maria Gonçalves
Luiz Francisco da Cruz
Vanilda Miziara Mello Chueiri



Eliete Maria Gonçalves
Luiz Francisco da Cruz
Vanilda Miziara Mello Chueiri

INTRODUÇÃO AO ESTUDO DA ÁLGEBRA LINEAR

Introdução ao Estudo da Álgebra Linear



CULTURA
ACADÊMICA
Editora





INTRODUÇÃO AO ESTUDO DA ÁLGEBRA LINEAR



<i>Vice-Reitor no exercício da Reitoria</i>	Julio Cezar Durigan
<i>Pró-Reitora de Graduação</i>	Sheila Zambello de Pinho
<i>Pró-Reitora de Pós-Graduação</i>	Marilza Vieira Cunha Rudge
<i>Pró-Reitora de Pesquisa</i>	Maria José Soares Mendes Giannini
<i>Pró-Reitora de Extensão Universitária</i>	Maria Amélia Máximo de Araújo
<i>Pró-Reitor de Administração</i>	Ricardo Samih Georges Abi Rached
<i>Secretária Geral</i>	Maria Dalva Silva Pagotto
<i>Chefe de Gabinete</i>	Carlos Antonio Gamero

Cultura
Acadêmica



Eliete Maria Gonçalves
Luiz Francisco da Cruz
Vanilda Miziara Mello Chueiri

INTRODUÇÃO AO ESTUDO DA ÁLGEBRA LINEAR

**CULTURA
ACADÊMICA**
Editora

unesp 

Pró-reitoria de Graduação / UNESP
prograd 

São Paulo
2012

Ficha catalográfica elaborada pela Coordenadoria Geral de Bibliotecas da Unesp

G635i

Gonçalves, Eliete Maria

Introdução ao estudo da álgebra linear / Eliete Maria Gonçalves, Luiz Francisco da Cruz [e] Vanilda Mizziara Mello Chueiri. – São Paulo : Cultura Acadêmica : Universidade Estadual Paulista, Pró-Reitoria de Graduação, 2012.

328 p.

ISBN 978-85-7983-378-6

1. Álgebra linear. I. Título. II. Cruz, Luiz Francisco da. III. Chueiri, Vanilda Mizziara Mello. IV. Universidade Estadual Paulista. Pró-Reitoria de Graduação.

CDD 512.5



Pró-reitora Sheila Zambello de Pinho

Secretária Joana Gabriela Vasconcelos Deconto
Sílvia Regina Carão

Assessoria José Brás Barreto de Oliveira
Laurence Duarte Colvara
Maria de Lourdes Spazziani

Técnica Bambina Maria Migliori
Camila Gomes da Silva
Cecília Specian
Eduardo Luis Campos Lima
Gisleide Alves Anhesim Portes
Ivonette de Mattos
Maria Emília Araújo Gonçalves
Maria Selma Souza Santos
Renata Sampaio Alves de Souza
Sergio Henrique Carregari

Projeto gráfico Andrea Yanaguita

Diagramação Estela Mletchol

PROGRAMA DE APOIO À PRODUÇÃO DE MATERIAL DIDÁTICO

Considerando a importância da produção de material didático-pedagógico dedicado ao ensino de graduação e de pós-graduação, a Reitoria da UNESP, por meio da Pró-Reitoria de Graduação (PROGRAD) e em parceria com a Fundação Editora UNESP (FEU), mantém o Programa de Apoio à Produção de Material Didático de Docentes da UNESP, que contempla textos de apoio às aulas, material audiovisual, *homepages*, *softwares*, material artístico e outras mídias, sob o selo CULTURA ACADÊMICA da Editora da UNESP, disponibilizando aos alunos material didático de qualidade com baixo custo e editado sob demanda.

Assim, é com satisfação que colocamos à disposição da comunidade acadêmica mais esta obra, “Introdução ao Estudo da Álgebra Linear”, de autoria da Profa. Dra. Eliete Maria Gonçalves, do Prof. Dr. Luiz Francisco da Cruz e da Profa. Dra. Vanilda Miziara Mello Chueiri, do Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências do Câmpus de Bauru, esperando que ela traga contribuição não apenas para estudantes da UNESP, mas para todos aqueles interessados no assunto abordado.

SUMÁRIO

Apresentação 9

INTRODUTÓRIO: NOÇÕES SOBRE DEMONSTRAÇÕES EM MATEMÁTICA 11

1. Introdução 11
2. Terminologia 11
3. Demonstração de Teoremas, Proposições, Lemas, Corolários 12

1. MATRIZES, DETERMINANTES E SISTEMAS LINEARES 19

- 1.1. Matrizes 19
- 1.2. Determinantes 48
- 1.3. Sistemas Lineares 63
- 1.4. Exercícios Propostos 90

2. ESPAÇOS VETORIAIS 93

- 2.1. Histórico 93
- 2.2. Corpo 93
- 2.3. Espaço Vetorial 98
- 2.4. Subespaço Vetorial 104
- 2.5. Exercícios Propostos 114

3. DEPENDÊNCIA LINEAR 115

- 3.1. Combinação Linear 115
- 3.2. Subespaço Gerado 118
- 3.3. Vetores Linearmente Dependentes e Linearmente Independentes 124
- 3.4. Exercícios Propostos 139

4. BASE E DIMENSÃO 141

- 4.1. Introdução 141
- 4.2. Base 141
- 4.3. Dimensão 149
- 4.4. Coordenadas de um Vetor 163
- 4.5. Exercícios Propostos 165

5.	MATRIZ DE MUDANÇA DE BASE	167
5.1.	Exercícios Propostos	183
6.	TRANSFORMAÇÃO LINEAR	185
6.1.	Introdução	185
6.2.	Transformação Linear	186
6.3.	Propriedades das Transformações Lineares	194
6.4.	Núcleo e Imagem	197
6.5.	Operações com Transformações Lineares	205
6.6.	Exercícios Propostos	210
7.	ISOMORFISMO	211
7.1.	Exercícios Propostos	230
8.	MATRIZ DE UMA TRANSFORMAÇÃO LINEAR	231
8.1.	Exercícios Propostos	248
9.	OPERADORES DIAGONALIZÁVEIS	251
9.1.	Autovalores e Autovetores	251
9.2.	Diagonalização de Operadores	268
9.3.	Relação entre Matriz Diagonalizável e Autovetores	277
9.4.	Exercícios Propostos	281
10.	ESPAÇOS COM PRODUTO INTERNO	285
10.1.	Produto Interno	285
10.2.	Norma, Métrica e Ângulo	287
10.3.	Ortogonalidade	297
10.4.	Exercícios Propostos	311
11.	EXERCÍCIOS GERAIS	313

Bibliografia	327
--------------	-----

APRESENTAÇÃO

A presente obra apresenta uma introdução ao estudo da Álgebra Linear. Como se sabe, atualmente, o ensino dessa importante parte da Matemática, caracterizada como disciplina, não se restringe às grades curriculares dos cursos de Licenciatura e Bacharelado em Matemática, mas integra os cursos de Engenharia, Física e Ciências da Computação, entre outros, nos quais as aplicações são muitas.

Ao longo dos últimos anos, vem-se constatando que muitos estudantes que ingressam nos cursos de graduação da área de Ciências Exatas apresentam falhas de formação matemática, tanto conceituais, quanto de raciocínio lógico; em especial, esses estudantes pouca ou nenhuma experiência tiveram com o raciocínio matemático abstrato, exigido em Álgebra Linear.

Diante desses fatos, desenvolveu-se esse texto, com a finalidade de atender os alunos dos cursos acima citados, utilizando uma linguagem simples e objetiva, porém precisa, com exemplos resolvidos, de forma a esclarecer a teoria exposta, ilustrando graficamente, quando possível, e com alguns comentários sobre erros frequentes. Além disso, propõem-se exercícios de fixação dos conceitos e resultados abordados ao final de cada capítulo, e exercícios gerais no final do livro.

Não há, aqui, a pretensão de se apresentar um texto completo sobre Álgebra Linear; abordam-se tão somente os tópicos que, usualmente, são ensinados nos cursos de graduação que contemplam essa disciplina.

Uma vez que, no desenvolvimento da teoria exposta, são frequentes os “teoremas”, as “proposições”, os “lemas” e os “corolários”, com suas respectivas demonstrações, incluiu-se um *Capítulo Introdutório*, com os significados desses termos e a descrição de algumas formas de demonstração, em linguagem simples, sem formalismos, de forma que o estudante possa melhor compreender o texto que está estudando.

INTRODUTÓRIO

NOÇÕES SOBRE DEMONSTRAÇÕES EM MATEMÁTICA

1. INTRODUÇÃO

Os antigos matemáticos gregos, a começar por Tales de Mileto (640 a.C. – 550 a. C.), geômetra e astrônomo, descobriram que fatos matemáticos inteiramente novos podiam ser extraídos de outros mais simples, através de demonstrações.

Para a exata compreensão do mecanismo e do alcance da demonstração, é necessário reconhecer exatamente a natureza das proposições encadeadas por ela. O emprego de demonstrações exige uma arrumação sistemática do conhecimento matemático.

As provas (processo de demonstrar que um fato é verdadeiro) empregam lógica, não deixando de incluir a linguagem usual. Na Lógica Matemática, o ramo que investiga as demonstrações é chamado Teoria da Prova.

2. TERMINOLOGIA

Conceito primitivo. É aquele que é aceito sem demonstração.

Exemplos:

- 1) Conjunto; elementos de um conjunto.
- 2) Para o estudo da Geometria Plana, consideram-se três conceitos primitivos: o ponto, a reta e o plano.

Axiomas ou postulados. A palavra axioma vem de uma palavra grega que significa “considerar válido”. Um axioma ou postulado é uma sentença (ou proposição) aceita sem demonstração, ou seja, diferentemente de teoremas, axiomas não podem ser derivados por princípios de dedução.

Exemplos:

- 1) A reta tem infinitos pontos.
- 2) Dois pontos distintos determinam uma única reta.

Teorema. Usualmente, em Matemática, deixa-se o termo “teorema” para uma afirmação “forte” e central na teoria, que pode ser demonstrada.

Exemplo: Teorema de Laplace. “O determinante de uma matriz quadrada de ordem n ($n \geq 2$) é igual à soma dos produtos dos elementos de uma linha ou coluna qualquer pelos respectivos cofatores.”

Proposição. É uma sentença não associada a algum outro teorema e considerada um resultado “mais fraco”, matematicamente, que pode ser demonstrada.

Em Lógica, o termo “proposição” tem a seguinte definição:

“Uma proposição ou sentença é qualquer oração declarativa (falada ou escrita) que pode ser classificada como verdadeira ou falsa, mas não ambas.”

Exemplo: “Roma é a capital da Itália”.

Lema. Os lemas, em geral, são proposições simples, de uso restrito na teoria; normalmente, servem de preparação para teoremas que seguem. Às vezes, o lema é autossuficiente e “forte” por si só.

Exemplo: Lema de Zorn. “Seja $(X, \leq)$ uma ordem parcial em que toda cadeia tem majorante. Então X tem elemento maximal.”

Corolário. É uma consequência direta de teoremas ou proposições anteriores.

Exemplo: Teorema Fundamental da Aritmética. “Dado um número inteiro $a > 1$, existem r números inteiros primos estritamente positivos $p_1, p_2, \dots, p_r$, de maneira que $a = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_r$ ($r \geq 1$). Além disso, se o número a também puder ser escrito na forma $a = q_1 \cdot q_2 \cdot \dots \cdot q_s$, sendo q_i primo estritamente positivo, para todo $1 \leq i \leq s$, então $r = s$ e cada p_i é igual a um q_i .”

Como consequência direta deste teorema, tem-se o seguinte corolário:

Corolário. “Seja a um número inteiro tal que $a \neq 0$, $a \neq -1$ e $a \neq 1$. Então, existem, e são únicos, os números primos estritamente positivos $p_1, p_2, \dots, p_r$ ($r \geq 1$), de maneira que $a = \pm p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_r$.”

3. DEMONSTRAÇÃO DE TEOREMAS, PROPOSIÇÕES, LEMAS, COROLÁRIOS

Os teoremas podem ser enunciados nas formas:

(i) Se P , então Q .

Na linguagem matemática, se escreve: $P \Rightarrow Q$.

(ii) P se, e somente se, Q .

Na linguagem matemática, se escreve: $P \Leftrightarrow Q$.

Quando se demonstra um teorema, há uma proposição ou um conjunto de proposições que se admitem verificadas ou tomadas como verdadeiras, que se chama hipótese. O que se pretende concluir como consequência da hipótese, é chamado tese.

Assim, em um teorema enunciado na forma $P \Rightarrow Q$, P é a hipótese e Q é a tese. Portanto, a demonstração de um teorema deste tipo consiste em concluir que Q é uma sentença verdadeira, supondo que P é uma afirmação verdadeira. Isto se faz através de uma sequência lógica dedutiva, onde se passa de uma sentença-verdade à sentença verdadeira até se obter o resultado que se quer demonstrar, ou seja, a tese. Esse processo é chamado demonstração do teorema e a sequência de sentenças verdadeiras que foi usada forma o argumento.

Se o enunciado do teorema for da forma $P \Leftrightarrow Q$, há duas demonstrações a se fazer:

- a) $P \Rightarrow Q$, chamada condição necessária, onde P é a hipótese e Q é a tese.
- b) $Q \Rightarrow P$, chamada condição suficiente, onde Q é a hipótese e P é a tese.

Esse tipo de teorema é chamado “teorema de condição necessária e suficiente”.

Exemplos:

- 1) Se r_1 e r_2 são duas retas distintas, então r_1 intercepta r_2 em, no máximo, um ponto.

Neste caso, tem-se um teorema do tipo $P \Rightarrow Q$, onde:

- P é a hipótese: r_1 e r_2 são duas retas distintas;
- Q é a tese: r_1 intercepta r_2 em, no máximo, um ponto.

- 2) Uma matriz quadrada A de ordem n ($n \geq 2$) é inversível se, e somente se, $\det(A) \neq 0$.

Neste caso, tem-se um teorema do tipo $P \Leftrightarrow Q$, ou seja, de condição necessária e suficiente. Logo, há duas demonstrações a serem feitas:

- a) Condição necessária: $P \Rightarrow Q$, onde:
- P é a hipótese: a matriz quadrada A de ordem n ($n \geq 2$) é inversível;
 - Q é a tese: $\det(A) \neq 0$.
- b) Condição suficiente: $Q \Rightarrow P$, onde:
- Q é a hipótese: a matriz quadrada A de ordem n ($n \geq 2$) é tal que $\det(A) \neq 0$;
 - P é a tese: A é inversível.

3.1. Algumas técnicas de demonstração

- a) **Demonstração direta.** A conclusão é estabelecida através da combinação lógica dos axiomas, definições e teoremas existentes. A implicação $P \Rightarrow Q$ pode ser demonstrada supondo-se que a sentença P é verdadeira e deduzindo-se que Q é verdadeira. Grande parte dos teoremas, proposições, lemas e corolários é demonstrada dessa forma.
- b) **Demonstração por contrarrecíproca.** A implicação $P \Rightarrow Q$ é logicamente equivalente à sua contrarrecíproca $\sim Q \Rightarrow \sim P$, onde $\sim Q$ é a negação da sentença Q e $\sim P$ é a negação de P . Dessa forma, quando se demonstra diretamente que $\sim Q \Rightarrow \sim P$, está-se demonstrando que $P \Rightarrow Q$, por contrarrecíproca.

Exemplo: Proposição. “Se $3n + 2$ é ímpar, então n é ímpar.”

Neste caso, tem-se:

- P (hipótese): $3n + 2$ é ímpar
- Q (tese): n é ímpar

Quer-se demonstrar, portanto, que $P \Rightarrow Q$. Para demonstrar essa implicação lógica, supõe-se que a tese da proposição é falsa, isto é, supõe-se que n não é ímpar, e demonstra-se que a hipótese é falsa, isto é, que $3n + 2$ não é ímpar. Ou seja, demonstra-se a implicação $\sim Q \Rightarrow \sim P$. Assim, tem-se:

- $\sim Q$ (hipótese): n não é ímpar
- $\sim P$ (tese): $3n + 2$ não é ímpar

De fato, se, por hipótese, n não é ímpar, isto é, n é par, então existe algum número inteiro k tal que $n = 2k$. Portanto, pode-se escrever:

$$3n + 2 = 3(2k) + 2 = 2(3k + 1).$$

Se $3n + 2$ se escreve como o número inteiro $3k + 1$ multiplicado por 2, conclui-se que $3n + 2$ é par, isto é, não é ímpar.

Uma vez que a negação da tese implicou na negação da hipótese, conclui-se que a implicação $P \Rightarrow Q$ é verdadeira.

- c) **Demonstração por contradição ou redução ao absurdo.** Essa forma de demonstração também é dita prova indireta. Nesse caso, para demonstrar que o teorema, proposição, lema ou corolário é verdadeiro, admite-se que a tese é falsa e, através de raciocínio lógico, chega-se a uma contradição com a hipótese. Conclui-se, assim, que a tese é verdadeira.

Exemplo: Proposição. “Se m é um número inteiro e m^2 é par, então m é par.”

Nesse caso, tem-se:

- P (hipótese): m é um número inteiro e m^2 é par
- Q (tese): m é par

Suponha-se, por absurdo, que a tese seja falsa; isso significa que existe um número inteiro m que satisfaz a hipótese, isto é, existe um número inteiro m tal que m^2 é par, mas não satisfaz a tese, isto é, m é ímpar.

Se m é ímpar, então existe um número inteiro k tal que $m = 2k + 1$.

Então:

$$m^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1,$$

de onde se conclui que m^2 é ímpar, contrariando a hipótese de que é par. Essa contradição adveio da premissa de que a tese é falsa e, portanto, conclui-se que ela é verdadeira.

- d) **Demonstração por indução matemática.** Nesse tipo de demonstração, um caso base é demonstrado e uma regra de indução é usada para demonstrar uma série de outros casos (normalmente infinita). Na demonstração por indução matemática de uma dada proposição $P(n)$, é preciso verificar as seguintes condições:

- (i) $P(1)$ é verdadeira;
- (ii) para todo inteiro positivo k , se $P(k)$ é verdadeira, então $P(k + 1)$ também é verdadeira.

Nestas condições, a proposição $P(n)$ é verdadeira, para todo número inteiro positivo n .

A verificação da condição (i) é geralmente simples, mas a verificação de (ii) implica em demonstrar o teorema auxiliar que tem as seguintes características:

- Hipótese: a proposição $P(k)$ é verdadeira ($k \in \mathbb{N}$);
(essa hipótese é denominada “hipótese de indução”)
- Tese: a proposição $P(k+1)$ é verdadeira.

Exemplo: demonstrar, usando indução matemática, que $2^n > n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Nesse caso, tem-se a proposição $P(n): 2^n > n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

- (i) $P(1)$ é verdadeira, uma vez que $2^1 > 1$.
- (ii) Supõe-se, agora, que a hipótese de indução $P(k)$, dada por $2^k > k$ ($k \in \mathbb{N}$), é verdadeira. Deve-se provar que $P(k+1)$ é verdadeira.

De fato, uma vez que $2^k > k$, tem-se:

$$2^k > k \Rightarrow 2 \cdot 2^k > 2k \Rightarrow 2^{k+1} > k + k \geq k + 1 \Rightarrow 2^{k+1} > k + 1,$$

de onde se conclui que $P(k+1)$ é verdadeira.

Logo, a proposição $P(n)$ é verdadeira, para todo número natural n .

Observação: há, ainda, outros métodos de demonstração, como por exaustão, no qual a conclusão é estabelecida dividindo-se o problema em um número finito de casos e demonstrando cada um separadamente, e por construção, que consiste em construir um exemplo concreto com determinada propriedade, para mostrar que existe algo com tal propriedade.

3.2. Técnicas de demonstração com quantificadores

Existem muitos teoremas, proposições, lemas ou corolários que são sentenças envolvendo quantificadores. Os métodos mais usados de demonstração nesses casos, são:

- a) **Demonstração existencial.** Faz-se quando o enunciado do teorema, proposição, lema ou corolário contém a afirmação de que existe um

elemento x , em um dado conjunto A , satisfazendo determinada propriedade $P(x)$. Em linguagem matemática, escreve-se:

$$\exists x \in A / P(x),$$

ou então,

$$\exists x, x \in A / P(x),$$

onde o símbolo $\exists$ é chamado de quantificador existencial (lê-se “existe”). Assim, a sentença matemática acima é lida na forma: “existe x pertencente ao conjunto A tal que $P(x)$ é verdadeira”.

Entre as várias formas para demonstrar um resultado dessa forma, tem-se a chamada “prova construtiva”, onde se exhibe um elemento $a \in A$ para o qual $P(a)$ é verdadeira.

- b) **Demonstração de unicidade.** Em alguns teoremas, proposições, lemas e corolários encontra-se a afirmação de que existe exatamente um elemento x de um conjunto A satisfazendo uma determinada propriedade. Em casos como este, é preciso demonstrar dois fatos:
- (i) **Existência:** demonstra-se, aqui, que existe um elemento x de A satisfazendo a propriedade.
 - (ii) **Unicidade:** demonstra-se que o elemento x satisfazendo a propriedade é único. Para demonstrar esse fato, podem-se usar dois caminhos: (1) se y é um elemento de A e $y \neq x$, então y não satisfaz a propriedade em questão; (2) se $y \in A$ é tal que $P(y)$ é verdadeira, então mostra-se que $y = x$.

1

MATRIZES, DETERMINANTES E SISTEMAS LINEARES

As matrizes e os sistemas lineares têm larga aplicação em problemas práticos, especialmente na área de Engenharia. Por exemplo, a obtenção da frequência natural do eixo traseiro de um automóvel, por envolver grande número de variáveis a serem testadas e analisadas, acarreta um alto custo financeiro; portanto, faz-se necessária a utilização de métodos numéricos simples e precisos, como, por exemplo, o Método das Matrizes de Transferência, no qual, como o próprio nome evidencia, utilizam-se matrizes. Por sua vez, o projeto de uma estrutura composta por vigas metálicas exige a resolução de um sistema de equações lineares, no qual o número de equações e variáveis cresce à medida que se torna mais complexa a estrutura. A forma matricial do sistema é, então, utilizada, analisando-se a singularidade da matriz dos coeficientes do sistema e a matriz coluna das forças externas, para se encontrar a matriz coluna das forças que atuam sobre as vigas. O Método dos Elementos Finitos, que tem grande aplicação em problemas de Engenharia, particularmente em problemas de Engenharia Civil e Mecânica, utiliza-se de sistemas lineares que envolvem grande número de variáveis, os quais são resolvidos computacionalmente, trabalhando-se com as matrizes dos sistemas. Também em outras áreas, como, por exemplo, na Pesquisa Operacional, a teoria das matrizes e os sistemas lineares são largamente utilizados.

1.1. MATRIZES

1.1.1. Histórico

Arthur Cayley (1821-1895) foi um dos pioneiros no estudo das matrizes e, por volta de 1850, divulgou esse nome e passou a demonstrar sua aplicação. As matrizes, inicialmente, eram aplicadas quase que exclusivamente na resolução de sistemas lineares e apenas há pouco mais de 150 anos tiveram sua importância detectada. No entanto, o primeiro uso implícito da noção de matriz se deve a Joseph Louis Lagrange (1736-1813), em 1790.

O primeiro a lhes dar um nome parece ter sido Augustin-Louis Cauchy (1789-1857), que as chamava de “tabelas”. O nome “matriz” só veio com James Joseph Sylvester (1814-1897), em 1850. Sylvester ainda via as matrizes como mero ingrediente dos determinantes. Somente com Cayley elas passaram a ter vida própria e, gradativamente, começaram a suplantiar os determinantes em importância.

Definição: Dá-se o nome de matriz a uma tabela organizada em linhas e colunas, denotada por $A = (a_{ij})_{m \times n}$, onde o par de índices ij representa a posição de cada elemento a_{ij} dentro da matriz, sendo que o índice i indica a linha e j , a coluna. O par de índices $m \times n$ é chamado dimensão da matriz e representa o seu tamanho: o índice m indica o número de linhas da matriz e n , o número de colunas.

Toda matriz pode ser representada, genericamente, por:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ ou } A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

De forma abreviada, a matriz A acima pode ser representada na forma:

$$A = (a_{ij}); i \in \{1, 2, 3, \dots, m\}; j \in \{1, 2, 3, \dots, n\},$$

$$\text{ou, mais simplesmente, na forma: } A = (a_{ij})_{m \times n}.$$

Observação: nesse texto, utilizar-se-á o termo “ordem da matriz” apenas quando o número de linhas for igual ao número de colunas; em caso contrário, dir-se-á “dimensão da matriz”.

Indicar-se-á por $A_{m \times n}(\mathbb{R})$ o conjunto de todas as matrizes de dimensão $m \times n$ e com elementos reais.

- Se $m = n = 1$, tem-se uma matriz com um único elemento e, portanto, a matriz representa um número real; ou seja, $A_{1 \times 1} = (a_{11}) = a_{11}$.
- Se $m \neq n$, a matriz é chamada de matriz retangular de dimensão $m \times n$ e representada por $A_{m \times n}(\mathbb{R})$ ou, simplesmente, $A_{m \times n}$.
- Se $m = n$, a matriz é chamada de matriz quadrada de ordem n (ou m) e representada por $A_n(\mathbb{R})$ ou, simplesmente, A_n . Neste caso, definem-se:

- **diagonal principal** da matriz: é constituída pelos elementos que têm os dois índices iguais, isto é:

$$\{a_{ij} / i = j\} = \{a_{11}, a_{22}, a_{33}, \dots, a_{nn}\}.$$

Na matriz seguinte, mostram-se, de forma destacada, os elementos da diagonal principal:

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{a_{11}} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \mathbf{a_{22}} & a_{23} & a_{24} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \mathbf{a_{33}} & a_{34} & \cdots & a_{3n} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & \mathbf{a_{44}} & \cdots & a_{4n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & a_{n4} & \cdots & \mathbf{a_{nn}} \end{pmatrix};$$

- **diagonal secundária** da matriz: é constituída pelos elementos que têm a soma dos índices iguais a $n + 1$, isto é:

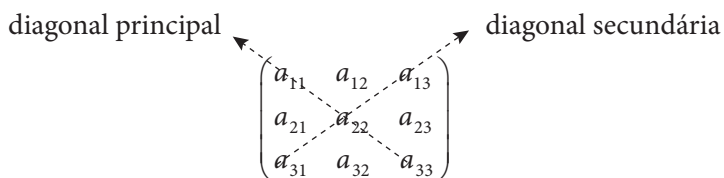
$$\{a_{ij} / i + j = n + 1\} = \{a_{1n}, a_{2,n-1}, a_{3,n-2}, \dots, a_{n1}\}.$$

Na matriz que se segue, são mostrados os elementos da diagonal secundária de forma destacada:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1,n-1} & \mathbf{a_{1n}} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & \mathbf{a_{2,n-1}} & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3,n-1} & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & \mathbf{a_{n-1,2}} & a_{n-1,3} & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ \mathbf{a_{n1}} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Por exemplo, considerando-se uma matriz quadrada de ordem 3, tem-se a representação da Figura 1.1.

Figura 1.1



Exemplo: Escrever a matriz $A = (a_{ij})_{2 \times 3}$ tal que $a_{ij} = \begin{cases} i + 2j, & \text{se } i > j \\ i^j, & \text{se } i = j \\ 2i - j, & \text{se } i < j \end{cases}$.

A matriz $A = (a_{ij})_{2 \times 3}$, em sua forma expandida, é escrita na forma:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}.$$

Então:

- $a_{11} = 1^1 = 1$; $a_{22} = 2^2 = 4$, pois, nesses casos, tem-se $i = j$.
- $a_{12} = 2 \cdot 1 - 2 = 0$; $a_{13} = 2 \cdot 1 - 3 = -1$; $a_{23} = 2 \cdot 2 - 3 = 1$, pois, para esses elementos, tem-se $i < j$.
- $a_{21} = 2 + 2 \cdot 1 = 4$, uma vez que $i > j$.

Portanto, a matriz procurada é $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 4 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

1.1.2. Matrizes Especiais

Considere-se uma matriz $A_{m \times n}$.

- 1) Se $m = 1$, a matriz tem dimensão $1 \times n$ e é chamada matriz-linha, como segue:

$$A = (a_{11} \quad a_{12} \quad a_{13} \quad \cdots \quad a_{1n}).$$

- 2) Se $n = 1$, a matriz tem dimensão $m \times 1$ e é chamada matriz-coluna, como segue:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}.$$

- 3) Se todos os seus elementos são iguais a zero, a matriz é chamada matriz nula.

Exemplo: $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ é uma matriz nula de dimensão 4×3 . Neste caso,

é usual a notação $\mathbf{0}_{4 \times 3}$.

- 4) Se a matriz é quadrada e todos os seus elementos não pertencentes à diagonal principal são iguais a zero, isto é, tem-se $a_{ij} = 0$, se $i \neq j$, ela é dita matriz diagonal.

Exemplos:

$$1) A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$2) A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$3) A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- 5) A matriz diagonal de ordem n cujos elementos da diagonal principal são iguais a 1 é chamada matriz identidade de ordem n . Indica-se por I_n . Assim, tem-se:

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}_{n \times n}.$$

1.1.3. Operações com Matrizes

- 1) **Igualdade de matrizes:** duas matrizes de mesma dimensão $A = (a_{ij})_{m \times n}$ e $B = (b_{ij})_{m \times n}$ são iguais se $a_{ij} = b_{ij}$, para todo $1 \leq i \leq m$ e todo $1 \leq j \leq n$.

2) **Adição de matrizes:** dadas duas matrizes de mesma dimensão

$A = (a_{ij})_{m \times n}$ e $B = (b_{ij})_{m \times n}$, chama-se soma de A com B a matriz de dimensão $m \times n$ cujos elementos são obtidos somando-se os elementos correspondentes de A e B .

Notação: $A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{m \times n}$.

Exemplo: Dadas as matrizes

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 10 & 8 \\ \sqrt{2} & 0 & -3 & \frac{3}{2} \\ 0 & 5 & -8 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 & 7 \\ 3 & -4 & 9 & 2 \\ 21 & 0 & -1 & 12 \end{pmatrix}, \text{ tem-se:}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 8 & 15 \\ \sqrt{2} + 3 & -4 & 6 & \frac{7}{2} \\ 21 & 5 & -9 & 13 \end{pmatrix}.$$

Observação: esta operação generaliza-se a um número finito de matrizes de mesma dimensão.

Propriedades: dadas as matrizes $A = (a_{ij})_{m \times n}$, $B = (b_{ij})_{m \times n}$ e $C = (c_{ij})_{m \times n}$, a adição de matrizes satisfaz as propriedades:

a) Comutativa: $A + B = B + A$

b) Associativa: $A + (B + C) = (A + B) + C$

c) Elemento Neutro: é a matriz nula $\mathbf{0}_{m \times n}$, satisfazendo:
 $A + \mathbf{0} = \mathbf{0} + A = A$.

d) Elemento Oposto: considerada a matriz $A = (a_{ij})_{m \times n}$, o elemento oposto da adição de matrizes é a matriz oposta de A , denotada por $-A$, isto é, $-A = (-a_{ij})_{m \times n}$, que satisfaz:

$A + (-A) = (-A) + A = \mathbf{0}$ (observe que $\mathbf{0}$ indica a matriz nula de mesma dimensão de A).

- 3) **Subtração de matrizes:** a subtração das matrizes A e B é obtida fazendo-se:

$$A - B = A + (-B),$$

ou seja, a subtração de A e B é a adição de A com a matriz oposta de B .

$$\text{Assim: } A - B = (a_{ij} - b_{ij})_{m \times n}.$$

É claro que esta operação satisfaz as mesmas propriedades da adição de matrizes.

- 4) **Multiplicação de uma matriz por um número real:** dada uma matriz

$A = (a_{ij})_{m \times n}$ e um número real α , chama-se produto do número α por A a matriz cujos elementos são obtidos multiplicando-se cada elemento de A por α .

$$\text{Notação: } \alpha \cdot A = (\alpha \cdot a_{ij})_{m \times n}.$$

Observação: uma vez que cada elemento da matriz é um número real, quando se faz a multiplicação da matriz A pelo número real α está se fazendo multiplicação entre números reais (elementos da matriz e α); entretanto, o resultado dessa multiplicação é uma matriz. Por simplicidade de notação, omite-se o sinal de multiplicação “ $\cdot$ ”, sempre que não houver possibilidade de confusão.

Exemplo:

Dados o número real $\alpha = \frac{2}{3}$ e a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 5 & 1 & \frac{7}{5} \end{bmatrix}, \text{ tem-se:}$$

$$\alpha A = \frac{2}{3} A = \begin{bmatrix} \frac{4}{3} & -2 & 0 \\ \frac{10}{3} & \frac{2}{3} & \frac{14}{15} \end{bmatrix}.$$

Propriedades: considerem-se as matrizes $A = (a_{ij})_{m \times n}$ e $B = (b_{ij})_{m \times n}$ e dois números reais α e β . Tem-se:

a) $\beta(\alpha A) = \alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$

Observação: embora essas igualdades possam parecer naturais (e, portanto, triviais), devem ser observadas as diferenças entre cada membro. Por exemplo, no membro $\beta(\alpha A)$, multiplica-se, primeiramente, a matriz A pelo número real α , obtendo-se a matriz αA ; depois, multiplica-se essa matriz pelo número real β . Já no termo $(\alpha\beta)A$, efetua-se, primeiramente, a multiplicação entre os números reais α e β , que resulta em um novo número real, o qual multiplica a matriz A .

b) $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$

Observação: nessa propriedade, o primeiro membro da igualdade mostra que, primeiramente, faz-se a adição da matriz A com a matriz B , para depois multiplicar a matriz resultante pelo número real α . O segundo membro da igualdade mostra que é válida a propriedade de distribuição: pode-se, primeiramente, multiplicar tanto a matriz A , quanto a matriz B pelo número real α , para depois somar as matrizes resultantes αA e αB .

c) $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$

Observação: nessa propriedade, o primeiro membro da igualdade mostra que, primeiramente, faz-se a adição dos números reais α e β , obtendo-se um novo número real $\alpha + \beta$, e multiplicando, depois, a matriz A por este novo número. O segundo membro da igualdade, a exemplo da propriedade anterior, também mostra uma propriedade de distribuição: multiplica-se a matriz A pelo número real α , obtendo-se a matriz αA ; depois, multiplica-se a matriz A pelo número real β , obtendo-se a matriz βA ; em seguida, somam-se essas duas matrizes, ou seja, faz-se $\alpha A + \beta A$.

d) $1 \cdot A = A$

Observação: essa propriedade mostra que a multiplicação de qualquer matriz A pelo número real 1 resultará na mesma matriz A . Isso

parece (e é!) natural, porque cada elemento da matriz é multiplicado pelo número 1, que é o elemento neutro da multiplicação de números reais.

5) **Multiplicação de matrizes:** dadas duas matrizes $A = (a_{ij})_{m \times n}$ e $B = (b_{jk})_{n \times p}$, chama-se produto de A com B a matriz $A \cdot B = C = (c_{ik})_{m \times p}$, onde:

$$c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + a_{i3}b_{3k} + \cdots + a_{in}b_{nk},$$

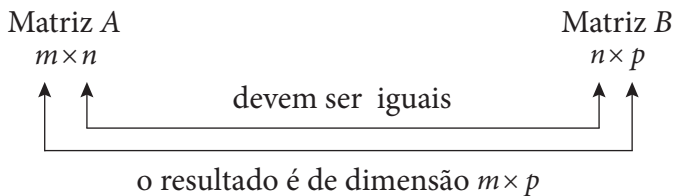
para todo $1 \leq i \leq m$ e todo $1 \leq k \leq p$.

De modo equivalente, pode-se escrever:

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot b_{jk}, \forall 1 \leq i \leq m, \forall 1 \leq k \leq p.$$

De acordo com essa definição, cada elemento c_{ik} da matriz $A \cdot B$ é calculado multiplicando-se ordenadamente os elementos da linha i da matriz A pelos elementos da coluna k da matriz B e somando os produtos obtidos. Observe que, para que seja possível multiplicar a matriz A pela matriz B , o número de colunas de A deve ser igual ao número de linhas de B . A matriz C resultante da multiplicação de A por B tem dimensão $m \times p$, onde m é o número de linhas de A e p é o número de colunas de B (Figura 1.2).

Figura 1.2



Propriedades: sejam A , B e C , matrizes tais que os produtos indicados a seguir sejam possíveis. São verdadeiras as propriedades:

a) Associativa: $A(BC) = (AB)C$

b) Distributiva:

– à esquerda: $A(B + C) = AB + AC$

– à direita: $(A + B)C = AC + BC$

- c) Elemento Neutro: considerada a matriz $A = (a_{ij})_{m \times n}$, o elemento neutro é a matriz identidade de ordem m (Id_m), ou ordem n (Id_n), pois: $AId_n = A$ e $Id_m A = A$.

Observações:

- 1) A operação de multiplicação de matrizes não é comutativa, isto é, mesmo que sejam possíveis ambos os produtos AB e BA , tem-se, em geral, que $AB \neq BA$, como se exemplificará adiante.
- 2) Na propriedade c) acima, vê-se que, dependendo de se multiplicar a matriz A pela matriz identidade Id à esquerda ou à direita, tem-se a matriz Id com ordem n ou m , já que, para que a multiplicação seja possível, deve-se ter o número de colunas da matriz que é o primeiro fator do produto igual ao número de linhas da matriz que é o segundo fator do produto.

Exemplos:

- 1) Dadas as matrizes:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}_{2 \times 3} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix}_{3 \times 2},$$

é possível efetuar a multiplicação de A por B , já que A tem três colunas, que é o mesmo número de linhas de B . De acordo com a definição, obter-se-á uma matriz C de dimensão 2×2 , isto é:

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}.$$

Para se verificar rapidamente se o produto é possível e qual é a dimensão da matriz resultante, pode-se considerar apenas o “produto” das dimensões das matrizes: $(2 \times 3) \cdot (3 \times 2) = (2 \times 2)$. Os elementos da matriz C são calculados da seguinte maneira:

- elemento c_{11} : multiplica-se cada elemento da linha 1 de A pelo correspondente elemento da coluna 1 de B e somam-se os produtos obtidos:

$$c_{11} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31};$$

- elemento c_{12} : multiplica-se cada elemento da linha 1 de A pelo correspondente elemento da coluna 2 de B e somam-se os produtos obtidos:

$$c_{12} = a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32};$$

- elemento c_{21} : multiplica-se cada elemento da linha 2 de A pelo correspondente elemento da coluna 1 de B e somam-se os produtos obtidos:

$$c_{21} = a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31};$$

- elemento c_{22} : multiplica-se cada elemento da linha 2 de A pelo correspondente elemento da coluna 2 de B e somam-se os produtos obtidos:

$$c_{22} = a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32}.$$

Assim, vem:

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} = C.$$

Nesta representação, estão destacados os elementos da linha 1 de A , que são multiplicados ordenadamente pelos elementos da coluna 1 de B , resultando elemento c_{11} da matriz C .

Observe-se que, no caso dessas matrizes, é possível também efetuar a multiplicação de B por A , já que B tem 2 colunas e A tem 2 linhas. A matriz D , resultante dessa multiplicação, terá dimensão 3×3 . Considerando-se apenas as dimensões das matrizes, vem: $(3 \times 2) \cdot (2 \times 3) = (3 \times 3)$. Assim, a matriz D será do tipo: $D = (d_{ik})_{3 \times 3}$, cujos elementos são:

- elemento d_{11} : multiplica-se cada elemento da linha 1 de B pelo correspondente elemento da coluna 1 de A e somam-se os produtos obtidos:

$$d_{11} = b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21};$$

- elemento d_{12} : multiplica-se cada elemento da linha 1 de B pelo correspondente elemento da coluna 2 de A e somam-se os produtos obtidos:

$$d_{12} = b_{11}a_{12} + b_{12}a_{22};$$

- elemento d_{13} : multiplica-se cada elemento da linha 1 de B pelo correspondente elemento da coluna 3 de A e somam-se os produtos obtidos:

$$d_{13} = b_{11}a_{13} + b_{12}a_{23};$$

- elemento d_{21} : multiplica-se cada elemento da linha 2 de B pelo correspondente elemento da coluna 1 de A e somam-se os produtos obtidos:

$$d_{21} = b_{21}a_{11} + b_{22}a_{21};$$

- elemento d_{22} : multiplica-se cada elemento da linha 2 de B pelo correspondente elemento da coluna 2 de A e somam-se os produtos obtidos:

$$d_{22} = b_{21}a_{12} + b_{22}a_{22};$$

- elemento d_{23} : multiplica-se cada elemento da linha 2 de B pelo correspondente elemento da coluna 3 de A e somam-se os produtos obtidos:

$$d_{23} = b_{21}a_{13} + b_{22}a_{23};$$

- elemento d_{31} : multiplica-se cada elemento da linha 3 de B pelo correspondente elemento da coluna 1 de A e somam-se os produtos obtidos:

$$d_{31} = b_{31}a_{11} + b_{32}a_{21};$$

- elemento d_{32} : multiplica-se cada elemento da linha 3 de B pelo correspondente elemento da coluna 2 de A e somam-se os produtos obtidos:

$$d_{32} = b_{31}a_{12} + b_{32}a_{22};$$

- elemento d_{33} : multiplica-se cada elemento da linha 3 de B pelo correspondente elemento da coluna 3 de A e somam-se os produtos obtidos:

$$d_{33} = b_{31}a_{13} + b_{32}a_{23}.$$

Então, tem-se:

$$BA = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{pmatrix} = D.$$

Nesta representação, estão destacados os elementos da linha 1 de B , que são multiplicados ordenadamente pelos elementos da coluna 1 de A , resultando elemento d_{11} da matriz D .

2) Sejam $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix} 4 & -8 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Determinar se possível:

a) $2A + C$

$$2A + C = 2 \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & -8 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+4 & -2-8 \\ 0+1 & 2+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -10 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

b) AB

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 5 + (-1) \cdot 2 & 2 \cdot 0 + (-1) \cdot (-1) & 2 \cdot 1 + (-1) \cdot (-3) \\ 0 \cdot 5 + 1 \cdot 2 & 0 \cdot 0 + 1 \cdot (-1) & 0 \cdot 1 + 1 \cdot (-3) \end{pmatrix}$$

$$\therefore AB = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

c) $B + C$

Não é possível, pois B e C não têm a mesma dimensão.

d) BC

Não é possível, pois o número de colunas da matriz $B_{2 \times 3}$ não é igual ao número de linhas da matriz $C_{2 \times 2}$.

e) $(A - 3C)B$

$$(A - 3C)B = \left[\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 4 & -8 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 & 23 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\therefore (A - 3C)B = \begin{pmatrix} -4 & -23 & -79 \\ -13 & -1 & -6 \end{pmatrix}$$

f) A^2

$$A^2 = AA = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Observações importantes sobre a multiplicação de matrizes:**1) A multiplicação de matrizes não é comutativa.****Exemplos:**1) Efetuar a multiplicação de A por B e de B por A , onde:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Observe-se que, no caso dessas matrizes, sendo ambas quadradas de ordem 2, é possível efetuar ambas as multiplicações solicitadas. Tem-se:

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) & 1 \cdot 1 + 2 \cdot 4 \\ (-3) \cdot 2 + 0 \cdot (-1) & (-3) \cdot 1 + 0 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 9 \\ -6 & -3 \end{pmatrix}$$

Por outro lado, tem-se:

$$BA = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + 1 \cdot (-3) & 2 \cdot 2 + 1 \cdot 0 \\ (-1) \cdot 1 + 4 \cdot (-3) & (-1) \cdot 2 + 4 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -13 & -2 \end{pmatrix}$$

Vê-se, assim, que, embora ambas as multiplicações AB e BA sejam possíveis, tem-se que $AB \neq BA$.

2) Efetuar, se possível, a multiplicação de A por B e de B por A , sendo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 1 & 3 & -4 \end{pmatrix}.$$

Sendo A de dimensão 2×2 e B de dimensão 2×3 , é possível multiplicar A por B : $(2 \times 2) \cdot (2 \times 3) = (2 \times 3)$, isto é, o número de colunas de A é igual ao número de linhas de B . Já a multiplicação de B por A não é possível, pois tem-se: $(2 \times 3) \cdot (2 \times 2)$, ou seja, o número de colunas de B não é igual ao número de linhas de A . Então, fazendo-se a multiplicação de A por B , vem:

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 1 & 3 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 + (-1) \cdot 1 & 1 \cdot 0 + (-1) \cdot 3 & 1 \cdot 5 + (-1) \cdot (-4) \\ 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 & 2 \cdot 0 + 3 \cdot 3 & 2 \cdot 5 + 3 \cdot (-4) \end{pmatrix},$$

ou seja,

$$C = AB = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 9 \\ 7 & 9 & -2 \end{pmatrix}.$$

O exemplo mostra que pode existir o produto AB e não existir o produto BA .

3) Dadas as matrizes

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -4 & 2 \end{pmatrix},$$

efetuar a multiplicação de A por B e de B por A .

Tem-se:

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

e

$$BA = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Nesse caso, tem-se que $AB = BA$. Diz-se, então que as matrizes A e B comutam entre si, ou que A e B são comutáveis. É claro que para que A e B sejam comutáveis é necessário que ambas sejam matrizes quadradas de mesma ordem.

2) Na multiplicação de matrizes não vale a lei do anulamento do produto.

Sabe-se que, dados dois números reais a e b , se o produto deles é igual a zero, isto é, se $ab = 0$, então se conclui que pelo menos um deles é zero, ou seja, tem-se $a = 0$ ou $b = 0$. O mesmo não ocorre com o produto de matrizes, isto é: dadas as matrizes $A_{m \times p}$ e $B_{p \times n}$, se o produto delas resulta na matriz nula, isto é, se $AB = \mathbf{0}_{m \times n}$, isso não acarreta, necessariamente, que A seja uma matriz nula ou que B seja uma matriz nula.

Exemplo: considerem-se as matrizes não nulas

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

tem-se:

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 & 0 \cdot 1 + 0 \cdot (-1) \\ 1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 & 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Essa é uma característica da nulidade do produto de matrizes, que pode ser posta de duas formas equivalentes:

- se $AB = \mathbf{0}$, isso não implica que $A = \mathbf{0}$ ou $B = \mathbf{0}$;
- mesmo que $A \neq \mathbf{0}$ e $B \neq \mathbf{0}$, pode ocorrer que $AB = \mathbf{0}$.

- 3) **Na multiplicação de matrizes não vale a lei do cancelamento do produto.** Considerando-se dois números reais a e b , se $2a = 2b$, então se pode dividir ambos os membros da igualdade por 2 e conclui-se que $a = b$. De modo mais geral, se $ca = cb$ e se $c \neq 0$, então se pode dividir ambos os membros por c e conclui-se que $a = b$. Essa é a chamada lei do cancelamento.

Para o produto de matrizes, não vale a lei do cancelamento, isto é:

se $AC = BC$, nem sempre se tem $A = B$.

Exemplo: considerando-se as matrizes quadradas de ordem 2

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \text{ e } C = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \text{ tem-se:}$$

$$AC = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 22 & 11 \end{pmatrix} \text{ e } BC = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 22 & 11 \end{pmatrix}.$$

O exemplo mostra que $AC = BC$ não implica que $A = B$. Posto de outra forma: tem-se $AC = BC$, com $C \neq \mathbf{0}_{2 \times 2}$, e, no entanto, tem-se que $A \neq B$.

Conclui-se, assim, que na multiplicação de matrizes, não vale a lei do cancelamento.

1.1.4. Outras Matrizes Especiais

- 1) **Matriz nilpotente de índice k .** A matriz quadrada A é dita nilpotente de índice k , sendo k um número natural maior do que 1, se $A^k = \mathbf{0}$ (aqui, o símbolo $\mathbf{0}$ representa a matriz nula de mesma ordem de A).

Exemplo: a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

é nilpotente de ordem 2, pois:

$$A^2 = AA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{0}_{2 \times 2}.$$

Observa-se que A também é nilpotente de ordem 3, pois:

$$A^3 = A^2 A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{0}_{2 \times 2}.$$

De maneira geral, pode-se afirmar que A é nilpotente de ordem k , sendo k um número natural maior ou igual a 2.

- 2) **Matriz idempotente.** A matriz quadrada A é dita idempotente se $A^2 = A$.

Exemplo: a matriz

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}$$

É idempotente, pois:

$$A^2 = AA = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -3 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-2) \cdot (-2) + 2 \cdot (-3) & (-2) \cdot 2 + 2 \cdot 3 \\ (-3) \cdot (-2) + 3 \cdot (-3) & (-3) \cdot 2 + 3 \cdot 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -3 & 3 \end{bmatrix} = A.$$

- 3) **Matriz periódica de índice k .** A matriz quadrada A é dita periódica de índice k , sendo k um número natural maior ou igual a 1, se $A^{k+1} = A$.

Exemplo: considere-se a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Tem-se:

$$A^2 = AA = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = A;$$

$$A^3 = A^2 A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = A;$$

$$A^4 = A^3 A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = A;$$

⋮

$$A^{k+1} = A^k A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = A, \text{ sendo } k \text{ um número natu-}$$

ral maior ou igual a 1. Conclui-se, assim que a matriz A é periódica de índice k .

- 4) **Matriz transposta.** Se a matriz $A = (a_{ij})_{m \times n}$ tem dimensão $m \times n$, sua transposta é a matriz de dimensão $n \times m$, cujas linhas coincidem ordenadamente com as colunas de A , denotada por A^t .

Assim, tem-se: $A^t = (a_{ji})_{n \times m}$.

Exemplo: dada a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 5 & -3 & 8 \end{pmatrix}_{2 \times 3},$$

sua transposta é a matriz

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & -3 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}_{3 \times 2}.$$

Propriedades: é possível mostrar que são válidas as propriedades:

- para qualquer matriz $A = (a_{ij})_{m \times n}$, tem-se: $(A^t)^t = A$
- dadas as matrizes $A = (a_{ij})_{m \times n}$ e $B = (b_{ij})_{m \times n}$, tem-se: $(A + B)^t = A^t + B^t$
- se $A = (a_{ij})_{m \times n}$ e $B = (b_{jk})_{n \times p}$, tem-se: $(AB)^t = B^t A^t$

Observe-se que é possível efetuar a multiplicação de A por B , que resulta em uma matriz de dimensão $m \times p$. Assim, a dimensão da matriz $(AB)^t$ que figura no primeiro membro da igualdade acima é $p \times m$. Por outro lado, matrizes B^t e A^t do segundo membro da igualdade têm dimensões $p \times n$ e $n \times m$, respectivamente. Assim, pode-se efetuar a multiplicação de B^t por A^t , que resulta em uma

matriz de dimensão $p \times m$. Vê-se, assim, que as matrizes $(AB)^t$ e $B^t A^t$ têm a mesma dimensão. É possível mostrar, além disso, que os elementos correspondentes dessas matrizes são iguais.

d) Para qualquer matriz $A = (a_{ij})_{m \times n}$ e para qualquer número real não nulo α , tem-se: $(\alpha A)^t = \alpha A^t$.

5) **Matriz simétrica.** Se A é quadrada de ordem n e $A = A^t$, então A é dita simétrica.

Como se poderá observar facilmente nos exemplos que serão dados, em uma matriz simétrica os elementos simetricamente dispostos em relação à diagonal principal são iguais.

Propriedades: são válidas as propriedades:

- a) se A é uma matriz simétrica e α é um número real não nulo, então αA é também uma matriz simétrica;
- b) para qualquer matriz quadrada A , tem-se que $A + A^t$ é uma matriz simétrica.

Exemplos:

1) Dada a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -5 \\ 2 & 0 & 7 \\ -5 & 7 & 1 \end{pmatrix},$$

sua transposta é:

$$A^t = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -5 \\ 2 & 0 & 7 \\ -5 & 7 & 1 \end{pmatrix},$$

e, portanto, tem-se que $A = A^t$, ou seja, A é simétrica. Conforme se observou anteriormente, os elementos simetricamente dispostos em relação à diagonal principal da matriz são iguais.

Além disso, multiplicando-se A por qualquer número real não nulo, por exemplo, -2 , vem:

$$-2A = -2 \begin{pmatrix} 3 & 2 & -5 \\ 2 & 0 & 7 \\ -5 & 7 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & -4 & 10 \\ -4 & 0 & -14 \\ 10 & -14 & -2 \end{pmatrix},$$

que é simétrica, conforme se afirmou em uma das propriedades.

2) Considere-se a matriz quadrada

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 8 & 3 & -5 \\ 1 & -2 & 7 \end{pmatrix}.$$

Sua transposta é:

$$A^t = \begin{pmatrix} -1 & 8 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \\ 3 & -5 & 7 \end{pmatrix}.$$

Observe que A não é simétrica e, portanto, A^t também não é. Somando-se as duas matrizes, tem-se:

$$A + A^t = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 8 & 3 & -5 \\ 1 & -2 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 8 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \\ 3 & -5 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 9 & 4 \\ 9 & 6 & -7 \\ 4 & -7 & 14 \end{pmatrix}.$$

Como se pode ver, os elementos simetricamente dispostos em relação à diagonal principal da matriz obtida são iguais e, portanto, $A + A^t$ é uma matriz simétrica, conforme se afirmou em uma das propriedades dadas.

- 6) **Matriz antissimétrica.** Se A é quadrada de ordem n , diz-se que A é antissimétrica se $A = -A^t$.

Propriedades: é possível mostrar que são válidas as propriedades:

- se A é uma matriz antissimétrica e α é um número real não nulo, αA é também uma matriz antissimétrica;
- para qualquer matriz quadrada A , tem-se que $A - A^t$ é uma matriz antissimétrica.

Exemplos:

1) Dada a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -5 \\ -2 & 0 & 7 \\ 5 & -7 & 0 \end{pmatrix},$$

sua transposta é:

$$A^t = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 5 \\ 2 & 0 & -7 \\ -5 & 7 & 0 \end{pmatrix},$$

e, portanto, tem-se que $A = -A^t$, ou seja, A é antissimétrica. Como se pode constatar neste exemplo, para que uma matriz seja antissimétrica os elementos da diagonal principal devem ser nulos e os que estão simetricamente dispostos em relação à diagonal principal devem ser opostos.

2) Considere-se novamente a matriz quadrada

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 8 & 3 & -5 \\ 1 & -2 & 7 \end{pmatrix}$$

e sua transposta

$$A^t = \begin{pmatrix} -1 & 8 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \\ 3 & -5 & 7 \end{pmatrix}.$$

Observe que A não é antissimétrica e, portanto, A^t também não é. Tem-se:

$$A - A^t = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 8 & 3 & -5 \\ 1 & -2 & 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 8 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \\ 3 & -5 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -7 & 2 \\ 7 & 0 & -3 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Como se pode ver, os elementos da diagonal principal da matriz obtida são nulos e os que estão simetricamente dispostos em relação à diagonal principal são opostos; portanto, $A - A^t$ é uma matriz antissimétrica, conforme se afirmou em uma das propriedades dadas.

Observação: usando as propriedades das matrizes simétricas e antisimétricas, pode-se decompor qualquer matriz quadrada A em uma soma de uma matriz simétrica com uma matriz antissimétrica. De fato, tem-se:

- 1) $A + A^t$ é simétrica e, portanto, $S = \frac{1}{2}(A + A^t)$ também o é;
- 2) $A - A^t$ é antissimétrica e, portanto, $T = \frac{1}{2}(A - A^t)$ também o é.

Então:

$$S + T = \frac{1}{2}(A + A^t) + \frac{1}{2}(A - A^t) = \frac{1}{2}(A + A^t + A - A^t) = \frac{1}{2}(2A) = \left(\frac{1}{2}2\right)A = A$$

Logo, $A = S + T$, ou seja, A é a soma de uma matriz simétrica com uma matriz antissimétrica.

7) **Matriz triangular.** Se A é quadrada de ordem n , tem-se dois casos de matriz triangular:

- triangular inferior: é tal que $a_{ij} = 0$, se $i < j$, ou seja, a matriz tem a forma:

$$A_{n \times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

- triangular superior: é tal que $a_{ij} = 0$, se $i > j$, isto é, tem-se a matriz:

$$A_{n \times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

1.1.5. Matrizes Equivalentes

É usual referir-se a uma linha ou a uma coluna de uma matriz $A_{m \times n}$ como sendo uma *fila*. Definem-se as seguintes operações elementares com os elementos de uma fila da matriz:

- a) permutar duas filas paralelas entre si, ou seja, permutar duas linhas entre si ou permutar duas colunas entre si;
- b) multiplicar todos os elementos de uma fila por um número real não nulo;
- c) somar os elementos de uma fila com os elementos de outra fila paralela;
- d) somar os elementos de uma fila com múltiplos dos elementos de outra fila paralela.

Quando se efetuam operações elementares com as filas da matriz $A_{m \times n}$, obtém-se uma matriz $B_{m \times n}$ que tem as mesmas propriedades da matriz A . Tem-se, assim, a seguinte definição:

Definição: Uma matriz B é equivalente a uma matriz A se B pode ser obtida de A através de uma sequência finita de operações elementares.

Exemplo: verificar se as matrizes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 6 & -18 \end{pmatrix}$$

são equivalentes.

Para verificar se as matrizes dadas são equivalentes, tentar-se-á efetuar operações elementares com uma delas, com o objetivo de obter a outra. Por exemplo, serão feitas operações elementares com as linhas de A , como segue:

- 1) a 1ª linha se A será copiada; a 2ª linha será substituída por outra, resultado da operação elementar “multiplicar os elementos da 1ª linha por (-3) e somar com elementos da 2ª linha”, conforme se indica a seguir:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{-3L_1 + L_2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & 6 & -18 \end{pmatrix};$$

- 2) mantém-se, agora, a 2ª linha; a 1ª linha será substituída por outra, resultado da operação elementar “multiplicar os elementos da 2ª linha por $\frac{1}{3}$ e somar com elementos da 1ª linha”, conforme indicado a seguir:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & 6 & -18 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{3}L_2 + L_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 6 & -18 \end{pmatrix} = B$$

Uma vez que, a partir da matriz A , pôde-se obter a matriz B , através de operações elementares com as linhas de A , conclui-se que as matrizes A e B são equivalentes.

Observe-se que, ao invés de realizar operações elementares com as linhas de A , pode-se realizá-las com as colunas de A :

- a) a 3ª coluna se A será copiada; a 1ª coluna será substituída por outra, resultado da operação elementar “somar os elementos da 3ª coluna com os elementos da 1ª coluna”. Além disso, a 2ª coluna será substituída por outra, resultado da operação elementar “multiplicar os elementos da 3ª coluna por $\frac{2}{5}$ e somar com os elementos da 2ª coluna”. Essas operações são indicadas a seguir:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{C_3+C_1 \\ \frac{2}{5}C_3+C_2}} \begin{pmatrix} 6 & 0 & 5 \\ 0 & -\frac{6}{5} & -3 \end{pmatrix}$$

- b) serão substituídas as três colunas dessa nova matriz, através das seguintes operações: “multiplicar os elementos da 1ª coluna por $\frac{1}{6}$ ”; “multiplicar os elementos da 2ª coluna por (-5) ”; “multiplicar os elementos da 1ª coluna por (-1) e somar com os elementos da 3ª coluna”. Tem-se:

$$\begin{pmatrix} 6 & 0 & 5 \\ 0 & -\frac{6}{5} & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{\frac{1}{6}C_1 \\ -5C_2 \\ -C_1+C_3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 6 & -3 \end{pmatrix}$$

- 3) mantêm-se, agora, as colunas 1 e 2 e substitui-se a 3ª coluna por outra, obtida através da operação: “multiplicar os elementos da 2ª coluna por $(-\frac{5}{2})$ e somar com os elementos da 3ª coluna”, ou seja:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 6 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{-\frac{5}{2}C_2+C_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 6 & -18 \end{pmatrix} = B.$$

Observação: depois de vistos os métodos de resolução de sistemas de equações lineares, será introduzido o conceito de matrizes semelhantes.

1.1.6. Matriz Escalonada

- 1) **Matriz escalonada por linha.** Diz-se que uma matriz $A = (a_{ij})_{m \times n}$ está escalonada por linha se $a_{ij} = 0$, para $i > j$. Assim, a matriz A tem a forma:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{4n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Observação: os elementos a_{ij} tais que $i < j$ podem ou não ser nulos.

Exemplo: as matrizes seguintes são matrizes escalonadas por linha:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- 2) **Matriz escalonada por coluna.** Diz-se que uma matriz $A = (a_{ij})_{m \times n}$ está escalonada por coluna se $a_{ij} = 0$, para $i < j$. Assim, a matriz A tem a forma:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & a_{m4} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Observação: os elementos a_{ij} tais que $i > j$ podem ou não ser nulos.

Exemplo: as matrizes seguintes são matrizes escalonadas por coluna:

$$C = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}; D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & -4 \end{pmatrix}.$$

Para, a partir de uma matriz dada A , obter-se uma matriz escalonada (por linha ou por coluna) que seja equivalente a A , efetuam-se operações elementares com suas filas.

Exemplos:

1) Dada a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -2 & 2 & -1 \\ 1 & -4 & -3 \end{pmatrix},$$

obter matrizes escalonadas por linha e por coluna equivalentes a ela.

Efetuar-se-ão operações elementares com as linhas de A , indicadas em cada etapa, como segue:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -2 & 2 & -1 \\ 1 & -4 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{2L_1+L_2 \\ -L_1+L_3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & -4 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow{2L_2+L_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Assim, a matriz escalonada por linha que se obteve é equivalente à matriz A .

Por outro lado, para se obter uma matriz escalonada por coluna que seja equivalente a A , efetuar-se-ão operações elementares com as colunas de A , como segue:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -2 & 2 & -1 \\ 1 & -4 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{-3C_1+C_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 5 \\ 1 & -4 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow{-\frac{5}{2}C_2+C_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & -4 & 4 \end{pmatrix};$$

a matriz escalonada por coluna que resultou é equivalente à matriz A .

2) Dada a matriz

$$B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & -3 & 1 \end{pmatrix},$$

obter matrizes escalonadas por linha e por coluna equivalentes a ela.

Efetuando-se operações elementares com as linhas de B , indicadas em cada etapa, tem-se:

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & -3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{\frac{3}{2}L_1+L_2 \\ \frac{1}{2}L_1+L_3}} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{7}{2} & -2 \\ 0 & \frac{7}{2} & -\frac{5}{2} & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{-7L_2+L_3} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{7}{2} & -2 \\ 0 & 0 & -27 & 15 \end{pmatrix}.$$

Assim, a matriz escalonada por linha que se obteve é equivalente à matriz B .

Por outro lado, para se obter uma matriz escalonada por coluna que seja equivalente a B , efetuar-se-ão operações elementares com suas colunas, como segue:

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & -3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{\frac{1}{2}C_1+C_2 \\ \frac{1}{2}C_1+C_3}} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & \frac{1}{2} & \frac{7}{2} & -2 \\ 1 & \frac{7}{2} & -\frac{5}{2} & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{2C_2 \\ 2C_3}} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 7 & -2 \\ 1 & 7 & -5 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{-7C_2+C_3 \\ 2C_2+C_4}} \\ \xrightarrow{\substack{-7C_2+C_3 \\ 2C_2+C_4}} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 7 & -54 & 15 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{5}{18}C_3+C_4} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 7 & -54 & 0 \end{pmatrix}.$$

A matriz escalonada por coluna resultante das operações elementares é equivalente à matriz B .

1.1.7. Matriz Inversível

Definição: Dada uma matriz quadrada A de ordem n , se existir uma matriz quadrada B , de mesma ordem, tal que $A \cdot B = B \cdot A = Id_n$, então a matriz B é chamada inversa da matriz A . Diz-se, então, que A é inversível.

Notação: A^{-1} .

Se a matriz A é inversível, sua inversa é única. Se A não admite inversa, diz-se que A é singular.

Determinação da inversa: ver-se-á, no momento, apenas um método de determinação da inversa de uma matriz inversível A , usando operações elementares. Após o estudo dos determinantes e dos sistemas lineares, ver-se-ão outras duas formas de se determinar a matriz inversa de uma matriz.

Para se determinar a inversa de uma matriz quadrada A de ordem n através do método das operações elementares, procede-se da seguinte maneira: escreve-se uma matriz “ampliada”, com n linhas e $2n$ colunas, dividida ao meio

verticalmente. Nas n primeiras linhas e colunas (ou seja, do lado esquerdo da divisão), colocam-se os elementos da matriz A . Nas restantes n linhas e colunas (ou seja, do lado direito da divisão), colocam-se os elementos da matriz identidade Id_n . Efetuam-se operações elementares com essa matriz ampliada, com o objetivo de transformar a matriz A , que está do lado esquerdo, na matriz identidade. Ao final do processo, A terá se tornado a matriz identidade e a matriz do lado direito, resultante das operações feitas com a matriz Id_n , é a matriz inversa de A , ou seja, é A^{-1} .

Exemplo: Considerem-se as matrizes $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Determinar a inversa de cada uma delas, através do método das operações elementares.

Escreve-se a matriz ampliada de A : $\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \end{array} \right)$. Observe-se que esta

matriz tem o mesmo número de linhas de A , mas tem o dobro de colunas. Do lado esquerdo, está a matriz A ; do lado direito, a matriz Id_2 . Efetuam-se, a seguir, operações elementares com esta nova matriz, como segue:

- 1) copia-se a primeira linha, já que o primeiro elemento de A é 1, que é também o primeiro elemento da matriz identidade, que é o objetivo final. A segunda linha será modificada através das operações $-2L_1 + L_2$:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{-2L_1 + L_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 1 \end{array} \right);$$

- 2) com o objetivo de obter um zero na posição a_{12} da matriz A , copia-se a segunda linha e transforma-se a primeira, fazendo-se: $\frac{3}{2}L_2 + L_1$:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\frac{3}{2}L_2 + L_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & \frac{3}{2} \\ 0 & -2 & -2 & 1 \end{array} \right);$$

- 3) resta, apenas, tornar o elemento a_{22} igual a 1; para isso, basta que se multiplique a segunda linha por $-\frac{1}{2}$:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & \frac{3}{2} \\ 0 & -2 & -2 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{-\frac{1}{2}L_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{2} \end{array} \right).$$

Tendo a matriz do lado esquerdo se transformado na matriz identidade, a do lado direito é a matriz inversa procurada, isto é:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & \frac{3}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Considerando-se, agora, a matriz B , de ordem 3, a matriz ampliada terá 3 linhas e 6 colunas, indicada abaixo:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

Far-se-ão as operações indicadas nas passagens de uma matriz à outra, conforme se segue:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{-3L_1+L_2 \\ -2L_1+L_3}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{-\frac{1}{4}L_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & -3 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{3L_2+L_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{L_3+L_2 \\ 4L_3}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -3 & 4 \end{array} \right) \xrightarrow{-2L_2+L_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -3 & 4 \end{array} \right)$$

$$\therefore B^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Observação: se, ao se efetuarem operações elementares com uma matriz, se obtiver uma ou mais filas nulas, conclui-se que a matriz não admite inversa.

1.2. DETERMINANTES

1.2.1. Histórico

Os primeiros estudos sobre determinantes datam, provavelmente, do século 111 a.C. Mas foi só em 1683 que o japonês Takakazu Seki Kowa (1642-1708) usou a idéia de determinante em seus trabalhos sobre sistemas lineares.

O uso do determinante no ocidente começou 10 anos depois, com um trabalho de Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), ligado também a sistemas lineares. O francês Étienne Bézout (1730-1783) sistematizou, em 1764, o processo de estabelecimento dos sinais dos termos de um determinante. E coube a outro francês, Alexandre Théophile Vandermonde (1735-1796), a primeira abordagem da teoria dos determinantes.

O termo determinante, com o sentido atual, surgiu em 1812, em um trabalho de Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) sobre o assunto. Além de Cauchy, quem mais contribuiu para consolidar a teoria dos determinantes foi o alemão Carl Gustav Jacob Jacobi (1804-1851). Deve-se a ele a forma simples como essa teoria se apresenta até hoje.

O determinante de uma matriz quadrada A de ordem n ($n \in \mathbb{N}^*$) é um escalar, denotado por $\det(A)$.

Determinante de uma matriz quadrada de ordem 1.

Dada a matriz $A = (a_{11})$, seu determinante é igual ao próprio elemento a_{11} . Indica-se: $\det(A)$ ou $|a_{11}|$.

Observação: não se deve confundir, neste caso, a notação $|a_{11}|$, que indica o determinante da matriz cujo único elemento é o número real a_{11} , com o módulo (ou valor absoluto) do número real a_{11} .

Exemplo: se $A = (-5)$, então $\det(A) = -5$.

Para se obter o determinante de matrizes quadradas de ordem $n \geq 2$, aplicam-se os métodos que serão descritos a seguir.

1.2.2. Regra de Sarrus

Esta regra deve-se a Pierre Frédéric Sarrus (1798-1861), a qual se aplica aos determinantes de 2ª e 3ª ordem, como segue.

Determinante de uma matriz quadrada de ordem 2.

Dada a matriz $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, seu determinante é:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

ou seja, o determinante de A é igual à diferença entre o produto dos elementos da diagonal principal e o produto dos elementos da diagonal secundária da matriz.

Exemplo: dada a matriz

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix},$$

seu determinante é:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = (-3 \cdot 2) - (2 \cdot 4) = -6 - 8 = -14$$

Determinante de uma matriz quadrada de ordem 3.

O determinante da matriz $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ é calculado da seguinte maneira:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} +$$

$$- (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33})$$

Pode-se usar a seguinte regra prática: repetem-se as duas primeiras colunas ao lado das três colunas originais do determinante; em seguida, somam-se os resultados dos três produtos “no sentido da diagonal principal”, subtraindo-se, depois, a soma dos três produtos efetuados “no sentido da diagonal secundária”, conforme mostra a Figura 1.3.

Figura 1.3

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$-a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$

Observação: esse método de calcular o determinante se aplica apenas a matrizes quadradas de ordem 3.

Exemplo: seja

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \\ 3 & -4 & 2 \end{pmatrix}. \text{ Tem-se:}$$

$$\begin{aligned} \det(A) &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \\ 3 & -4 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} \\ &= [1 \cdot 3 \cdot 2 + 2 \cdot 2 \cdot 3 + 0 \cdot (-1) \cdot (-4)] - [0 \cdot 3 \cdot 3 + 1 \cdot 2 \cdot (-4) + 2 \cdot (-1) \cdot 2] = \\ &= (6 + 12 + 0) - (0 - 8 - 4) = 18 + 12 = 30 \end{aligned}$$

1.2.3. Teorema de Laplace

Para matrizes quadradas de ordem n ($n \geq 2$), o Teorema de Laplace (Pierre-Simon Laplace, 1749-1827) oferece uma solução prática no cálculo dos determinantes. Para que seja possível utilizá-lo, são necessárias as definições seguintes.

Menor complementar. Dada a matriz quadrada $A = (a_{ij})_{n \times n}$ de ordem n ($n \geq 2$), o menor complementar de um elemento genérico a_{ij} da matriz é o determinante D_{ij} que se obtém suprimindo a linha i e a coluna j de A .

Exemplo: dada a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -5 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ -4 & -2 & 1 \end{bmatrix},$$

determinar os menores complementares D_{22} , D_{32} e D_{13} .

De acordo com a definição, tem-se:

$$D_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} = 2;$$

$$D_{32} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2;$$

$$D_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -4 & -2 \end{vmatrix} = 10.$$

Cofator. Dada a matriz quadrada $A = (a_{ij})_{n \times n}$ de ordem n , sendo $n \geq 2$, chama-se cofator de um elemento a_{ij} da matriz ao produto de $(-1)^{i+j}$ pelo determinante da submatriz obtida eliminando-se de A a linha i e a coluna j . Assim, o cofator de um elemento a_{ij} é o menor complementar desse elemento, multiplicado por $(-1)^{i+j}$. O cofator do elemento a_{ij} é denotado por A_{ij} .

Exemplo: considere-se a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}. \text{ Os cofatores dos elementos } a_{23} \text{ e } a_{31} \text{ são:}$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (6 + 3) = -9$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot (0 + 2) = 2.$$

Teorema de Laplace: O determinante de uma matriz quadrada A de ordem n ($n \geq 2$) é igual à soma dos produtos dos elementos de uma linha ou coluna qualquer pelos respectivos cofatores.

Assim, dada a matriz

$$A_{n \times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

tomando-se como referência, por exemplo, a primeira linha, tem-se:

$$\det(A) = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n}.$$

Observação: pode-se aplicar o Teorema de Laplace utilizando-se qualquer linha ou coluna da matriz A como referência. É usual escolher-se aquela que apresenta a maior quantidade de zeros, com o objetivo de diminuir os cálculos.

Exemplos:

1) Dada a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \\ 3 & -4 & 2 \end{pmatrix}$, calcular seu determinante usando o

Teorema de Laplace.

Escolhendo a 3ª coluna como referência, vem:

$$\det(A) = a_{13}A_{13} + a_{23}A_{23} + a_{33}A_{33},$$

ou seja,

$$\det(A) = 0 \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\det(A) = -2 \cdot (-10) + 2 \cdot (5) = 20 + 10 = 30.$$

2) Considere-se a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 5 & 1 \\ 3 & 7 & -1 & 0 \\ 4 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}. \text{ Calcular seu determinante, usando o Teorema de}$$

Laplace.

Escolher-se-á a primeira linha para aplicar o Teorema de Laplace, porque ela apresenta dois elementos nulos, o que facilita a aplicação do método.

Analogamente, poder-se-ia ter escolhido a quarta coluna, que também apresenta dois zeros. Entretanto, ressalta-se que se pode escolher qualquer linha ou coluna. Tem-se:

$$\det(A) = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} + a_{14}A_{14}$$

Assim, vem:

$$\begin{aligned} \det(A) = & 3 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 7 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 5 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & -1 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & 7 & 0 \\ 4 & 1 & -1 \end{vmatrix} + \\ & + 0 \cdot (-1)^{1+4} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 3 & 7 & -1 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot 52 - 1 \cdot 24 = 132 \end{aligned}$$

1.2.4. Regra de Chió

Deve-se ao matemático italiano Felice Chió (1813-1871). Seja $A = (a_{ij})$ uma matriz quadrada de ordem n ($n \geq 2$). Admitindo-se, inicialmente, que a matriz A apresente um elemento $a_{ij} = 1$, suprimem-se a linha i e a coluna j correspondentes a este elemento unitário, restando uma submatriz de ordem $n - 1$.

Toma-se cada elemento a_{pk} dessa submatriz e dele subtrai-se o produto $a_{ik}a_{pj}$, ou seja, constrói-se a matriz $B = (b_{pk})$, onde $b_{pk} = a_{pk} - a_{ik}a_{pj}$.

O determinante de A será dado por:

$$\det(A) = (-1)^{i+j} \cdot \det(B).$$

Para visualizar melhor esse processo, considere-se a matriz

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix};$$

supondo-se, por exemplo, que o elemento a_{11} seja igual a 1, eliminam-se de A a linha 1 e a coluna 1:

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{a_{11}} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Constrói-se, agora, a matriz B , a partir dos elementos que restaram na matriz A , depois de suprimidas a linha 1 e a coluna 1. Por exemplo, o elemento b_{32} é obtido da seguinte forma:

$$b_{32} = a_{32} - a_{12}a_{31};$$

para a obtenção do elemento b_{n3} , faz-se:

$$b_{n3} = a_{n3} - a_{13}a_{n1}.$$

Procedendo-se de modo análogo, constrói-se a matriz B :

$$B = \begin{pmatrix} a_{22} - a_{12}a_{21} & a_{23} - a_{13}a_{21} & \cdots & a_{2n} - a_{1n}a_{21} \\ a_{32} - a_{12}a_{31} & a_{33} - a_{13}a_{31} & \cdots & a_{3n} - a_{1n}a_{31} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n2} - a_{12}a_{n1} & a_{n3} - a_{13}a_{n1} & \cdots & a_{nn} - a_{1n}a_{n1} \end{pmatrix}.$$

Portanto, o determinante de A é:

$$\det(A) = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} - a_{12}a_{21} & a_{23} - a_{13}a_{21} & \cdots & a_{2n} - a_{1n}a_{21} \\ a_{32} - a_{12}a_{31} & a_{33} - a_{13}a_{31} & \cdots & a_{3n} - a_{1n}a_{31} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n2} - a_{12}a_{n1} & a_{n3} - a_{13}a_{n1} & \cdots & a_{nn} - a_{1n}a_{n1} \end{vmatrix}$$

Exemplo: tomando-se novamente a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \\ 3 & -4 & 2 \end{pmatrix},$$

considerada nos exemplos anteriores, usar a regra de Chió para calcular seu determinante.

Aplicar-se-á a regra de Chió para o elemento $a_{11} = 1$. Assim, eliminar-se-ão a primeira linha e a primeira coluna de A e construir-se-á a matriz B a partir dos elementos que restaram em A . Então, vem:

$$B = \begin{pmatrix} 3 - 2 \cdot (-1) & 2 - 0 \cdot (-1) \\ -4 - 2 \cdot 3 & 2 - 0 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -10 & 2 \end{pmatrix};$$

portanto, tem-se:

$$\det(A) = (-1)^{1+1} \cdot \det(B) = 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ -10 & 2 \end{vmatrix} = 5 \cdot 2 - (-10 \cdot 2) = 30,$$

que é o resultado obtido anteriormente, por meio dos outros métodos.

Observação: caso a matriz A não apresente um elemento igual a 1, pode-se escolher qualquer elemento não nulo a_{ij} e multiplicar a fila (linha ou coluna) à

qual ele pertence por $\frac{1}{a_{ij}}$ para se obter o elemento 1 necessário para a aplica-

ção da regra de Chió. Obter-se-á uma matriz M , para a qual se aplica a regra de Chió. Como se verá a seguir, nas propriedades dos determinantes, o determi-

nante da matriz M é igual ao determinante de A , multiplicado por $\frac{1}{a_{ij}}$, ou seja,

$$\det(M) = \frac{1}{a_{ij}} \det(A), \text{ e, portanto, } \det(A) = a_{ij} \det(M).$$

Exemplo: considerando-se, novamente, a matriz A do exemplo anterior, calcular-se-á seu determinante utilizando-se o elemento $a_{31} = 3$ (supondo que não houvesse nenhum elemento igual a 1 na matriz A). Portanto, multiplica-se a terceira linha de A por $\frac{1}{3}$ e obtém-se a matriz M :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & -\frac{4}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

Aplica-se, assim, a regra de Chió para essa nova matriz, tomando-se como referência o elemento $c_{31} = 1$. Para tanto, eliminam-se a terceira linha e a primeira coluna da matriz C e constrói-se a matriz B , de ordem 2, a partir dos elementos que restaram na matriz C :

$$B = \begin{pmatrix} 2 - \left(-\frac{4}{3}\right) \cdot 1 & 0 - \frac{2}{3} \cdot 1 \\ 3 - \left(-\frac{4}{3}\right) \cdot (-1) & 2 - \frac{2}{3} \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{10}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{5}{3} & \frac{8}{3} \end{pmatrix}.$$

$$\therefore \det(M) = (-1)^{3+1} \cdot \det(B) = 1 \cdot \begin{vmatrix} \frac{10}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{5}{3} & \frac{8}{3} \end{vmatrix} = 10.$$

Assim, conclui-se que:

$$\det(A) = 3\det(M) = 3 \cdot 10 = 30,$$

resultado que já foi obtido através dos métodos anteriores.

1.2.5. Propriedades dos Determinantes

Seja A uma matriz quadrada ordem n .

1) Tem-se $\det(A) = 0$ se:

- A possui uma fila (linha ou coluna) nula;
- A apresenta duas filas paralelas iguais;
- A possui duas filas paralelas proporcionais (isto é, os elementos de uma fila são múltiplos dos elementos da outra fila) ou se uma das filas é uma soma algébrica de múltiplos das outras filas.

2) Se A é triangular (superior ou inferior) ou se A é diagonal, seu determinante é igual ao produto dos elementos da diagonal principal.

3) Multiplicando-se uma fila de A por um escalar não nulo α , seu determinante ficará multiplicado por α .

4) Permutando-se duas filas paralelas de A , seu determinante ficará multiplicado por (-1) .

5) Se B é uma matriz obtida de A somando-se uma fila com um múltiplo de outra fila paralela, ou seja, se A e B são equivalentes, então $\det(B) = \det(A)$.

6) $\det(A^t) = \det(A)$.

$$7) \det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}, \text{ desde que } \det(A) \neq 0.$$

$$8) \det(AB) = \det(A)\det(B).$$

$$9) \text{ Se } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ e, a partir de } A, \text{ constrói-se a matriz}$$

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} + x_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} + x_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} + x_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

então:

$$\begin{vmatrix} a_{11} + x_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} + x_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} + x_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ x_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Observação: é claro que esta propriedade é verdadeira se, ao invés de se somarem números reais à primeira coluna de A , como explicitado acima, somarem-se números reais a qualquer outra coluna de A .

Exemplos:

1) Seja A uma matriz quadrada de ordem 2 tal que $\det(A) \neq 0$. Calcular $\det(A)$, sabendo que $A^2 - 2A = \mathbf{0}$.

Se $A^2 - 2A = \mathbf{0}$, então $A^2 = 2A$.

Das propriedades dos determinantes, vem: $\det(A^2) = \det(2A)$.

Um erro muito comum que se comete é afirmar que $\det(2A) = 2\det(A)$. Isso não é verdade, pois a matriz $2A$ é obtida multiplicando-se todos os elementos de A por 2, ou seja, multiplicando-se cada uma das duas linhas de A por 2; assim pela propriedade 3 vista anteriormente, o determinante de A fica multiplicado por $2 \cdot 2$. Então:

$$\det(A^2) = \det(2A) \Rightarrow \det(AA) = 2 \cdot 2 \cdot \det(A) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \det(A)\det(A) = 4 \det(A) \Rightarrow [\det(A)]^2 = 4 \det(A) \Rightarrow [\det(A)]^2 - 4 \det(A) = 0$$

Tem-se uma equação do 2º grau, cuja “variável” é $\det(A)$. Assim, vem:

$$\det(A)(\det(A) - 4) = 0,$$

de onde se segue que $\det(A) = 0$ ou $\det(A) = 4$. Uma vez que, por hipótese, sabe-se que $\det(A) \neq 0$, conclui-se que $\det(A) = 4$.

2) Considerem-se as matrizes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

a) Mostrar que é verdadeira a propriedade 8, ou seja, mostrar que:

$$\det(AB) = \det(A)\det(B).$$

Calculam-se, inicialmente, os determinantes de A e de B :

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 3 \cdot 3 + 4 \cdot 2 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \cdot 0 - (0 \cdot 3 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot 4 \cdot 3) = -9$$

$$\det(B) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot (-1) + (-1) \cdot 2 \cdot (-1) + 2 \cdot 0 \cdot 2 + \\ - (2 \cdot 2 \cdot (-1) + 2 \cdot 0 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) \cdot (-1)) = 2$$

Por outro lado, efetuando-se a multiplicação de A por B , obtém-se:

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 7 & 10 \\ 6 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix};$$

assim, seu determinante é:

$$\det(AB) = \begin{vmatrix} 9 & 7 & 10 \\ 6 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 9 \cdot 4 \cdot 1 + 7 \cdot 8 \cdot 0 + 6 \cdot 1 \cdot 10 + \\ - (10 \cdot 4 \cdot 0 + 9 \cdot 8 \cdot 1 + 6 \cdot 7 \cdot 1) = -18 = (-9) \cdot 2$$

Vê-se, assim, que $\det(AB) = -18 = (-9) \cdot 2$, ou seja, $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

- b) Verificar se é verdadeira a afirmação: $\det(A+B) = \det(A) + \det(B)$.

Já se sabe que $\det(A) = -9$ e que $\det(B) = 2$. Portanto:

$$\det(A) + \det(B) = -9 + 2 = -7 \quad (1)$$

Calcula-se, então, a soma $A+B$, para depois calcular seu determinante:

$$A+B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix};$$

então:

$$\det(A+B) = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 \cdot 2 + 3 \cdot 4 \cdot 0 + 4 \cdot 1 \cdot 2 - (2 \cdot 5 \cdot 0 + 4 \cdot 1 \cdot 2 + 4 \cdot 3 \cdot 2) = -4$$

$$\text{Portanto, } \det(A+B) = -4 \quad (2)$$

De (1) e (2), conclui-se que não é verdadeira a igualdade dada, isto é, em geral:

$$\det(A+B) \neq \det(A) + \det(B).$$

- 3) É possível mostrar que a área de um triângulo com vértices nos pontos $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ e $P_3(x_3, y_3)$ pode ser calculada através da expressão

$$S = \frac{1}{2} |\det(A)|,$$

onde a matriz A é

$$A = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Usando essa expressão, calcular a área do triângulo com vértices nos pontos $P_1(1,1)$, $P_2(1,3)$ e $P_3(2,0)$.

Primeiramente, constrói-se a matriz com as coordenadas dos pontos, isto é:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

seu determinante é:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 3 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot 2 - (1 \cdot 3 \cdot 2 + 1 \cdot 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot 1) = -2.$$

Assim, a área do triângulo é:

$$S = \frac{1}{2} |\det(A)| = \frac{1}{2} \cdot |-2| = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1 \text{ unidade de área.}$$

1.2.6. Aplicação do Determinante no Cálculo da Matriz Inversa

Sabendo-se, agora, como calcular o determinante de uma matriz quadrada, pode-se ver uma das formas de determinar a matriz inversa de A , se existir, isto é, se A for inversível. Para isso, utilizam-se as definições de menor complementar e de cofator, vistas anteriormente, além da matriz cofatora, definida a seguir.

Matriz cofatora. Dada uma matriz quadrada A de ordem n ($n \geq 2$), chama-se matriz cofatora de A a matriz cujos elementos são os cofatores de cada elemento da matriz dada.

Notação: $\text{cof}(A)$.

Exemplo: dada a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$, os cofatores de seus elementos são:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = -12$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 6$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 2$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = -8$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 4$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -4$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = -2$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = -3$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1.$$

Assim, a matriz cofatora de A é:

$$\text{cof}(A) = \begin{pmatrix} -12 & 6 & 2 \\ -8 & 4 & -4 \\ -2 & -3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Matriz adjunta. Dada uma matriz quadrada A de ordem n ($n \geq 2$), chama-se matriz adjunta de A a transposta da matriz cofatora da matriz dada.

Notação: $\text{Adj}(A)$.

$$\text{Assim: } \text{Adj}(A) = (\text{cof}(A))^t.$$

Pode-se, agora, usar o resultado seguinte para calcular a inversa de uma matriz inversível A .

Proposição: Seja A uma matriz quadrada de ordem n ($n \geq 2$), tal que $\det(A) \neq 0$. Então, a matriz inversa de A é determinada por:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \text{Adj}(A).$$

Observação: se $\det(A) = 0$, a matriz A não admite inversa, ou seja, é singular. Assim, uma matriz é singular se, e somente se, $\det(A) = 0$. Se $\det(A) \neq 0$, A é dita não-singular.

Exemplo: Considere-se a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Determinar sua inversa através da matriz adjunta.

Verificar-se-á que A é não-singular, ou seja, A admite inversa, calculando seu determinante. Tem-se:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (1 \cdot 2 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \cdot 2 + 0 \cdot 3 \cdot 1) - (0 \cdot 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 \cdot 1) = -1.$$

Como $\det(A) = -1 \neq 0$, A é não-singular e, portanto, admite inversa. Calculam-se, assim, os cofatores dos elementos de A , como segue:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -4.$$

Assim, a matriz cofatora de A é:

$$\text{cof}(A) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & -4 \end{pmatrix}$$

e, portanto, sua adjunta é:

$$\text{Adj}(A) = (\text{cof}(A))^t = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -4 \end{pmatrix}.$$

Logo, a matriz inversa de A é:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \text{Adj}(A) = \frac{1}{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 4 \end{pmatrix}.$$

1.3. SISTEMAS LINEARES

1.3.1. Histórico

Na matemática ocidental antiga, são poucas as aparições de sistemas de equações lineares. No Oriente, contudo, o assunto mereceu atenção bem maior. Com seu gosto especial por diagramas, os chineses representavam os sistemas lineares por meio de seus coeficientes escritos com barras de bambu sobre os quadrados de um tabuleiro. Assim, acabaram descobrindo o método de resolução por eliminação – que consiste em anular coeficientes por meio de operações elementares. Exemplos deste procedimento encontram-se nos “*Nove capítulos sobre a arte da Matemática*”, um texto que data, provavelmente, do século 111 a.C.

Definição: Chama-se equação linear a n variáveis toda equação do tipo:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b,$$

onde:

- $a_1, a_2, \dots, a_n$ são números reais, chamados coeficientes;
- $x_1, x_2, \dots, x_n$ são as variáveis;
- b é o termo independente.

Observe que em uma equação linear as variáveis têm expoente 1 e não aparecem termos nos quais haja produto de duas ou mais variáveis entre si.

Exemplos:

1) A equação $a_1x_1 + a_2x_2 = b$ pode ser escrita na forma $Ax + By + C = 0$, onde as incógnitas x_1 e x_2 foram chamadas, respectivamente, de x e y e os coeficientes a_1 e a_2 , representados por A e B . O termo independente, neste caso, é C , o qual pode ser escrito no primeiro ou no segundo membro da equação. Esta representa, no plano Oxy , uma reta e é chamada equação geral da reta.

2) A equação linear $Ax + By + Cz + D = 0$, na qual os coeficientes A , B e C não se anulam ao mesmo tempo, tem como representação geométrica, no espaço tridimensional, um plano.

Por exemplo, a equação $2x - 3y + z = 8$ é linear, pois apresenta, em cada termo, apenas uma incógnita com expoente igual a 1.

3) A equação $x^2 - 3x - 4 = 0$ não é linear, pois apresenta incógnita com expoente maior do que 1 (no caso, expoente 2).

4) A equação $3x + 2xy - 3y = 5$ não é linear, pois apresenta o termo $2xy$, que depende do produto de duas incógnitas.

5) A equação $\frac{3}{x} + 5y = 1$ não é linear, pois o expoente da variável x é -1.

Definição: Dada a equação linear $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b$, chama-se solução desta equação a sequência de n números reais (ou seja, uma n -upla) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, tal que: $a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \dots + a_n\alpha_n = b$ é uma identidade verdadeira.

Exemplos:

1) A equação geral da reta, dada por $Ax + By + C = 0$ também pode ser escrita na forma reduzida $y = ax + b$, onde $a = -\frac{A}{B}$ e $b = -\frac{C}{B}$, desde que $B \neq 0$.

Assim, dada a equação $2x + 3y - 5 = 0$, pode-se escrever $y = -\frac{2}{3}x + \frac{5}{3}$.

Quando se faz $y = 0$, obtém-se a equação linear $-\frac{2}{3}x + \frac{5}{3} = 0$, cuja solução é um único valor de x :

$$-\frac{2}{3}x + \frac{5}{3} = 0 \Rightarrow -\frac{2}{3}x = -\frac{5}{3} \Rightarrow x = \frac{5}{2}.$$

Logo, o par ordenado $\left(\frac{5}{2}, 0\right)$ é uma solução da equação linear dada.

- 2) Dada a equação linear $2x - 3y + z = 8$, a terna $(x, y, z) = (1, 0, 6)$, ou seja, $x = 1$, $y = 0$ e $z = 6$, é solução da equação pois, substituindo-se esses valores na equação tem-se: $2 \cdot 1 - 3 \cdot 0 + 6 = 8$, ou seja, $8 = 8$, que é uma identidade verdadeira.

Já a terna $(2, 2, 1)$ não é solução desta equação, pois:

$$2 \cdot 2 - 3 \cdot 2 + 1 = 8 \Rightarrow -1 = 8, \text{ que é falso.}$$

- 3) Dada a equação linear $x - 2y + \frac{1}{2}z = 1$, verifica-se que, para $x = 2$, $y = 1$ e $z = 2$, tem-se:

$$2 - 2 \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 2 = 1,$$

ou seja, a terna de valores $(2, 1, 2)$ satisfaz a equação e, portanto, é uma solução da equação dada.

Definição: Chama-se sistema linear a um conjunto formado por m equações lineares a n incógnitas $x_1, x_2, \dots, x_n$, consideradas simultaneamente, como indicado:

$$S_{m \times n} : \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}.$$

Os elementos a_{ij} , com $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ e $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ são os coeficientes das incógnitas e $b_1, b_2, \dots, b_m$ são os termos independentes das equações do sistema; $m \times n$ indica a ordem do sistema.

Observação: pode-se, de forma mais simplificada, denotar-se um sistema linear por (S) .

Exemplo: são sistemas lineares os conjuntos de equações lineares:

$$(S): \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 - \sqrt{2}x_4 = -1 \\ x_1 + 4x_2 - \frac{1}{2}x_3 + 8x_4 = 3 \\ -5x_1 + 1,4x_2 - x_3 - x_4 = \frac{1}{3} \end{cases}$$

(sistema de 3 equações a 4 incógnitas)

$$(S): \begin{cases} 3x_1 + x_2 = 10 \\ 2x_1 - 3x_2 = -8 \end{cases} \text{ ou } (S): \begin{cases} 3x + y = 10 \\ 2x - 3y = -8 \end{cases}$$

(sistema de 2 equações a 2 incógnitas)

Definição: Chama-se solução do sistema linear (S) uma n -upla $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ de números reais que satisfaz, simultaneamente, as m equações do sistema (S) .

Então, resolver o sistema (S) significa encontrar a n -upla $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, cujos elementos satisfazem simultaneamente todas as suas equações.

Exemplo: Considere o sistema linear:

$$\begin{cases} x + 2y - z = -2 \\ 2x + y + 3z = 11 \\ -x - y + z = 2 \end{cases}$$

A terna $(1, 0, 3)$ é solução deste sistema linear, pois:

$$\begin{cases} 1 + 2 \cdot 0 - 3 = -2 \\ 2 \cdot 1 + 0 + 3 \cdot 3 = 11, \\ -1 - 0 + 3 = 2 \end{cases}$$

ou seja, a terna $(1, 0, 3)$ satisfaz todas as equações. Lembrando que $x + 2y - z = -2$, $2x + y + 3z = 11$ e $-x - 2y + z = 2$ são equações de planos do $\mathbb{R}^3$, conclui-se que $(1, 0, 3)$ é o único ponto em comum desses planos, isto é, eles se interceptam nesse ponto.

1.3.2. Forma Matricial de um Sistema Linear

O sistema linear

$$S_{m \times n} : \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

pode ser escrito na forma matricial, considerando-se: uma matriz $A = (a_{ij})_{m \times n}$, com os coeficientes das equações do sistema; uma matriz coluna $X = (x_i)_{n \times 1}$, contendo as incógnitas do sistema; uma matriz coluna $B = (b_j)_{m \times 1}$, contendo os termos independentes das equações. Assim, o sistema pode ser escrito na forma $AX = B$. Observe-se que esta equação matricial está bem definida, pois o produto das matrizes indicado no primeiro membro é possível, já que o número de colunas de A é igual ao número de linhas de X e o resultado do produto é a matriz B , de dimensão $m \times 1$. Explicitando-se essa equação, vem:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

1.3.3. Classificação dos Sistemas Lineares

O sistema linear (S) pode ser impossível ou incompatível, quando não tem solução. Se (S) admite pelo menos uma solução, ele é dito possível ou compatível. Neste caso, se a solução é única, ele é possível determinado ou compatível determinado. Se tem mais de uma solução, é chamado possível indeterminado ou compatível indeterminado. O esquema seguinte resume a classificação do sistema (S) :

$$\text{Sistema linear} \Rightarrow \begin{cases} \text{incompatível ou impossível} \\ \text{(quando não tem solução)} \\ \text{compatível ou possível} \\ \text{(quando tem solução)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{determinado (solução única)} \\ \text{indeterminado (mais de uma solução)} \end{cases}$$

Para facilitar a classificação dos sistemas, é comum utilizar-se as siglas:

- sistema impossível: SI;
- sistema possível determinado: SPD;
- sistema possível indeterminado: SPI.

O sistema linear (S) é chamado homogêneo quando todas as equações têm termo independente igual a zero.

Exemplo: o sistema seguinte é homogêneo:

$$\begin{cases} 2x - 3y + 5z = 0 \\ 4x - 5y = 0 \\ 3x + \frac{1}{2}y - 7z = 0 \end{cases}$$

Todo sistema homogêneo é compatível, pois admite, pelo menos, a n -upla $(0, 0, \dots, 0)$ como solução, chamada solução trivial. Se esta solução for única, o sistema é compatível determinado. Se, além da solução trivial, admitir outra(s), é compatível indeterminado.

Dois sistemas lineares (S_1) e (S_2) são equivalentes se, e somente se, toda solução de (S_1) é também solução de (S_2) e, reciprocamente, toda solução de (S_2) é também solução de (S_1) .

Quando, em um dado sistema (S) , se efetuam as seguintes transformações elementares:

- a) permuta de duas (ou mais) equações entre si;
- b) multiplicação de todos os termos de uma equação por um número real não nulo;
- c) substituição de uma equação por outra, obtida pela soma algébrica desta equação com qualquer outra equação;
- d) substituição de uma equação por outra, obtida pela soma algébrica desta equação com um múltiplo de qualquer outra equação, obtém-se um novo sistema (S') equivalente a (S) , ou seja, ambos têm a(s) mesma(s) solução(ões).

Observações:

- 1) Observe-se que essas transformações elementares são análogas às operações elementares que foram definidas para as matrizes. Viu-se que quando uma matriz B é obtida de uma matriz A através de operações elementares com suas filas (linhas ou colunas), as matrizes A e B são equivalentes. Uma vez que os sistemas lineares podem ser escritos na forma matricial, é natural que os sistemas (S) e (S') sejam equivalentes.
- 2) Se ao se aplicar qualquer método de resolução de um sistema linear, aparecer uma (ou mais) equação do tipo $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \cdots + 0 \cdot x_n = 0$, esta(s) equação(ões) pode(m) ser eliminada(s) do sistema, pois é(são) verdadeira(s) para quaisquer valores de $x_1, x_2, \dots, x_n$. Caso apareça uma (ou mais) equação(ões) do tipo $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \cdots + 0 \cdot x_n = \alpha$, com $\alpha \neq 0$, que é(são) falsa(s) para quaisquer valores de $x_1, x_2, \dots, x_n$, conclui-se que o sistema é impossível e, portanto, não tem solução.

1.3.4. Métodos de Resolução de Sistemas Lineares

- 1) **Método da Substituição:** consiste em “isolar” uma das incógnitas em qualquer equação do sistema (S) e substituí-la nas demais, obtendo-se, assim, um novo sistema linear (S') , com uma incógnita a menos. Repete-se o processo até que se obtenha uma equação que dependa apenas de uma incógnita. A partir da determinação desta incógnita (se for possível), substitui-se seu valor nas equações que dela dependam, o que possibilita a determinação das demais incógnitas.

Exemplos:

- 1) Resolver o sistema linear abaixo, aplicando o método da substituição:

$$(S): \begin{cases} x + 2y - z = -3 \\ 2x - y + 3z = 9 \\ -x + y + 5z = 8 \end{cases}$$

O sistema (S) tem ordem 3×3 , isto é, tem três equações a três incógnitas. Pode-se, por exemplo, isolar a incógnita x na primeira equação, em função das outras duas incógnitas, e substituí-la nas demais, como segue:

$$x = -2y + z - 3 \quad (1)$$

Então, vem:

$$\begin{cases} 2(-2y + z - 3) - y + 3z = 9 \\ -(-2y + z - 3) + y + 5z = 8 \end{cases}$$

de onde se obtém o sistema (S') , de ordem 2×2 :

$$(S') : \begin{cases} -5y + 5z = 15 \\ 3y + 4z = 5 \end{cases}$$

Nesse novo sistema, escolhe-se uma das variáveis para ser isolada em função da outra; por exemplo, isolando a variável y na primeira equação e substituindo-a na segunda, vem:

$$y = z - 3 \quad (2)$$

Então, tem-se:

$$3(z - 3) + 4z = 5 \Rightarrow z = 2.$$

Substituindo-se esse valor de z na equação (2), obtém-se $y = -1$. Esses valores de y e z substituídos em (1) resulta em $x = 1$. Portanto, a única solução do sistema é $\{(1, -1, 2)\}$, ou seja, o sistema (S) é possível determinado.

Geometricamente, isso significa que $(1, -1, 2)$ é o único ponto comum aos planos de equações $x + 2y - z = -3$, $2x - y + 3z = 9$ e $-x + y + 5z = 8$.

2) Resolver o sistema linear abaixo, aplicando o método da substituição:

$$(S) : \begin{cases} 3x - y + z = 2 \\ x - y + 2z = 1 \\ x + y - 3z = 0 \end{cases}$$

Isolando-se, por exemplo, a incógnita y na primeira equação, tem-se:

$$y = 3x + z - 2 \quad (1)$$

Substituindo-a nas demais equações, obtém-se:

$$\begin{cases} x - (3x + z - 2) + 2z = 1 \\ x + (3x + z - 2) - 3z = 0 \end{cases}$$

ou seja, obtém-se o sistema (S') :

$$(S'):\begin{cases} -2x + z = -1 \\ 4x - 2z = 2 \end{cases};$$

em (S') , escolhe-se isolar a incógnita z na primeira equação, substituindo-a, em seguida, na segunda, como se segue:

$$z = 2x - 1 \tag{2}$$

$$\therefore 4x - 2(2x - 1) = 2 \Rightarrow 0 \cdot x = 0,$$

Observe-se que a equação $0 \cdot x = 0$ é verdadeira para qualquer número real x ; assim, qualquer valor de x poderá ser escolhido para se obterem os valores das outras incógnitas y e z , o que indica que o sistema admite infinitas soluções, ou seja, é possível indeterminado. Por exemplo, tomando-se $x = 2$ e substituindo esse valor na equação (2), obtém-se $z = 3$; esses dois valores, substituídos na equação (1) resultam em $y = 7$, ou seja, a terna $(2, 7, 3)$ é uma solução de (S) . Como se poderia ter escolhido qualquer valor real de x (ou seja, infinitos números reais), fica evidente que (S) tem infinitas soluções. Em situações como essa, é usual dar-se a solução geral do sistema, que é obtida procedendo-se como se segue: substitui-se a equação (2), que depende da incógnita x , na equação (1), para que y também fique escrita em função de x :

$$z = 2x - 1 \Rightarrow y = 3x + (2x - 1) - 2 \Rightarrow y = 5x - 3$$

Logo, a solução geral do sistema dado é:

$$\{y = 5x - 3; z = 2x - 1; \forall x \in \mathbb{R}\}.$$

Essa solução permite encontrar qualquer solução do sistema, atribuindo-se a x qualquer valor real e obtendo-se a partir dele, os valores de y e de z . Geometricamente, tem-se que os planos de equações $3x - y + z = 2$, $x - y + 2z = 1$ e $x + y - 3z = 0$ têm infinitos pontos em comum.

- 2) **Método de Gauss ou Método do Escalonamento:** este é um dos métodos mais utilizados na resolução de sistemas lineares e se deve a Carl Friedrich Gauss (1777-1855). Dado o sistema linear (S) , seu objetivo é encontrar um sistema equivalente (S') , “triangular”, ou seja, um

sistema cuja matriz dos coeficientes seja escalonada por linha ou “triangular superior” (observe que o termo “matriz triangular superior” é adequado somente se a matriz é quadrada; entretanto, em um abuso de linguagem, é usado mesmo para matrizes retangulares).

Sendo sistemas equivalentes, ambos terão a(s) mesma(s) solução(ões). Para tanto, faz-se uso das transformações elementares, de modo a escalar ou “triangularizar” o sistema dado. Ou seja, dado o sistema linear

$$(S): \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases},$$

obtém-se, através de operações elementares aplicadas em suas equações, o sistema equivalente (S') , dado por:

$$(S'): \begin{cases} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + c_{13}x_3 + \cdots + c_{1n}x_n = \beta_1 \\ c_{22}x_2 + c_{23}x_3 + \cdots + c_{2n}x_n = \beta_2 \\ c_{33}x_3 + \cdots + c_{3n}x_n = \beta_3 \\ \vdots \\ c_{mn}x_n = \beta_m \end{cases},$$

chamado sistema escalonado, o qual tem por matriz dos coeficientes uma matriz triangular superior:

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & \cdots & c_{1n} \\ 0 & c_{22} & c_{23} & \cdots & c_{2n} \\ 0 & 0 & c_{33} & \cdots & c_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & c_{mn} \end{pmatrix}.$$

O objetivo é de que a última equação (equação m) dependa somente da incógnita x_n , o que possibilita determinar seu valor e depois o valor das demais incógnitas, por uma “retro-substituição”, isto é, substitui-se x_n na equação anterior (equação $m-1$), obtendo-se o valor de x_{n-1} ; em seguida, substituem-se esses dois valores na equação anterior (equa-

ção $m-2$), obtendo-se o valor de x_{n-2} , e assim, sucessivamente, até que se substituem os valores das incógnitas $x_n, x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_2$ na primeira equação, obtendo-se, finalmente, o valor de x_1 . Uma forma de facilitar o trabalho de escalonamento é considerar-se o que se chama “matriz dos coeficientes aumentada”, ou seja, é tomar-se a matriz dos coeficientes das equações do sistema com uma coluna a mais, contendo os termos independentes das equações. Efetuam-se com essa matriz as transformações elementares necessárias para torná-la triangular superior; escrevem-se, então, as equações do sistema equivalente (S') obtido e calcula-se sua solução, que é a mesma do sistema (S).

Exemplos:

- 1) Resolver novamente o sistema linear (S), considerado anteriormente, através do método de Gauss:

$$(S): \begin{cases} x + 2y - z = -3 \\ 2x - y + 3z = 9 \\ -x + y + 5z = 8 \end{cases}$$

A matriz aumentada do sistema (S) é:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -3 \\ 2 & -1 & 3 & 9 \\ -1 & 1 & 5 & 8 \end{array} \right)$$

Efetuem-se, assim, as operações indicadas:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -3 \\ 2 & -1 & 3 & 9 \\ -1 & 1 & 5 & 8 \end{array} \right) \xrightarrow[\substack{-2L_1+L_2 \\ L_1+L_3}]{ } \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -3 \\ 0 & -5 & 5 & 15 \\ 0 & 3 & 4 & 5 \end{array} \right) \xrightarrow{\frac{3}{5}L_2+L_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -3 \\ 0 & -5 & 5 & 15 \\ 0 & 0 & 7 & 14 \end{array} \right)$$

Assim, o sistema (S'), equivalente a (S), é:

$$(S'): \begin{cases} x + 2y - z = -3 \\ -5y + 5z = 15 \\ 7z = 14 \end{cases}$$

Da última equação, tem-se que $z = 2$, o qual, substituído na segunda equação, permite encontrar o valor de y : $y = -1$. Esses valores de

y e z são substituídos na primeira equação, de onde se conclui que $x = 1$. Portanto, o sistema admite a terna $(1, -1, 2)$ como solução única, já obtida anteriormente, pelo método da substituição.

2) Resolver o sistema aplicando o método do escalonamento

$$(S): \begin{cases} 2x + 3y - z = 5 \\ -x + y + 2z = -3 \\ x + 4y + z = 8 \end{cases}$$

A matriz aumentada do sistema é:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 5 \\ -1 & 1 & 2 & -3 \\ 1 & 4 & 1 & 8 \end{array} \right).$$

Trocamos a primeira e a terceira linhas da matriz, para que o primeiro elemento seja igual a 1, com o objetivo de facilitar os cálculos:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & 8 \\ -1 & 1 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & -1 & 5 \end{array} \right);$$

Efetuem-se, então, as operações elementares necessárias para triangularizar a matriz, conforme indicado:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & 8 \\ -1 & 1 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & -1 & 5 \end{array} \right) \xrightarrow[\substack{L_1+L_2 \\ -2L_1+L_3}]{L_1+L_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & 8 \\ 0 & 5 & 3 & 5 \\ 0 & -5 & -3 & -11 \end{array} \right) \xrightarrow{L_2+L_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & 8 \\ 0 & 5 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{array} \right)$$

Portanto, o sistema triangular equivalente (S') é:

$$(S'): \begin{cases} x + 4y + z = 8 \\ 5y + 3z = 5 \\ 0z = -6 \end{cases}$$

Verifica-se que a última equação de (S') é: $0 \cdot x + 0 \cdot y + 0 \cdot z = -6$, a qual não é satisfeita para nenhum valor de z , o que significa que o

sistema não tem solução. Se (S') é impossível, então (S) também o é. Isso significa que os planos de equações $2x + 3y - z = 5$, $-x + y + 2z = -3$ e $x + 4y + z = 8$ não têm pontos em comum.

- 3) Resolver os sistemas lineares homogêneos, aplicando o método indicado:

$$\text{a) } (S): \begin{cases} x + 2y - 3z = 0 \\ 2x + y - 2z = 0 \\ 3x + 3y + z = 0 \end{cases}, \text{ pelo método da substituição.}$$

$$\text{b) } (S): \begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ 2x - y - 2z = 0 \\ 4x + 3y = 0 \end{cases}, \text{ pelo método de Gauss.}$$

- a) Da primeira equação, tem-se:

$$x = -2y + 3z \quad (1)$$

Substituindo este valor de x nas outras duas equações, vem:

$$\begin{cases} 2(-2y + 3z) + y - 2z = 0 \\ 3(-2y + 3z) + 3y + z = 0 \end{cases},$$

Isto é, obtém-se o sistema linear (S') , com duas equações e duas incógnitas:

$$(S'): \begin{cases} -3y + 4z = 0 \\ -3y + 10z = 0 \end{cases}.$$

Da primeira equação de (S') , vem:

$$-3y = -4z \quad (2)$$

Substituindo na segunda, tem-se:

$$-4z + 10z = 0 \Rightarrow 6z = 0 \Rightarrow z = 0$$

Fazendo $z = 0$ em (2), obtém-se $y = 0$. Substituindo-se os valores $y = 0$ e $z = 0$ em (1), obtém-se $x = 0$. Portanto, a única solução do sistema é a trivial: $\{(0, 0, 0)\}$, isto é, o sistema é possível

determinado, ou seja, $(0,0,0)$ é o único ponto comum dos planos de equações $x + 2y - 3z = 0$, $2x + y - 2z = 0$ e $3x + 3y + z = 0$.

- b) Como visto anteriormente, é conveniente trabalhar com a matriz dos coeficientes aumentada; entretanto, como os termos independentes são todos nulos, a última coluna será sempre de zeros e, portanto, pode-se optar por não utilizá-la, isto é, pode-se trabalhar apenas com a matriz dos coeficientes das equações do sistema e realizar as operações elementares convenientes para torná-la triangular superior, como se segue:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 4 & 3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{-2L_1+L_2 \\ -4L_1+L_3}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & -4 \\ 0 & -5 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{-1L_2+L_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Observe-se que a última linha contém somente elementos nulos, ou seja, o sistema (S') , equivalente a (S) é:

$$(S') : \begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ 0x - 5y - 4z = 0; \\ 0x + 0y + 0z = 0 \end{cases}$$

conforme observado anteriormente, a última linha pode ser retirada e obtém-se, então:

$$(S') : \begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ -5y - 4z = 0 \end{cases}.$$

O fato de haver três incógnitas e apenas duas equações já indica que o sistema terá mais de uma solução, ou seja, é indeterminado. De fato, da segunda equação de (S') , tem-se:

$$y = -\frac{4}{5}z$$

Substituindo na primeira equação, obtém-se:

$$x + 2\left(-\frac{4}{5}z\right) + z = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{5}z.$$

Vê-se, portanto, que as incógnitas x e y dependem da incógnita z . Por exemplo, tomando-se $z = 0$, obtém-se a solução trivial $(0, 0, 0)$. Entretanto, ela não é única, uma vez que z pode assumir qualquer valor real; ou seja, o sistema tem infinitas soluções. Se z assume o valor 5, por exemplo, obtém-se uma nova solução: $(3, -4, 5)$.

A solução geral do sistema é dada por:

$$\left\{ x = \frac{3}{5}z; y = -\frac{4}{5}z, \forall z \in \mathbb{R} \right\}.$$

Uma vez que o sistema tem infinitas soluções, conclui-se que os planos de equações $x + 2y + z = 0$, $2x - y - 2z = 0$ e $4x + 3y = 0$ têm infinitos pontos em comum.

- 4) O diretor de uma empresa, o Sr. Antonio, convocou todos os seus funcionários para uma reunião. Com a chegada do Sr. Antonio à sala de reuniões, o número de homens presentes na sala ficou quatro vezes maior que o número de mulheres também presentes na sala. Se o Sr. Antonio não fosse à reunião e enviasse sua secretária, o número de mulheres ficaria a terça parte do número de homens. Determinar a quantidade de pessoas presentes na sala aguardando o diretor.

Sejam: H e M , respectivamente, a quantidade de homens e de mulheres que estavam na sala de reuniões à espera do Sr. Antonio. Para que seja possível resolver o problema, tentar-se-á “equacioná-lo”, ou seja, tentar-se-á “traduzir” cada informação dada no enunciado do problema na forma de uma sentença matemática, ou mais explicitamente, na forma de uma equação.

Assim, a frase: “Com a chegada do Dr. Antonio à sala de reuniões, o número de homens presentes na sala ficou quatro vezes maior que o número de mulheres também presentes na sala” pode ser “traduzida” ou “interpretada” matematicamente por:

$$H + 1 = 4M. \quad (1)$$

A frase: “Se o Dr. Antonio não fosse à reunião e enviasse sua secretária, o número de mulheres ficaria a terça parte do número de homens” pode ser “traduzida” ou “interpretada” matematicamente por:

$$M + 1 = \frac{1}{3}H. \quad (2)$$

Por outro lado, “Determinar a quantidade de pessoas presentes na sala aguardando o diretor”, matematicamente, significa determinar o valor de $M + H$.

Considerando-se as equações (1) e (2), pode-se escrever um sistema linear com duas equações e duas variáveis (ou incógnitas):

$$(S): \begin{cases} H + 1 = 4M \\ M + 1 = \frac{1}{3}H \end{cases},$$

que pode ser resolvido por qualquer método visto anteriormente. Resolvendo-o pelo método da substituição de variáveis, vem:

Da primeira equação, tem-se que $H = 4M - 1$; substituindo na 2ª equação, obtém-se:

$$M + 1 = \frac{1}{3}(4M - 1) \Rightarrow 3M + 3 = 4M - 1 \Rightarrow M = 4 \quad \therefore H = 4 \cdot 4 - 1 = 15$$

Conclui-se, assim, que havia 4 mulheres e 15 homens na sala de reuniões e, portanto, no número total de pessoas que estavam à espera do Sr. Antonio era de 19.

- 5) Em uma mesa de uma lanchonete, o consumo de 3 sanduíches, 7 refrigerantes e um pedaço de torta totalizou R\$31,50. Em outra mesa, o consumo de 4 sanduíches, 10 refrigerantes e um pedaço de torta totalizou R\$42,00. Quanto gastará uma pessoa que consuma um sanduíche, um refrigerante e um pedaço de torta?

Com o objetivo de “equacionar” o problema, introduzir-se-ão “variáveis” ou “incógnitas” no problema: representar-se-á o preço de um sanduíche por s , o de um refrigerante por r e o de uma torta por t . Interpretam-se, agora, matematicamente, as informações dadas no enunciado do problema, como segue:

“3 sanduíches, 7 refrigerantes e 1 pedaço de torta totalizou R\$ 31,50”:

$$3s + 7r + t = 31,50;$$

“4 sanduíches, 10 refrigerantes e 1 pedaço de torta totalizou R\$ 42,00”:

$$4s + 10r + t = 42,00;$$

“Quanto gastará uma pessoa que consuma um sanduíche, um refrigerante e um pedaço de torta?” significa: qual é o valor de $s + r + t$?

Denotando-se esse valor procurado por x , tem-se a equação $s + r + t = x$.

A solução deste problema é a solução de um sistema linear (S), com três equações e três incógnitas:

$$(S): \begin{cases} s + r + t = x \\ 3s + 7r + t = 31,50, \\ 4s + 10r + t = 42,00 \end{cases}$$

o qual será resolvido pelo método de Gauss. Para tanto, trabalha-se com a matriz aumentada do sistema, efetuando-se operações elementares com suas linhas, com o objetivo de escalonar o sistema, como segue:

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & x \\ 3 & 7 & 1 & 31,5 \\ 4 & 10 & 1 & 42,0 \end{array} \right) \xrightarrow{\begin{matrix} -3L_1+L_2 \\ -4L_1+L_3 \end{matrix}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & x \\ 0 & 4 & -2 & -3x+31,5 \\ 0 & 6 & -3 & -4x+42,0 \end{array} \right) \xrightarrow{\begin{matrix} \frac{1}{2}L_2 \\ \frac{1}{3}L_3 \end{matrix}} \\ & \xrightarrow{\begin{matrix} \frac{1}{2}L_2 \\ \frac{1}{3}L_3 \end{matrix}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & x \\ 0 & 2 & -1 & \frac{-3x+31,5}{2} \\ 0 & 2 & -1 & \frac{-4x+42,0}{3} \end{array} \right) \xrightarrow{-L_2+L_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & x \\ 0 & 2 & -1 & \frac{-3x+31,5}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3x-31,5}{2} + \frac{-4x+42,0}{3} \end{array} \right) \end{aligned}$$

Portanto, o sistema (S'), equivalente a (S) é:

$$\begin{cases} 1 \cdot s + 1 \cdot r + 1 \cdot t = x \\ 0 \cdot s + 2 \cdot r + (-1) \cdot t = \frac{-3x+31,5}{2} \\ 0 \cdot s + 0 \cdot r + 0 \cdot t = \frac{-4x+42,0}{3} + \frac{3x-31,5}{2} \end{cases}.$$

Da última equação vem:

$$2(-4x + 42,0) + 3(3x - 31,5) = 0 \Rightarrow -8x + 84,00 + 9x - 94,50 = 0 \Rightarrow x = 10,5,$$

ou seja,

$$s + r + t = 10,5.$$

Portanto, uma pessoa que consuma um sanduíche, um refrigerante e um pedaço de torta gastará R\$10,50.

1.3.5. Aplicação dos Métodos de Resolução de Sistemas Lineares na Determinação da Inversa de uma Matriz

Dada a matriz A , de ordem n , procura-se uma matriz quadrada M tal que o produto de A por M seja igual à matriz identidade de ordem n . Para que se determinem os $n \cdot n$ elementos de M , escreve-se a equação matricial $A \cdot M = Id_n$ e resolve-se o sistema linear resultante dela. Se o sistema for possível determinado, isto é, se o sistema tem apenas uma solução, então a matriz M é a matriz inversa de A , ou seja, $M = A^{-1}$. Caso o sistema seja impossível ou possível indeterminado, conclui-se que A não admite inversa, ou seja, A não é inversível.

Exemplo: Sejam $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Determinar, se houver, a inversa de cada uma delas.

Seja $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Para que M seja a matriz inversa de A , deve-se ter

$A \cdot M = Id_2$. Então, vem:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a+3c & b+3d \\ 2a+4c & 2b+4d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+3c=1 \\ 2a+4c=0 \end{cases} \text{ e } \begin{cases} b+3d=0 \\ 2b+4d=1 \end{cases}$$

Resolvendo os sistemas lineares, obtém-se a solução:

$$\begin{cases} a = -2 \\ b = \frac{3}{2} \\ c = 1 \\ d = -\frac{1}{2} \end{cases};$$

assim, conclui-se que a matriz A é inversível e sua inversa é a matriz

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & \frac{3}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Para determinar a inversa da matriz B , considere-se a matriz

$$N = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}. \text{ Tem-se, assim, a equação matricial } B \cdot N = Id_3, \text{ ou seja:}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

ou seja,

$$\begin{pmatrix} 1 \cdot a + 2 \cdot d + 0 \cdot g & 1 \cdot b + 2 \cdot e + 0 \cdot h & 1 \cdot c + 2 \cdot f + 0 \cdot i \\ 3 \cdot a + 2 \cdot d + 1 \cdot g & 3 \cdot b + 2 \cdot e + 1 \cdot h & 3 \cdot c + 2 \cdot f + 1 \cdot i \\ 2 \cdot a + 1 \cdot d + 1 \cdot g & 2 \cdot b + 1 \cdot e + 1 \cdot h & 2 \cdot c + 1 \cdot f + 1 \cdot i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

de onde resultam os sistemas lineares:

$$\begin{cases} a + 2d = 1 \\ 3a + 2d + g = 0 \\ 2a + d + g = 0 \end{cases} \text{ e } \begin{cases} b + 2e = 0 \\ 3b + 2e + h = 1 \\ 2b + e + h = 0 \end{cases} \text{ e } \begin{cases} c + 2f = 0 \\ 3c + 2f + i = 0 \\ 2c + f + i = 1 \end{cases}$$

Resolvendo os três sistemas lineares, obtém-se:

$$\begin{cases} a = -1; b = 2; c = -2; \\ d = 1; e = -1; f = 1; \\ g = 1; h = -3; i = 4 \end{cases},$$

e, portanto, a inversa de B é a matriz

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 4 \end{pmatrix}.$$

1.3.6. Matrizes Semelhantes

Definição: Sejam A e B duas matrizes quadradas de ordem n . Diz-se que A é semelhante a B se existe uma matriz quadrada P , de ordem n , não singular, tal que $A = P^{-1} \cdot B \cdot P$.

Exemplo: verificar se as matrizes A e B são semelhantes, nos seguintes casos:

a) $A = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$

b) $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$

- a) Para que A e B sejam semelhantes, deve existir uma matriz P não singular, de mesma ordem dessas duas matrizes, tal que $A = P^{-1}BP$.

Considere-se a matriz não singular

$$P = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Se P é não singular, então existe sua inversa P^{-1} . Verificar-se-á se é possível encontrar os coeficientes a, b, c e d de tal forma que seja verdadeira a igualdade $A = P^{-1}BP$. Com esse objetivo, multiplicam-se ambos os membros da expressão $A = P^{-1}BP$, à esquerda, pela matriz P , vem:

$$PA = PP^{-1}BP,$$

isto é,

$$PA = IdBP,$$

ou seja,

$$PA = BP.$$

Então:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},$$

de onde se segue que:

$$\begin{bmatrix} -3a & 2b \\ -3c & 2d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4a - c & -4b - d \\ 6a + 3c & 6b + 3d \end{bmatrix}.$$

Da igualdade de matrizes, resultam dois sistemas lineares:

$$\begin{cases} -3a = -4a - c \Rightarrow a = -c \\ -3c = 6a + 3c \Rightarrow 0 = 0 \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} 2b = -4b - d \Rightarrow d = -6b \\ 2d = 6b + 3d \Rightarrow 0 = 0 \end{cases}.$$

Vê-se, assim, que os sistemas são indeterminados e suas soluções gerais são:

$$a = -c \text{ e } d = -6b, \forall c, b \in \mathfrak{R}, \text{ com } b \neq 0 \text{ e } c \neq 0.$$

Logo, a matriz P existe e se escreve na forma:

$$P = \begin{bmatrix} -c & b \\ c & -6b \end{bmatrix}.$$

Em particular, para $b = 1$ e $c = 1$, segue que $P = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -6 \end{bmatrix}$, a qual é não singular, pois $\det(P) = 5 \neq 0$.

$$\text{Então, } P^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{6}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix}.$$

Observe-se que as matrizes P e P^{-1} obtidas tornam verdadeira a igualdade $A = P^{-1}BP$:

$$P^{-1}BP = \begin{bmatrix} -\frac{6}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{18}{5} & \frac{3}{5} \\ -\frac{2}{5} & -\frac{2}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = A$$

Ressalte-se que b e c podem assumir quaisquer valores reais, desde que sejam não nulos. Se, por exemplo, considerar-se $b=0$ e $c=1$, obtém-se

a matriz $P = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, cujo determinante é nulo e, portanto, é singular,

o que acarreta que não admite inversa. Assim, podem-se obter infinitas matrizes inversíveis P , desde que se tomem valores não nulos para b e c .

b) Sendo as matrizes dadas de ordem 3, considera-se a matriz não singular

$$P = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}.$$

Verificar-se-á se é possível encontrar os coeficientes dessa matriz, de tal forma que seja verdadeira a igualdade $A = P^{-1}BP$. Assim, multipliquem-se ambos os membros da expressão $A = P^{-1}BP$, à esquerda, pela matriz P , obtendo-se:

$$PA = PP^{-1}BP,$$

isto é,

$$PA = BP.$$

Então:

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2a & b & 6c \\ 2d & e & 6f \\ 2g & h & 6i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a+d & 2b+e & 2c+f \\ d-g & e-h & f-i \\ 2d+4g & 2e+4h & 2f+4i \end{bmatrix}.$$

Da igualdade das matrizes resultam três sistemas lineares, indicados e resolvidos a seguir:

$$\begin{cases} 2a = 2a + d \Rightarrow d = 0, \forall a \in \mathfrak{R} \\ 2d = d - g \Rightarrow g = 0 \\ 2g = 2d + 4g \Rightarrow 0 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = 2b + e \Rightarrow b = 0 \\ e = e - h \Rightarrow h = 0 \\ h = 2e + 4h \Rightarrow e = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6c = 2c + f \Rightarrow c = 0 \\ 6f = f - i \Rightarrow f = 0 \\ 6i = 2f + 4i \Rightarrow i = 0 \end{cases}$$

Portanto, a matriz P fica escrita na forma:

$$P = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

sendo $\det(P) = 0$, segue-se que P é singular, qualquer que seja o valor do coeficiente a que se tome. Logo, não existe uma matriz não singular P tal que $A = P^{-1}BP$ e, portanto, A e B não são matrizes semelhantes.

Observação: o fato de uma matriz A ser semelhante a uma matriz B está diretamente associado ao fato da matriz B admitir uma representação através de uma matriz diagonal, no caso, a matriz A , conforme a seguinte definição:

Definição: Uma matriz quadrada B de ordem n é diagonalizável se existe uma matriz não singular P tal que $A = P^{-1}BP$ é uma matriz diagonal.

Observação: a definição acima diz que a matriz B é diagonalizável se existe uma matriz diagonal A semelhante a ela. Uma vez que, a partir da matriz B , através de alguns procedimentos, obtém-se a matriz diagonal A , diz-se, por abuso de linguagem, que a matriz A é a matriz B que foi diagonalizada.

Exemplos:

- 1) Considerem-se as matrizes $A = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$ do item (a) do exemplo anterior. Mostrou-se que elas são semelhantes, isto é, que

$A = P^{-1}BP$. Sendo a matriz A diagonal, conclui-se que a matriz B é diagonalizável e que a A é a sua representação diagonal.

2) Mostrou-se, no item (b) do exemplo anterior, que as matrizes $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$

e $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ não são semelhantes, isto é, não existe uma matriz

inversível P tal que $A = P^{-1}BP$. Assim, conclui-se que B não é diagonalizável, isto é, não admite uma representação diagonal.

O leitor poderia então questionar: “será que não existe outra matriz diagonal, diferente da matriz A , que seja a representação diagonal da matriz B ?”. Mostrar-se-á que não. Para isso, suponha-se que exista uma matriz

$C = \begin{bmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & z \end{bmatrix}$ que seja a representação diagonal da matriz B , ou seja,

suponha-se que B seja diagonalizável. Então, por definição, deve existir uma matriz não singular P , tal que $C = P^{-1}BP$, ou, equivalentemente, $PC = BP$. Então:

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix},$$

ou seja,

$$\begin{bmatrix} ax & by & cz \\ dx & ey & fz \\ gx & hy & iz \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a+d & 2b+e & 2c+f \\ d-g & e-h & f-i \\ 2d+4g & 2e+4h & 2f+4i \end{bmatrix}.$$

Da igualdade entre matrizes, obtêm-se os sistemas lineares:

$$(S_1): \begin{cases} ax = 2a + d \\ dx = d - g \\ gx = 2d + 4g \end{cases}$$

$$(S_2): \begin{cases} by = 2b + e \\ ey = e - h \\ hy = 2e + 4h \end{cases}$$

$$(S_3): \begin{cases} cz = 2c + f \\ fz = f - i \\ iz = 2f + 4i \end{cases}$$

No sistema (S_1) deve-se ter $x \neq 0$, pois, se $x = 0$, esse sistema ficaria escrito na forma:

$$(S_1): \begin{cases} a \cdot 0 = 2a + d \\ d \cdot 0 = d - g \\ g \cdot 0 = 2d + 4g \end{cases},$$

isto é,

$$\begin{cases} 0 = 2a + d \\ 0 = d - g \\ 0 = 2d + 4g \end{cases}.$$

Da primeira equação, ter-se-ia que $a = -\frac{1}{2}d$ e, da segunda, $d = g$, a qual, substituída na terceira equação, resultaria que $0 = 2g + 4g$, ou seja, $g = 0$. Então, ter-se-ia $a = d = g = 0$, o que implicaria que P seria singular, pois seu determinante seria nulo. Portanto, tem-se que $x \neq 0$. Como os sistemas (S_1) , (S_2) e (S_3) são equivalentes, então deve-se ter $y \neq 0$ e $z \neq 0$.

Da primeira equação do sistema (S_1) , tem-se que $a = \frac{d}{x-2}$, para todo $x \neq 2$, e, da segunda equação, tem-se $d = \frac{g}{1-x}$, para todo $x \neq 1$. Substituindo-se esta última expressão na terceira equação, obtém-se:

$$gx = 2\left(\frac{g}{1-x}\right) + 4g,$$

de onde vem que:

$$gx(1-x) = 2g + 4(1-x)g,$$

ou seja,

$$(x - x^2)g - 2g - (4 - 4x)g = 0,$$

de onde se segue que

$$g(-x^2 + 5x - 6) = 0.$$

Assim, conclui-se que $g = 0$ ou $-x^2 + 5x - 6 = 0$.

Conforme se analisou anteriormente, deve-se ter $g \neq 0$. Então, segue-se que $-x^2 + 5x - 6 = 0$, isto é, $x = 2$ ou $x = 3$. Uma vez que x deve ser diferente de 2, conclui-se que $x = 3$, o que acarreta que $a = d$ e $g = -2d$, sendo d um número real não nulo. Como os sistemas lineares (S_2) e (S_3) são equivalentes, resolvendo-os, segue-se que:

- em (S_2) : $b = e$ e $h = -2e$, sendo e um número real não nulo;
- em (S_3) : $c = f$ e $i = -2f$, sendo f um número real não nulo.

Logo, a matriz considerada $P = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$ tem a seguinte forma:

$$P = \begin{bmatrix} d & e & f \\ d & e & f \\ -2d & -2e & -2f \end{bmatrix}.$$

Como as filas (linhas ou colunas) da matriz P são proporcionais, então $\det(P) = 0$, ou seja, P é uma matriz singular. Conclui-se, assim, que não existe P não singular tal que $C = P^{-1}BP$, isto é, a matriz B não é diagonalizável.

Observações:

1) Considerem-se as matrizes A e B , nos seguintes casos:

$$\text{a) } A = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\text{b) } A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

c) $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 3 & 0 & -3 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 6 & -18 \end{bmatrix}$

- a) Já se mostrou que as matrizes do primeiro item são semelhantes; entretanto, elas são também equivalentes, pois, a partir da matriz B é possível obter-se a matriz A através de uma sequência finita de operações elementares, como segue:

$$B = \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{3}{4}L_1} \begin{bmatrix} -3 & -\frac{3}{4} \\ 6 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{2L_1+L_2} \begin{bmatrix} -3 & -\frac{3}{4} \\ 0 & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{4}L_2+L_1} \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = A.$$

As matrizes A e B são semelhantes porque B é diagonalizável e são equivalentes porque têm as mesmas propriedades. Por exemplo: $\det(A) = \det(B) = -6$.

- b) Como se viu anteriormente, as matrizes A e B não são semelhantes, mas são equivalentes, pois:

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{-2L_2+L_3} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{6}L_3+L_2} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow{-L_2+L_1} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} = A.$$

Elas não são semelhantes porque B não é diagonalizável, mas são equivalentes porque têm as mesmas propriedades. Por exemplo: $\det(A) = \det(B) = 12$.

- c) Observe-se que as matrizes A e B têm dimensão 2×3 , ou seja, não são quadradas. Para que seja possível o produto PA , a matriz P deve ser de dimensão 2×2 e, para que seja possível o produto BP , a matriz P deve ser de dimensão 3×3 . Conclui-se, assim, que não existe uma matriz não singular P tal que $A = P^{-1}BP$, isto é, $PA = BP$. Assim, as matrizes A e B não são semelhantes e não podem ser diagonalizadas. No entanto, as matrizes A e B são equivalentes, conforme já se mostrou em exemplo do item 1.1.5. *Matrizes Equivalentes* e mostra-se novamente abaixo:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{-3L_1+L_2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & 6 & -18 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{3}L_2+L_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 6 & -18 \end{pmatrix} = B.$$

Sendo equivalentes, elas têm as mesmas propriedades. Por exemplo: apesar de não serem quadradas, vê-se que os determinantes das submatrizes quadradas correspondentes de cada uma delas são iguais:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} = 6; \quad \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -18 \end{vmatrix} = -18; \quad \begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 6 & -18 \end{vmatrix} = 6.$$

- 2) A questão de saber se uma matriz A é diagonalizável ou não, isto é, de saber se A é ou não semelhante a uma matriz diagonal B , desempenha um papel importante na Álgebra Linear. No Capítulo 9, será introduzido um método para a determinação da matriz não singular P tal que $A = P^{-1}BP$.

1.4. EXERCÍCIOS PROPOSTOS

- 1) Sejam $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 4 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Determinar a matriz X tal que $X + 2C = A^2(B - 3C)$. R.: $X = \begin{pmatrix} -5 & -8 & -1 \\ -9 & 7 & -1 \end{pmatrix}$

- 2) Determinar, se for possível, a matriz inversa das matrizes dadas.

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}$ R.: $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{1}{2} \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$

b) $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & -2 \\ -1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ R.: $B^{-1} = \begin{pmatrix} 9 & -3 & 11 \\ -8 & 3 & -10 \\ -3 & 1 & -4 \end{pmatrix}$

- 3) Dadas as matrizes $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$:

a) determinar $\det[(AB)^t]^{-1}$. R.: $\frac{1}{5}$

b) mostrar que $\det \left[(AB)^t \right]^{-1} = \frac{1}{\det(A)\det(B)}$, com $\det(A) \neq 0$ e $\det(B) \neq 0$.

4) Considerem-se as matrizes: $A = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ e $D = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.

Sabendo-se que $AB + C = ADA^{-1}$, determinar o valor de $\det(B)$.

$$\text{R.: } \det(B) = -172$$

5) Classificar e resolver os sistemas lineares;

$$\text{a) } \begin{cases} 2x - 3y + z = -7 \\ x + 2y + 2z = 4 \\ 7x - y + 5z = 1 \end{cases} \quad \text{R: SPD; } \{(2, 3, -2)\}$$

$$\text{b) } \begin{cases} 2x + 2y + z = 2 \\ -x + 5y - 2z = 1 \\ x + 19y - 4z = 7 \end{cases} \quad \text{R: SPI; } \left\{ x = -\frac{9y-5}{3}; z = \frac{12y-4}{3}; \forall z \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\text{c) } \begin{cases} x + 6y + 4z = -2 \\ 3x - 2y + 4z = 0 \\ -x + 14y + 4z = 5 \end{cases} \quad \text{R: SI}$$

6) Se Amélia der R\$3,00 a Lúcia, então ambas ficarão com a mesma quantia. Se Amélia perder a metade do que tem, ficará com uma quantia igual a um terço do que tem Maria. Se Maria der um terço do que tem a Lúcia, então esta ficará com R\$6,00 a mais que Amélia. Quanto possuem Amélia, Lúcia e Maria?

$$\text{R: Amélia: R\$18,00; Lúcia: R\$15,00; Maria: R\$27,00}$$

2

ESPAÇOS VETORIAIS

2.1. HISTÓRICO

Sabe-se que, até pelo menos o final do século XIX, não havia nenhuma teoria ou conjunto de regras bem definidas a que se pudesse dar o nome de Álgebra Linear. Havia apenas certa intuição por parte de alguns matemáticos, especialmente nos séculos XVII e XVIII, que perceberam que deveria existir alguma forma de conexão da Álgebra com a Geometria.

O surgimento da Álgebra Linear, como é conhecida atualmente, teve grande contribuição dos matemáticos Carl Friedrich Gauss (1777-1855), William Rowan Hamilton (1805-1865) e Arthur Cayley (1821-1895), que perceberam que as operações de adição (indicada por $+$) e de multiplicação (indicada por $\cdot$), ditas “usuais”, quando aplicadas a determinados conjuntos numéricos, não satisfaziam determinadas propriedades. Foi o consequente estudo dessas operações aplicadas aos vetores que culminou em uma série de regras, que formaram as bases da Análise Vetorial, que, por sua vez, é a base do que atualmente se conhece como Álgebra Linear.

2.2. CORPO

Definição: Um conjunto não vazio K , munido das operações de adição (indicada por $+$) e de multiplicação (indicada por $\cdot$) é um corpo em relação a estas operações, se satisfaz os seguintes axiomas:

(A) em relação à adição:

(A₁) quaisquer que sejam x e y em K , tem-se: $x + y \in K$

(isto significa que o conjunto K é fechado em relação à operação de adição)

(A₂) quaisquer que sejam x e y em K , tem-se: $x + y = y + x$

(propriedade comutativa)

- (A₃) quaisquer que sejam x, y e z em K , tem-se: $x + (y + z) = (x + y) + z$
(propriedade associativa)
- (A₄) para todo x em K , existe em K um elemento x^* tal que:
 $x + x^* = x^* + x = x$
(existência do elemento neutro)
- (A₅) para todo elemento x em K , existe em K um elemento x' tal que:
 $x + x' = x' + x = x^*$
(existência do elemento oposto ou simétrico)
- (M) em relação à multiplicação:
- (M₁) quaisquer que sejam x e y em K , tem-se: $x \cdot y \in K$
(isto significa que o conjunto K é fechado em relação à operação de multiplicação)
- (M₂) quaisquer que sejam x e y em K , tem-se: $x \cdot y = y \cdot x$
(propriedade comutativa)
- (M₃) quaisquer que sejam x, y e z em K , tem-se: $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$
(propriedade associativa)
- (M₄) para todo x em K , existe em K um elemento $\hat{x}$ tal que: $x \cdot \hat{x} = \hat{x} \cdot x = x$
(existência do elemento neutro)
- (M₅) para todo elemento não nulo x em K , existe em K um elemento $\tilde{x}$ tal que $x \cdot \tilde{x} = \tilde{x} \cdot x = \hat{x}$
(existência do elemento inverso)
- (D) propriedades distributivas da multiplicação em relação à adição:
para quaisquer x, y e z em K , tem-se: $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$ e
 $(y + z) \cdot x = y \cdot x + z \cdot x$.

Observações:

- 1) Para indicar o corpo K com as operações nele definidas, usa-se a notação: $(K, +, \cdot)$. Por abuso de linguagem, é comum falar-se apenas em “corpo K ”. É usual omitir-se o sinal de “.” para a operação de multiplicação, sempre que não houver possibilidade de confusão.
- 2) É possível dar-se uma definição mais geral de corpo, sem exigir que a multiplicação seja necessariamente comutativa. Nesse caso, a definição anterior dá o conceito de “corpo comutativo”.

Exemplos:

1) São corpos:

- a) $(\mathbb{R}, +, \cdot)$: conjunto dos números reais, com as operações usuais de adição e multiplicação.

Para demonstrar essa afirmação, é preciso mostrar que se verificam os axiomas da definição de corpo. Tem-se:

(A) em relação à adição:

(A₁) para quaisquer números reais x e y que se considere, a soma $x + y$ é ainda um número real. Logo, é satisfeito o axioma do fechamento em relação à operação de adição, isto é: quaisquer que sejam x e y em $\mathbb{R}$, tem-se que $x + y \in \mathbb{R}$;

(A₂) dados dois números reais quaisquer x e y , tem-se que $x + y = y + x$ e, portanto, é satisfeito o axioma da comutatividade da operação de adição de números reais;

(A₃) tomando-se números reais x , y e z quaisquer, tem-se que $x + (y + z) = (x + y) + z$ e, portanto, a operação de adição é associativa;

(A₄) é preciso mostrar que, considerando-se qualquer número real x , existe um número real x^* tal que $x + x^* = x^* + x = x$. No caso da adição de números reais, esse número x^* é o número real 0, pois: $x + 0 = 0 + x = x$. Assim, existe o elemento neutro para a operação de adição de números reais e esse elemento neutro é o número real 0;

(A₅) para demonstrar que esse axioma é verdadeiro, deve-se encontrar, para todo número real x que se considere, um número real x' tal que $x + x' = x' + x = 0$ (isto é, somando-se x com x' , o resultado deve ser igual a 0, que é o elemento neutro da adição).

Dado um número real x , tem-se que: $x + (-x) = (-x) + x = 0$, ou seja, para cada elemento x , existe seu elemento oposto, que é $-x$; conclui-se, assim, que é verdadeiro esse axioma;

(M) em relação à multiplicação:

(M_1) para quaisquer números reais x e y que se considere, o produto $x \cdot y$ é ainda um número real. Logo, é satisfeito o axioma do fechamento em relação à operação de multiplicação, isto é: quaisquer que sejam x e y em $\mathfrak{R}$, tem-se que $x \cdot y \in \mathfrak{R}$;

(M_2) dados dois números reais quaisquer x e y , tem-se que $x \cdot y = y \cdot x$ e, portanto, é satisfeito o axioma da comutatividade da operação de multiplicação de números reais;

(M_3) tomando-se números reais x , y e z quaisquer, tem-se que $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$; assim, a operação de multiplicação é associativa;

(M_4) é preciso mostrar que, considerando-se qualquer número real x , existe um número real $\hat{x}$ tal que $x \cdot \hat{x} = \hat{x} \cdot x = x$.

No caso da multiplicação de números reais, esse número $\hat{x}$ é o número real 1, pois: $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$. Assim, existe o elemento neutro para a operação de multiplicação de números reais e esse elemento neutro é o número real 1;

(M_5) considerando-se um número real não nulo x , deve-se encontrar um número real $\tilde{x}$ tal que $x \cdot \tilde{x} = \tilde{x} \cdot x = 1$ (isto é, multiplicando-se x por $\tilde{x}$, o resultado deve ser igual a 1, que é o elemento neutro da multiplicação).

Dado um número real $x \neq 0$, tem-se que: $x \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x} \cdot x = 1$, ou seja, para cada elemento não nulo x , existe seu elemento inverso, que é $\frac{1}{x}$; conclui-se, assim, que é verdadeiro esse axioma. Esse elemento também pode ser indicado por x^{-1} ;

(D) considerando-se números reais quaisquer x , y e z , tem-se:
 $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$ e $(y + z) \cdot x = y \cdot x + z \cdot x$.

Assim, valem as propriedades distributivas da multiplicação em relação à adição de números reais. Logo, o conjunto dos números reais, com as operações usuais de adição e multiplicação, é um corpo.

b) $(C, +, \cdot)$: conjunto dos números complexos, com as operações usuais de adição e multiplicação.

- c) $(Q, +, \cdot)$: conjunto dos números racionais, com as operações usuais de adição e multiplicação.

Observação: com procedimento análogo ao do item (a), é possível mostrar que $(C, +, \cdot)$ e $(Q, +, \cdot)$ são corpos.

2) Não são corpos:

- a) $(Z, +, \cdot)$: conjunto dos números inteiros, com as operações usuais de adição e multiplicação.

De fato, sabe-se que o elemento neutro da multiplicação para o conjunto Z é 1, pois, para todo número inteiro z , tem-se: $z \cdot 1 = 1 \cdot z = z$. Observe-se que, neste conjunto, não é satisfeito o axioma (M_5) , pois, qualquer que seja o número inteiro z , com $z \neq 0$ e $z \neq 1$, não existe em Z um elemento $\tilde{z}$ tal que $z \cdot \tilde{z} = \tilde{z} \cdot z = 1$, ou seja, não existe o elemento inverso de z (é evidente que, para que este axioma fosse verdadeiro, se deveria ter $\tilde{z} = \frac{1}{z}$, pois: $z \cdot \frac{1}{z} = \frac{1}{z} \cdot z = 1$; entretanto, qualquer que seja $z \neq 0$ e $z \neq 1$, $\frac{1}{z}$ não pertence a Z).

- b) $(N, +, \cdot)$: conjunto dos números naturais, com as operações usuais de adição e multiplicação.

De modo análogo ao que se descreveu no item (a) deste exemplo, o axioma (M_5) não é satisfeito, pois, para todo número natural n , sendo $n \neq 0$ e $n \neq 1$, não existe em N um elemento $\tilde{n}$ tal que $n \cdot \tilde{n} = \tilde{n} \cdot n = 1$, ou seja, não existe o elemento inverso de n (dever-se-ia ter $\tilde{n} = \frac{1}{n}$, que não pertence ao conjunto N). Da mesma forma, não é verdadeiro, para a operação de adição, o axioma (A_5) , pois, qualquer que seja o número natural não nulo n que se considere, não existe em N um elemento n' tal que $n + n' = n' + n = 0$, onde 0 é o elemento neutro da operação de adição de números naturais. Isto significa que não existe o elemento oposto (ou simétrico) de n (observe-se que, para que se some n com n' e se encontre como resultado o elemento neutro 0, deve-se ter $n' = -n$, que não pertence ao conjunto dos números naturais).

2.3. ESPAÇO VETORIAL

Definição: Um conjunto não vazio V , munido das operações de adição (indicada por $+$) e de multiplicação por escalar (indicada por $\cdot$) é um espaço vetorial sobre um corpo K , se são satisfeitos os seguintes axiomas:

(A) em relação à adição:

(A_1) quaisquer que sejam u e v em V , tem-se: $u + v = v + u$
(propriedade comutativa)

(A_2) quaisquer que sejam u, v e w em V , tem-se: $u + (v + w) = (u + v) + w$
(propriedade associativa)

(A_3) para todo u em V , existe em V um elemento u^* tal que:
 $u + u^* = u^* + u = u$
(existência do elemento neutro)

(A_4) para todo elemento u em V , existe em V um elemento u' tal que:
 $u + u' = u' + u = u^*$
(existência do elemento oposto ou simétrico)

(M) em relação à multiplicação por escalar:

(M_1) quaisquer que sejam α e β em K e qualquer que seja u em V , tem-se:
 $\alpha \cdot (\beta \cdot u) = (\alpha \cdot \beta) \cdot u$

(M_2) quaisquer que sejam u e v em V e qualquer que seja α em K , tem-se:
 $\alpha \cdot (u + v) = \alpha \cdot u + \alpha \cdot v$

(M_3) para todo u em V e para quaisquer α e β em K , tem-se:
 $(\alpha + \beta) \cdot u = \alpha \cdot u + \beta \cdot u$

(M_4) para todo elemento u em V , tem-se: $1 \cdot u = u$

Observações:

- 1) Dizer que o conjunto V é um espaço vetorial “sobre um corpo K ” significa que os escalares são tomados em K .
- 2) Para indicar o espaço vetorial V sobre o corpo K , com as operações definidas, usa-se a notação: $(V, +, \cdot)$.

- 3) Quando o corpo K sobre o qual se define o espaço vetorial é o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais, o espaço é chamado *espaço vetorial real*; quando o corpo considerado é o conjunto $\mathbb{C}$ dos números complexos, o espaço é chamado *espaço vetorial complexo*. Salvo referência expressa em contrário, serão considerados, nesse texto, espaços vetoriais reais.
- 4) Os elementos do espaço vetorial V são chamados *vetores*, independentemente de sua natureza. Pode parecer estranho o fato de se chamar de vetores os “números”, quando V for um conjunto numérico, as “matrizes”, quando V for um conjunto de matrizes, os “polinômios”, quando V for um conjunto de polinômios e assim por diante. A justificativa está no fato de que se efetuam as operações de adição e multiplicação por escalar com esses elementos de natureza tão distinta de forma análoga à que se opera com “vetores” do $\mathbb{R}^2$ (conjunto dos pares ordenados de números reais, cuja representação geométrica é o plano de coordenadas cartesianas ortogonais) ou do $\mathbb{R}^3$ (conjunto das ternas ordenadas de números reais, cuja representação geométrica é o espaço tridimensional de coordenadas cartesianas ortogonais). É preciso lembrar que, a todo ponto do $\mathbb{R}^2$, associa-se um vetor, chamado vetor-posição, com origem no ponto $(0,0)$ e extremidade no ponto considerado, cujas coordenadas são as mesmas do próprio ponto. Analogamente, a todo ponto do $\mathbb{R}^3$, associa-se um vetor, chamado vetor-posição, com origem no ponto $(0,0,0)$ e extremidade no ponto considerado, cujas coordenadas são as mesmas do próprio ponto.

Exemplo: São espaços vetoriais

- a) $(P_n(\mathbb{R}), +, \cdot)$: conjunto de todos os polinômios com coeficientes reais de grau menor ou igual a n (incluindo o polinômio nulo), com as operações usuais de adição de polinômios e multiplicação por escalar.
- b) $(M_{m \times n}(\mathbb{R}), +, \cdot)$: conjunto de todas as matrizes de dimensão $m \times n$, com elementos reais, com as operações usuais de adição de matrizes e multiplicação por escalar. Se $m = n$, escreve-se: $(M_n(\mathbb{R}), +, \cdot)$.
- c) $(F, +, \cdot)$: conjunto de todas as funções reais de uma variável real, com as operações de adição e multiplicação por escalar assim definidas:

- $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$, quaisquer que sejam as funções f e g em F (e para todo x em $\mathfrak{R}$).
- $(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$, quaisquer que sejam f em F e α em $\mathfrak{R}$ (e para todo x em $\mathfrak{R}$).

2.3.1. Propriedades dos espaços vetoriais

Seja V um espaço vetorial sobre um corpo K . É possível demonstrar as afirmações que se seguem.

- Existe um único vetor nulo em V , denotado por $\mathbf{0}$ (que é o elemento neutro da adição).
- Cada vetor $v \in V$ admite apenas um simétrico $(-v) \in V$.
- Qualquer que seja $v \in V$, tem-se: $0 \cdot v = \mathbf{0}$.

Naturalmente, o primeiro zero que aparece nessa expressão é o número real zero e o segundo, é o vetor nulo $\mathbf{0} \in V$.

- Qualquer que seja $\alpha \in K$, tem-se: $\alpha \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$.

Neste caso, o zero do primeiro membro desta equação é o mesmo do segundo membro e é o vetor nulo de V .

- Para quaisquer $u, v, w \in V$, se $u + w = v + w$, então $u = v$ (esta é a chamada lei do cancelamento).
- Qualquer que seja $v \in V$, tem-se: $-(-v) = v$, isto é, o oposto de $-v$ é v .
- Qualquer que seja $v \in V$, tem-se: $(-1) \cdot v = -v$.
- $\alpha \cdot v = \mathbf{0}$ implica $\alpha = 0$ ou $v = \mathbf{0}$.

- Se $\alpha \cdot v = \mathbf{0}$ e $\alpha \neq 0$, então $v = \mathbf{0}$.

- Qualquer que sejam $v \in V$ e $\alpha \in \mathfrak{R}$, tem-se: $(-\alpha)v = \alpha(-v) = -(\alpha v)$.

- Qualquer que sejam $u, v \in V$, existe um, e somente um, $x \in V$ tal que:
 $u + x = v$.

Esse vetor x será representado por: $x = v - u$.

2.3.2. O Espaço Vetorial $\mathfrak{R}^n$

O conjunto de todas as n-uplas de números reais, isto é, o conjunto $\mathfrak{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) / x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathfrak{R}\}$, munido das operações de adição vetorial e multiplicação por escalar, definidas por:

- adição vetorial: para quaisquer elementos $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ e $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ em $\mathfrak{R}^n$, tem-se:

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n).$$
- multiplicação por escalar: para qualquer $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ em $\mathfrak{R}^n$ e qualquer número real α , tem-se:

$$\alpha(x_1, x_2, \dots, x_n) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n),$$

é um espaço vetorial sobre o corpo $\mathfrak{R}$ dos números reais.

É usual identificar uma n-upla de $\mathfrak{R}^n$ com um vetor n-dimensional e escrever:

$$u = (x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Exemplos:

- 1) No espaço vetorial $\mathfrak{R}^n$ considerado acima, seja $n = 2$, isto é, considere-se o conjunto dos pares ordenados de números reais:

$$\mathfrak{R}^2 = \{(x_1, x_2) / x_1, x_2 \in \mathfrak{R}\},$$

que, comumente, é escrito na forma

$$\mathfrak{R}^2 = \{(x, y) / x, y \in \mathfrak{R}\}.$$

Mostrar-se-á que este espaço, com as operações:

- adição vetorial, ou seja, adição usual de pares ordenados de números reais, definida por: $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$;
- multiplicação por escalar, definida por: $\alpha \cdot (x, y) = (\alpha \cdot x, \alpha \cdot y)$, onde $\alpha \in \mathfrak{R}$, é um espaço vetorial sobre o corpo $\mathfrak{R}$ dos números reais.

É preciso mostrar que são válidos os axiomas da definição de espaço vetorial sobre um corpo K . Neste exemplo, tem-se que $K = \mathfrak{R}$.

(A) Em relação à adição:

(A₁) tomando-se dois vetores quaisquer $u_1 = (x_1, y_1)$ e $u_2 = (x_2, y_2)$ em $\mathfrak{R}^2$, tem-se:

$$u_1 + u_2 = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2);$$

uma vez que os elementos dos pares ordenados são números reais e a adição de números reais é comutativa, segue-se que:

$$(x_1 + x_2, y_1 + y_2) = (x_2 + x_1, y_2 + y_1) = (x_2, y_2) + (x_1, y_1) = u_2 + u_1.$$

Portanto, $u_1 + u_2 = u_2 + u_1$ e conclui-se que a operação de adição satisfaz a propriedade comutativa;

(A₂) sejam $u_1 = (x_1, y_1)$, $u_2 = (x_2, y_2)$ e $u_3 = (x_3, y_3)$ em $\mathfrak{R}^2$; tem-se:

$$\begin{aligned} u_1 + (u_2 + u_3) &= (x_1, y_1) + [(x_2, y_2) + (x_3, y_3)] = (x_1, y_1) + (x_2 + x_3, y_2 + y_3) = \\ &= (x_1 + (x_2 + x_3), y_1 + (y_2 + y_3)). \end{aligned}$$

Sendo a adição de números reais associativa, pode-se escrever:

$$\begin{aligned} (x_1 + (x_2 + x_3), y_1 + (y_2 + y_3)) &= ((x_1 + x_2) + x_3, (y_1 + y_2) + y_3) = \\ &= (x_1 + x_2, y_1 + y_2) + (x_3, y_3) = [(x_1, y_1) + (x_2, y_2)] + (x_3, y_3) = (u_1 + u_2) + u_3 \end{aligned}$$

Portanto, $u_1 + (u_2 + u_3) = (u_1 + u_2) + u_3$; logo, a adição vetorial é associativa;

(A₃) seja $u = (x, y)$ um elemento qualquer de $\mathfrak{R}^2$. É preciso mostrar que existe um elemento $u^* = (x^*, y^*)$ em $\mathfrak{R}^2$ tal que $u + u^* = u^* + u = u$, ou seja, é preciso mostrar que existe em $\mathfrak{R}^2$ um elemento neutro para a operação de adição de vetores.

Uma vez que o número real 0 é o elemento neutro da adição de números reais, é natural que o vetor $\mathbf{0} = (0, 0)$ seja o elemento neutro da adição vetorial. De fato, tem-se:

$$u + \mathbf{0} = (x, y) + (0, 0) = (x + 0, y + 0) = (x, y) = u$$

e

$$\mathbf{0} + u = (0, 0) + (x, y) = (0 + x, 0 + y) = (x, y) = u.$$

Logo,

$$u + \mathbf{0} = \mathbf{0} + u = u$$

e, portanto, o vetor nulo $\mathbf{0} = (0, 0)$ é o elemento neutro da adição vetorial;

(A_4) seja $u = (x, y)$ um elemento de $\mathfrak{R}^2$. É preciso mostrar existe um elemento $u' = (x', y')$ em $\mathfrak{R}^2$ tal que $u + u' = u' + u = \mathbf{0}$, onde $\mathbf{0} = (0, 0)$ é o elemento neutro da adição de vetores. Uma vez que os elementos x e y do par ordenado são números reais, existem seus elementos opostos $-x$ e $-y$. Assim, pode-se considerar o vetor $(-x, -y)$, que será indicado por $-u$. Tem-se, então:

$$u + (-u) = (x, y) + (-x, -y) = (x + (-x), y + (-y)) = (0, 0) = \mathbf{0};$$

analogamente, mostra-se que $(-u) + u = \mathbf{0}$.

Portanto, todo elemento do $\mathfrak{R}^2$ admite um elemento oposto ou simétrico.

(M) Em relação à multiplicação por escalar:

(M_1) considerem-se dois números reais α e β e um elemento $u = (x, y)$ em $\mathfrak{R}^2$. Tem-se:

$$\begin{aligned}\alpha \cdot (\beta \cdot u) &= \alpha \cdot [\beta \cdot (x, y)] = \alpha \cdot (\beta \cdot x, \beta \cdot y) = (\alpha \cdot (\beta \cdot x), \alpha \cdot (\beta \cdot y)) = \\ &= ((\alpha \cdot \beta) \cdot x, (\alpha \cdot \beta) \cdot y) = (\alpha \cdot \beta) \cdot (x, y) = (\alpha \cdot \beta) \cdot u\end{aligned}$$

(M_2) sejam $u_1 = (x_1, y_1)$ e $u_2 = (x_2, y_2)$ em $\mathfrak{R}^2$ e um número real α , tem-se:

$$\begin{aligned}\alpha \cdot (u_1 + u_2) &= \alpha \cdot [(x_1, y_1) + (x_2, y_2)] = \alpha \cdot (x_1 + x_2, y_1 + y_2) = \\ &= (\alpha \cdot (x_1 + x_2), \alpha \cdot (y_1 + y_2)) = (\alpha \cdot x_1 + \alpha \cdot x_2, \alpha \cdot y_1 + \alpha \cdot y_2) = \\ &= (\alpha \cdot x_1, \alpha \cdot y_1) + (\alpha \cdot x_2, \alpha \cdot y_2) = \alpha \cdot (x_1, y_1) + \alpha \cdot (x_2, y_2) = \alpha \cdot u_1 + \alpha \cdot u_2\end{aligned}$$

Portanto, $\alpha \cdot (u_1 + u_2) = \alpha \cdot u_1 + \alpha \cdot u_2$;

(M_3) sejam $u = (x, y)$ um elemento de $\mathfrak{R}^2$ e dois números reais α e β . Tem-se:

$$\begin{aligned}(\alpha + \beta) \cdot u &= (\alpha + \beta) \cdot (x, y) = ((\alpha + \beta) \cdot x, (\alpha + \beta) \cdot y) = \\ &= (\alpha \cdot x + \beta \cdot x, \alpha \cdot y + \beta \cdot y) = \\ &= (\alpha \cdot x, \alpha \cdot y) + (\beta \cdot x, \beta \cdot y) = \alpha \cdot (x, y) + \beta \cdot (x, y) = \alpha \cdot u + \beta \cdot u\end{aligned}$$

Portanto, $(\alpha + \beta) \cdot u = \alpha \cdot u + \beta \cdot u$;

(M_4) considere-se um elemento $u = (x, y)$ do $\mathfrak{R}^2$. O número real 1 é o elemento neutro da multiplicação de números reais e, portanto, tem-se:

$$1 \cdot u = 1 \cdot (x, y) = (1 \cdot x, 1 \cdot y) = (x, y) = u.$$

Logo, $1 \cdot u = u$.

2) Considere-se novamente o conjunto dos pares ordenados de números reais:

$\mathfrak{R}^2 = \{(x, y) / x, y \in \mathfrak{R}\}$. Considerando-se as operações $\oplus$ e $\otimes$, definidas por:

- $u_1 \oplus u_2 = u_1 - u_2$; ou seja, se $u_1 = (x_1, y_1)$ e $u_2 = (x_2, y_2)$, então:
 $u_1 \oplus u_2 = (x_1, y_1) \oplus (x_2, y_2) = (x_1, y_1) - (x_2, y_2) = (x_1 - x_2, y_1 - y_2)$;
- $\alpha \otimes u = -\alpha u$; ou seja, se $u = (x, y)$ e $\alpha \in \mathfrak{R}$, então:
 $\alpha \otimes u = -\alpha u = -\alpha(x, y) = (-\alpha x, -\alpha y)$.

Mostrar-se-á que este conjunto, com as operações definidas acima, não é um espaço vetorial sobre $\mathfrak{R}$. Para isso, deve-se mostrar que pelo menos um dos axiomas da definição de espaço vetorial sobre um corpo K não é satisfeito.

Por exemplo, o axioma (A_1) não é satisfeito, isto é, a operação $\oplus$ não é comutativa, pois, tomando-se dois elementos quaisquer $u_1 = (x_1, y_1)$ e $u_2 = (x_2, y_2)$ em $\mathfrak{R}^2$, tem-se:

$$u_1 \oplus u_2 = (x_1, y_1) \oplus (x_2, y_2) = (x_1, y_1) - (x_2, y_2) = (x_1 - x_2, y_1 - y_2);$$

por outro lado, tem-se:

$$u_2 \oplus u_1 = (x_2, y_2) \oplus (x_1, y_1) = (x_2, y_2) - (x_1, y_1) = (x_2 - x_1, y_2 - y_1).$$

Vê-se, assim que $u_1 \oplus u_2 \neq u_2 \oplus u_1$. Portanto $(\mathfrak{R}^2, \oplus, \otimes)$ não é um espaço vetorial sobre o corpo $\mathfrak{R}$ dos números reais.

Observação: os exemplos anteriores evidenciam que, para afirmar que um determinado conjunto V é um espaço vetorial sobre um corpo K , é preciso que estejam bem definidas em V as operações de adição e multiplicação por escalar.

2.4. SUBESPAÇO VETORIAL

Definição: Seja V um espaço vetorial sobre um corpo K , com as operações de adição e multiplicação por escalar. Um subconjunto $W \subseteq V$ é um subespaço vetorial de V se:

- a) $\mathbf{0} \in W$, ou seja, o elemento nulo do espaço V pertence a W ;
- b) para quaisquer elementos w_1 e w_2 em W , tem-se que $w_1 + w_2 \in W$, ou seja, W é fechado em relação à operação de adição;
- c) para qualquer w em W e para qualquer escalar α em K , tem-se que $\alpha \cdot w \in W$, ou seja, W é fechado em relação à operação de multiplicação por escalar.

É claro que, se W é um subespaço vetorial de V , o qual, por sua vez, é um espaço vetorial sobre o corpo K (com as operações de adição e multiplicação por escalar), então o próprio W , por si só, é também um espaço vetorial sobre o corpo K (com as mesmas operações definidas em V).

Exemplos:

- 1) Seja V um espaço vetorial sobre um corpo K . São considerados subespaços vetoriais triviais de V :
 - a) $W = V$, isto é, o espaço vetorial V é um subespaço vetorial de si próprio.
 - b) $W = \{\mathbf{0}\}$, ou seja, o espaço nulo, que contém como único elemento o vetor nulo, é um subespaço vetorial de V .
- 2) Mostrar que o conjunto dos pontos do $\mathbb{R}^2$ que pertencem a uma reta que passa pelo ponto $(0,0)$ é um subespaço vetorial do $\mathbb{R}^2$, o qual é um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{R}$ dos números reais.

Seja W o conjunto dos pares ordenados que pertencem a uma reta que passa pelo ponto $(0,0)$, ou seja:

$$W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y = mx, \text{ com } m \neq 0 \in \mathbb{R}\}.$$

Então, todo vetor de W se escreve na forma (x, mx) . Assim, pode-se escrever:

$$W = \{(x, mx), \forall x \in \mathbb{R}, \text{ com } m \neq 0 \in \mathbb{R}\}.$$

Verificar-se-á se os axiomas da definição de subespaço vetorial são satisfeitos para o conjunto W .

a) O elemento nulo do espaço vetorial $\mathfrak{R}^2$ é o par ordenado $(0,0)$. É claro que este também é um elemento de W , pois este é o conjunto dos pontos de uma reta que passa pela origem. Portanto, $(0,0) \in W$ e o primeiro axioma está satisfeito.

b) Considerem-se dois elementos w_1 e w_2 em W ; então, tem-se:

$$w_1 = (x_1, mx_1) \text{ e } w_2 = (x_2, mx_2)$$

então:

$$w_1 + w_2 = (x_1 + x_2, mx_1 + mx_2) = (x_1 + x_2, m(x_1 + x_2)),$$

de onde se segue que $w_1 + w_2 \in W$, isto é, W é fechado em relação à operação de adição.

c) Sejam: $w = (x, mx)$ um elemento de W e α um número real. Então:

$$\alpha w = (\alpha x, \alpha(mx)) = (\alpha x, m(\alpha x))$$

e, portanto, $\alpha w \in W$, o que mostra que W é fechado em relação à operação de multiplicação por escalar.

Conclui-se, assim, que W é um subespaço vetorial do $\mathfrak{R}^2$.

3) Mostrar que o conjunto das ternas ordenadas de números reais que pertencem a um plano que contém o ponto $(0,0,0)$ é um subespaço vetorial do $\mathfrak{R}^3$.

Sabe-se que a equação geral do plano é dada por: $ax + by + cz + d = 0$, onde os coeficientes a , b e c não se anulam ao mesmo tempo. Se o ponto $(0,0,0)$ pertence ao plano, tem-se: $a \cdot 0 + b \cdot 0 + c \cdot 0 + d = 0$ e, portanto, $d = 0$. Assim, a equação fica $ax + by + cz = 0$. Seja W o conjunto das ternas ordenadas do $\mathfrak{R}^3$ que pertencem a este plano, ou seja:

$$W = \left\{ (x, y, z) \in \mathfrak{R}^3 / ax + by + cz = 0 \right\}.$$

Supondo-se, por exemplo, que o coeficiente a seja não nulo e escrevendo-se a coordenada x em função das outras duas, tem-se:

$$x = -\frac{by + cz}{a};$$

então, todo vetor de W pode ser escrito na forma: $\left(-\frac{by + cz}{a}, y, z \right)$.

Verificar-se-á se os axiomas da definição de subespaço vetorial são satisfeitos para o conjunto W .

a) O elemento nulo do espaço vetorial $\mathfrak{R}^3$ é a terna ordenada $(0,0,0)$, que também é um elemento de W , já que este é o conjunto dos pontos do plano que passa pela origem. Portanto, $(0,0,0) \in W$ e o primeiro axioma está satisfeito.

b) Sejam w_1 e w_2 dois elementos de W ; então, tem-se:

$$w_1 = \left(\frac{-by_1 - cz_1}{a}, y_1, z_1 \right) \text{ e } w_2 = \left(\frac{-by_2 - cz_2}{a}, y_2, z_2 \right)$$

e vem:

$$\begin{aligned} w_1 + w_2 &= \left(\frac{-by_1 - cz_1}{a} + \frac{-by_2 - cz_2}{a}, y_1 + y_2, z_1 + z_2 \right) = \\ &= \left(\frac{-b(y_1 + y_2) - c(z_1 + z_2)}{a}, y_1 + y_2, z_1 + z_2 \right), \end{aligned}$$

de onde se segue que $w_1 + w_2 \in W$, isto é, W é fechado em relação à operação de adição.

c) Sejam: $w = \left(-\frac{by + cz}{a}, y, z \right)$ um elemento de W e α um número real.

Então:

$$\alpha w = \left(\alpha \left(-\frac{by + cz}{a} \right), \alpha y, \alpha z \right) = \left(-\frac{b(\alpha y) + c(\alpha z)}{a}, \alpha y, \alpha z \right)$$

e, portanto, $\alpha w \in W$, o que mostra que W é fechado em relação à operação de multiplicação por escalar.

Conclui-se, assim, que W é um subespaço vetorial do $\mathfrak{R}^2$.

4) Seja $(M_n(\mathfrak{R}), +, \cdot)$ o espaço vetorial real das matrizes quadradas de ordem n , com as operações usuais de adição de matrizes e multiplicação por escalar. Mostrar que o subconjunto

$$S = \{A \in M_n(\mathfrak{R}) / A^t = A\}$$

é um subespaço vetorial de $M_n(\mathfrak{R})$.

Mostrar-se-á que os axiomas da definição de subespaço vetorial são satisfeitos para o conjunto S .

- a) O elemento nulo do espaço vetorial real $(M_n(\mathfrak{R}), +, \cdot)$ é a matriz nula de ordem n :

$$\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}_{n \times n}.$$

Uma vez que $\mathbf{0}^t = \mathbf{0}$, conclui-se que $\mathbf{0} \in S$ e o primeiro axioma está satisfeito.

- b) Deve-se mostrar que S é fechado em relação à operação de adição. De fato, considerando-se dois elementos A e B de S , tem-se:

$$A \in S \Rightarrow A^t = A; B \in S \Rightarrow B^t = B.$$

Por propriedade de matriz transposta, tem-se:

$$(A + B)^t = A^t + B^t;$$

então, vem:

$$(A + B)^t = A^t + B^t = A + B \therefore (A + B)^t = A + B$$

e conclui-se que $A + B \in S$. Logo, S é fechado em relação à operação de adição.

- c) É preciso mostrar, agora, que S é fechado em relação à operação de multiplicação por escalar, ou seja, é preciso mostrar que, se $A \in S$ e $\alpha \in \mathfrak{R}$, então $\alpha A \in S$. De fato, se $A \in S$, então $A^t = A$. Assim, usando novamente uma das propriedades da matriz transposta, vem:

$$(\alpha A)^t = \alpha(A)^t = \alpha A,$$

ou seja, $\alpha A \in S$.

Conclui-se, assim, que S é um subespaço vetorial do espaço vetorial $(M_n(\mathfrak{R}), +, \cdot)$.

5) Seja $(F, +, \cdot)$ o conjunto de todas as funções reais de uma variável real, com as operações de adição e multiplicação por escalar assim definidas:

- $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$, quaisquer que sejam as funções f e g em F (e para todo x em $\mathfrak{R}$).
- $(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$, quaisquer que sejam f em F e α em $\mathfrak{R}$ (e para todo x em $\mathfrak{R}$).

$(F, +, \cdot)$ é um espaço vetorial sobre o corpo $\mathfrak{R}$ dos números reais.

Seja S o subconjunto de F , dado por:

$$S = \left\{ f : \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R} / f(x^2) = [f(x)]^2, \forall x \in \mathfrak{R} \right\}.$$

Verificar se S é um subespaço vetorial de $(F, +, \cdot)$.

Deve-se verificar se os axiomas da definição são satisfeitos.

a) O elemento neutro de F é a função nula $\mathbf{0}$, ou seja, $\mathbf{0}(x) = 0, \forall x \in \mathfrak{R}$.

Tem-se:

$$\mathbf{0}(x^2) = 0 \text{ e } [\mathbf{0}(x)]^2 = 0^2 = 0.$$

Logo,

$$\mathbf{0}(x^2) = [\mathbf{0}(x)]^2, \forall x \in \mathfrak{R},$$

e, portanto, o elemento neutro $\mathbf{0} \in S$.

b) Sejam dois elementos f_1 e f_2 de S . Então, para todo $x \in \mathfrak{R}$, tem-se:

$$f_1(x^2) = [f_1(x)]^2 \text{ e } f_2(x^2) = [f_2(x)]^2.$$

Então:

$$(f_1 + f_2)(x^2) = f_1(x^2) + f_2(x^2) = [f_1(x)]^2 + [f_2(x)]^2.$$

Por outro lado, tem-se:

$$[f_1(x) + f_2(x)]^2 = [f_1(x)]^2 + 2f_1(x)f_2(x) + [f_2(x)]^2.$$

Logo,

$$(f_1 + f_2)(x^2) \neq [f_1(x) + f_2(x)]^2,$$

ou seja, $(f_1 + f_2) \notin S$.

Uma vez que este axioma não é satisfeito, conclui-se que S não é um subespaço vetorial de F .

Proposição: Se W_1 e W_2 são subespaços de um espaço vetorial V sobre um corpo K , então:

- (i) $W_1 + W_2$ é subespaço vetorial de V .
- (ii) $W_1 \cap W_2$ é subespaço vetorial de V .
- (iii) $W_1 \cup W_2$ não é subespaço vetorial de V .

Demonstração:

- (i) O conjunto $W_1 + W_2$ é dado por:

$$W_1 + W_2 = \{u = w_1 + w_2 / w_1 \in W_1 \text{ e } w_2 \in W_2\}.$$

Para mostrar que $W_1 + W_2$ é um subespaço vetorial de V , é preciso mostrar que satisfaz os axiomas da definição. Tem-se:

- a) $\mathbf{0} \in W_1 + W_2$, pois, como W_1 é subespaço vetorial de V , então $\mathbf{0} \in W_1$; da mesma forma, sendo W_2 subespaço vetorial de V , então $\mathbf{0} \in W_2$. Portanto, o elemento $\mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{0}$ é um elemento de $W_1 + W_2$, ou seja, o elemento nulo de V pertence a $W_1 + W_2$.

- b) Considerem-se dois elementos u e v de $W_1 + W_2$; então:

$$u = w_1 + w_2 \text{ e } v = w'_1 + w'_2, \text{ onde } w_1, w'_1 \in W_1 \text{ e } w_2, w'_2 \in W_2.$$

Então:

$$u + v = (w_1 + w_2) + (w'_1 + w'_2) = (w_1 + w'_1) + (w_2 + w'_2).$$

Uma vez que W_1 e W_2 são subespaços vetoriais de V , segue-se que $w_1 + w'_1 \in W_1$ e $w_2 + w'_2 \in W_2$, de onde se conclui que $u + v \in W_1 + W_2$, isto é, $W_1 + W_2$ é fechado em relação à operação de adição.

- c) Sejam $u = w_1 + w_2$ um elemento de $W_1 + W_2$ e $\alpha \in \mathfrak{R}$. Então:

$$\alpha u = \alpha(w_1 + w_2) = \alpha w_1 + \alpha w_2.$$

Como W_1 e W_2 são subespaços vetoriais de V , tem-se que $\alpha w_1 \in W_1$ e $\alpha w_2 \in W_2$ e, portanto, αu é um elemento de $W_1 + W_2$, de onde se segue que $W_1 + W_2$ é fechado em relação à operação de multiplicação por escalar.

De (a), (b) e (c), conclui-se que $W_1 + W_2$ é um subespaço vetorial de V .

(ii) O conjunto $W_1 \cap W_2$ é dado por:

$$W_1 \cap W_2 = \{u / u \in W_1 \text{ e } u \in W_2\}.$$

Mostrar-se-á que são satisfeitos os axiomas da definição de subespaço vetorial.

a) Como W_1 e W_2 são subespaços vetoriais de V , então $\mathbf{0} \in W_1$ e $\mathbf{0} \in W_2$. Portanto, $\mathbf{0} \in W_1 \cap W_2$.

b) Sejam u e v dois elementos de $W_1 \cap W_2$. Então, $u \in W_1$ e $u \in W_2$, assim como $v \in W_1$ e $v \in W_2$. Sendo W_1 e W_2 subespaços vetoriais de V , segue-se que $u + v \in W_1$ e $u + v \in W_2$. Portanto, $u + v \in W_1 \cap W_2$.

c) Sejam u um elemento de $W_1 \cap W_2$ e $\alpha \in \mathfrak{R}$. Então, $u \in W_1$ e $u \in W_2$ e, portanto, $\alpha u \in W_1$ e $\alpha u \in W_2$. Logo, $\alpha u \in W_1 \cap W_2$.

De (a), (b) e (c), conclui-se que $W_1 \cap W_2$ é um subespaço vetorial de V .

(iii) O conjunto $W_1 \cup W_2$ é dado por:

$$W_1 \cup W_2 = \{u / u \in W_1 \text{ ou } u \in W_2\}.$$

Mostrar-se-á que $W_1 \cup W_2$ não é subespaço vetorial de V exibindo-se um contra-exemplo. Considere-se o espaço vetorial $\mathfrak{R}^2$ e dois subconjuntos deste espaço:

$$W_1 = \{(x, y) \in \mathfrak{R}^2 / y = 0\} = \{(x, 0) \in \mathfrak{R}^2 / x \in \mathfrak{R}\}$$

e

$$W_2 = \{(x, y) \in \mathfrak{R}^2 / x = 0\} = \{(0, y) \in \mathfrak{R}^2 / y \in \mathfrak{R}\}.$$

A representação gráfica de W_1 é o eixo Ox do plano cartesiano e de W_2 , o eixo Oy . Assim, $W_1 \cup W_2$ é o conjunto dos pares ordenados do $\mathfrak{R}^2$ que pertencem ao eixo Ox ou ao eixo Oy .

Observe-se que W_1 é subespaço vetorial de $\mathfrak{R}^2$, pois:

a) o elemento nulo $(0, 0) \in \mathfrak{R}^2$ pertence a W_1 , pois tem a segunda coordenada igual a zero.

b) considerando-se dois elementos $(x_1, 0)$ e $(x_2, 0)$ de W_1 , sua soma também é um elemento de W_1 , pois: $(x_1, 0) + (x_2, 0) = (x_1 + x_2, 0)$.

- c) considerando-se um elemento $(x, 0)$ de W_1 e um número real α , tem-se:

$$\alpha(x, 0) = (\alpha x, 0),$$

que é um elemento de W_1 .

De modo análogo, mostra-se que W_2 é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^2$. Entretanto, como se verá a seguir, $W_1 \cup W_2$ não é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^2$, pois não é fechado em relação à operação de adição. Para isso, considerem-se os pares ordenados $(1, 0)$ e $(0, 1)$, os quais são elementos de $W_1 \cup W_2$, pois $(1, 0) \in W_1$ e $(0, 1) \in W_2$. Entretanto, tem-se:

$$(1, 0) + (0, 1) = (1, 1),$$

que não é um elemento de W_1 , nem de W_2 e, portanto, não pertence a $W_1 \cup W_2$. Conclui-se, assim, que $W_1 \cup W_2$ não é um subespaço vetorial do $\mathbb{R}^2$.

Definição: Sejam W_1 e W_2 subespaços vetoriais de um espaço vetorial V . Diz-se que o espaço V é soma direta dos subespaços W_1 e W_2 , e denota-se por $V = W_1 \oplus W_2$, se:

- (i) $V = W_1 + W_2$
- (ii) $W_1 \cap W_2 = \{\mathbf{0}\}$

Exemplos:

- 1) Mostrar que o espaço vetorial $\mathbb{R}^2$ é soma direta dos subespaços vetoriais $W_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y = 0\}$ com $W_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x = 0\}$.

Conforme se viu no item (iii) da proposição anterior, W_1 e W_2 são subespaços vetoriais de $\mathbb{R}^2$, sendo sua representação gráfica os eixos Ox e Oy do plano cartesiano, respectivamente.

- (i) Mostrar-se-á que $\mathbb{R}^2 = W_1 + W_2$.

De fato, tomando-se um elemento qualquer $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, pode-se escrever:

$$(x, y) = (x, 0) + (0, y),$$

ou seja, todo elemento do $\mathbb{R}^2$ é uma soma de um elemento de W_1 com um elemento de W_2 e, portanto, tem-se que $\mathbb{R}^2 = W_1 + W_2$.

(ii) É fácil ver que o único par ordenado que pertence simultaneamente a W_1 e a W_2 é $(0,0)$, que é o elemento neutro de $\mathfrak{R}^2$. Assim, tem-se que $W_1 \cap W_2 = \{(0,0)\}$.

De (i) e (ii), segue-se que $\mathfrak{R}^2 = W_1 \oplus W_2$.

- 2) Mostrar que toda função real de uma variável real é soma direta de uma função par com uma função ímpar.

Considerem-se os conjuntos: F , das funções reais de uma variável real; F_1 , das funções reais de uma variável real que são pares; F_2 , das funções reais de uma variável real que são ímpares. Quer-se mostrar que $F = F_1 \oplus F_2$.

Sabe-se que uma função f é dita par se satisfaz a relação $f(x) = f(-x)$, para todo ponto x de seu domínio. Se for satisfeita a relação $f(x) = -f(-x)$, para todo x do domínio de f , diz-se que f é ímpar. É claro que, para que seja possível determinar se f é par ou ímpar, deve-se ter $-x$ pertencente ao domínio da função, para todo x de seu domínio.

- (i) Mostrar-se-á que $F = F_1 + F_2$.

De fato, seja f um elemento de F ; pode-se, a partir dela, obterem-se duas outras funções f_1 e f_2 , escrevendo-se:

$$f_1(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \text{ e } f_2(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2},$$

para todo x do domínio de f tal que $-x$ também pertença ao domínio de f .

Observe-se que f_1 é par, pois:

$$f_1(-x) = \frac{f(-x) + f(-(-x))}{2} = \frac{f(-x) + f(x)}{2} = f_1(x);$$

analogamente, tem-se que f_2 é ímpar:

$$f_2(-x) = \frac{f(-x) - f(-(-x))}{2} = \frac{f(-x) - f(x)}{2} = -\frac{f(x) - f(-x)}{2} = -f_2(x).$$

Portanto, $f_1 \in F_1$ e $f_2 \in F_2$. Por outro lado, tem-se:

$$f(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2},$$

ou seja,

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x),$$

de onde se conclui que $F = F_1 + F_2$.

(ii) Por outro lado, a única função que é, ao mesmo tempo, par e ímpar, é a função nula $\mathbf{0}$, que, a cada x real, associa o número real 0. Portanto,

$$F_1 \cap F_2 = \{\mathbf{0}\}.$$

De (i) e (ii), segue-se que $F = F_1 \oplus F_2$.

2.5. EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1) Seja $V = \{v \in \mathfrak{R} / v > 0\}$, com as operações:

$$\text{Adição: } v_1 \oplus v_2 = v_1 \cdot v_2, \quad \forall v_1, v_2 \in V$$

$$\text{Multiplicação por escalar: } \alpha \otimes v = v^\alpha, \quad \forall v \in V \text{ e } \forall \alpha \in \mathfrak{R}.$$

Mostrar que V , munido dessas operações, é um espaço vetorial sobre o corpo dos números reais.

2) Mostrar que o conjunto $W = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathfrak{R}) / a + 2b = c - d = 0 \right\}$ é um subespaço vetorial de $M_2(\mathfrak{R})$.

3) Mostrar que o conjunto $U = \{p(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 \in P_2(\mathfrak{R}) / a_0 - 2a_1 = 0\}$ é um subespaço vetorial de $P_2(\mathfrak{R})$.

4) Verificar quais dos conjuntos são subespaços vetoriais do espaço vetorial $\mathfrak{R}^n$.

$$\text{a) } W = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathfrak{R}^n / x_1 = x_n^2\} \quad \text{R: não}$$

$$\text{b) } U = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathfrak{R}^n / x_n = x_1 + x_2\} \quad \text{R: sim}$$

$$\text{c) } X = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathfrak{R}^n / x_1 \geq 0\} \quad \text{R: não}$$

5) Sejam: $W_1 = \{(x, y) \in \mathfrak{R}^2 / y - x = 0\}$ e $W_2 = \{(x, y) \in \mathfrak{R}^2 / y + x = 0\}$.

Mostrar que $\mathfrak{R}^2 = W_1 \oplus W_2$.

3

DEPENDÊNCIA LINEAR

3.1. COMBINAÇÃO LINEAR

Definição: Seja V um espaço vetorial sobre um corpo K . Um vetor $u \in V$ é dito uma combinação linear dos vetores $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$, se existem escalares $a_1, a_2, \dots, a_n$ em K tais que $u = a_1v_1 + a_2v_2 + \dots + a_nv_n$.

De forma abreviada, pode-se escrever:

$$u = \sum_{i=1}^n a_i v_i .$$

Exemplos:

- 1) Verificar se o vetor $u = (0, -2, 5)$ pode ser escrito como combinação linear dos vetores $v_1 = (1, 1, -1)$, $v_2 = (1, 1, 0)$ e $v_3 = (-2, 0, 1)$.

Para que se possa escrever u como combinação linear dos vetores $\{v_1, v_2, v_3\}$, é preciso encontrar, se existirem, números reais a , b e c tais que $u = av_1 + bv_2 + cv_3$.

Para isso, escreve-se a sentença:

$$(0, -2, 5) = a(1, 1, -1) + b(1, 1, 0) + c(-2, 0, 1),$$

de onde segue-se:

$$(0, -2, 5) = (a, a, -a) + (b, b, 0) + (-2c, 0, c) = (a + b - 2c, a + b, -a + c).$$

Da igualdade de vetores, vem:

$$\begin{cases} a + b - 2c = 0 \\ a + b = -2 \\ -a + c = 5 \end{cases}$$

Resolvendo-se, por qualquer método, este sistema linear, obtém-se:

$$a = -6, \quad b = 4 \quad \text{e} \quad c = -1.$$

Dessa forma, pode-se escrever:

$$u = -6v_1 + 4v_2 - v_3,$$

ou seja, o vetor u pode ser escrito como combinação linear dos vetores v_1 , v_2 e v_3 .

- 2) Conforme se viu no Capítulo 2, os elementos de um espaço vetorial V sobre um corpo K , independentemente de sua natureza, são chamados vetores. Também se viu que o conjunto de todos os polinômios com coeficientes reais de grau menor ou igual a n (incluindo o polinômio nulo), com as operações usuais de adição de polinômio e multiplicação por escalar, é um espaço vetorial real. Esse espaço é denotado por $(P_n(\mathbb{R}), +, \cdot)$. Considerando-se $n=2$, tem-se o espaço $(P_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$, dos polinômios de grau menor ou igual a 2, com coeficientes reais. Assim, mesmo que os elementos deste espaço sejam polinômios, eles são chamados de vetores.

Considerando-se os vetores $p_1(t) = -1 + t$, $p_2(t) = t - t^2$ e $p_3(t) = 3 + 2t^2$ deste espaço, verificar se o vetor $q(t) = 2 - 2t + 5t^2$ é combinação linear desses vetores.

Para que o vetor q possa ser escrito como combinação linear dos vetores p_1 , p_2 e p_3 é preciso encontrar números reais a , b e c tais que:

$$q(t) = ap_1(t) + bp_2(t) + cp_3(t).$$

Assim, vem:

$$2 - 2t + 5t^2 = a(-1 + t) + b(t - t^2) + c(3 + 2t^2),$$

ou seja,

$$2 - 2t + 5t^2 = (-a + at) + (bt - bt^2) + (3c + 2ct^2),$$

ou, ainda,

$$2 - 2t + 5t^2 = (-a + 3c) + (a + b)t + (-b + 2c)t^2.$$

Da igualdade de polinômios, vem:

$$\begin{cases} -a + 3c = 2 \\ a + b = -2; \\ -b + 2c = 5 \end{cases}$$

Resolvendo-se o sistema linear, obtém-se: $a = 1$, $b = -3$ e $c = 1$ e se pode escrever que:

$$q(t) = p_1(t) - 3p_2(t) + p_3(t),$$

isto é, q é uma combinação linear de p_1 , p_2 e p_3 .

- 3) Verificar se o vetor $u = (2, 1, 1)$ pode ser escrito como combinação linear dos vetores $v_1 = (1, -1, -2)$, $v_2 = (3, 2, -1)$ e $v_3 = (4, 1, -3)$.

Para que o vetor u possa ser escrito como combinação linear dos vetores $\{v_1, v_2, v_3\}$, é preciso encontrar escalares a , b e c tais que $u = av_1 + bv_2 + cv_3$. Escreve-se, então:

$$(2, 1, 1) = a(1, -1, -2) + b(3, 2, -1) + c(4, 1, -3),$$

ou seja,

$$(2, 1, 1) = (a, -a, -2a) + (3b, 2b, -b) + (4c, c, -3c),$$

isto é,

$$(2, 1, 1) = (a + 3b + 4c, -a + 2b + c, -2a - b - 3c).$$

Da igualdade de vetores, conclui-se que:

$$\begin{cases} a + 3b + 4c = 2 \\ -a + 2b + c = 1; \\ -2a - b - 3c = 1 \end{cases}$$

é preciso, agora, resolver o sistema linear obtido. A partir da 1ª equação, tem-se:

$$a = -3b - 4c + 2;$$

substituindo na 2ª e 3ª equações, vem:

$$\begin{cases} 5b + 5c = 3 \\ 5b + 5c = 5 \end{cases},$$

que demonstra uma inconsistência, pois não é possível que se tenha, ao mesmo tempo, $5b + 5c = 3$ e $5b + 5c = 5$ (se isso fosse possível, concluir-se-ia que $3 = 5$, o que é falso). Sendo o sistema impossível (ou incompatível), conclui-se que não é possível encontrar os escalares a , b e c tais que seja possível escrever $u = av_1 + bv_2 + cv_3$. Logo, o vetor u não é uma combinação linear dos vetores v_1 , v_2 e v_3 .

3.2. SUBESPAÇO GERADO

Definição: Seja S um subconjunto não vazio de um espaço vetorial V sobre um corpo K . O subespaço gerado por S é o conjunto de todos os vetores de V que se escrevem como combinação linear dos vetores de S .

Notação: $[S]$

Exemplos:

- 1) Seja $S = \{(1, 0, 2), (-1, 2, 1)\}$ um subconjunto do espaço vetorial real $\mathbb{R}^3$. Determinar o subespaço gerado por S .

É preciso determinar todos os vetores do $\mathbb{R}^3$ que podem ser escritos como combinação linear dos vetores de S . Toma-se, assim, um vetor genérico $v = (x, y, z)$ do $\mathbb{R}^3$ e escreve-se v como combinação linear dos vetores de S :

$$v = (x, y, z) = a(1, 0, 2) + b(-1, 2, 1),$$

de onde se segue que:

$$(x, y, z) = (a, 0, 2a) + (-b, 2b, b) = (a - b, 2b, 2a + b);$$

da igualdade de vetores, vem:

$$\begin{cases} x = a - b \\ y = 2b \\ z = 2a + b \end{cases}$$

A partir da segunda equação, pode-se escrever:

$$b = \frac{1}{2}y;$$

Substituindo esse valor de b na primeira equação, vem:

$$a = x + \frac{1}{2}y$$

Substituindo os valores de a e b na terceira equação, obtém-se:

$$z = 2\left(x + \frac{1}{2}y\right) + \frac{1}{2}y,$$

ou, equivalentemente:

$$4x + 3y - 2z = 0.$$

Essa é a equação de um plano que contém a origem, isto é, o ponto $(0,0,0)$ pertence ao plano. Conclui-se, assim, que o subespaço gerado por S é:

$$[S] = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 4x + 3y - 2z = 0\}.$$

Com o objetivo de exemplificar o que se obteve, considere-se um ponto qualquer do plano, por exemplo, $(1,2,5)$. Observe que este ponto satisfaz a equação do plano:

$$4 \cdot 1 + 3 \cdot 2 - 2 \cdot 5 = 0.$$

Lembra-se aqui que, a todo ponto do $\mathbb{R}^n$ e, portanto, em particular, do $\mathbb{R}^3$, associa-se um vetor, chamado vetor-posição, com origem no ponto $(0,0,0)$ e extremidade no ponto considerado, cujas coordenadas são as mesmas do próprio ponto. Assim, ao ponto $(1,2,5)$ associa-se um vetor com estas coordenadas. Mostrar-se-á que esse vetor pode ser escrito combinação linear dos vetores $(1,0,2)$ e $(-1,2,1)$, ou seja:

$$(1,2,5) = a(1,0,2) + b(-1,2,1).$$

Para encontrar os escalares a e b , usam-se as equações que permitiram encontrar a equação do plano, isto é:

$$a = x + \frac{1}{2}y \text{ e } b = \frac{1}{2}y;$$

para $x=1$ e $y=2$, obtém-se $a=2$ e $b=1$. Assim, pode-se escrever:

$$(1,2,5) = 2 \cdot (1,0,2) + 1 \cdot (-1,2,1),$$

o que mostra que o vetor de coordenadas $(1,2,5)$ é uma combinação linear dos vetores de S .

Se for considerado um outro ponto do plano obtido, por exemplo, $\left(\frac{1}{2}, 1, \frac{5}{2}\right)$,

seu vetor-posição também será uma combinação linear dos vetores de S , diferente da anterior, isto é, serão outros valores dos escalares a e b :

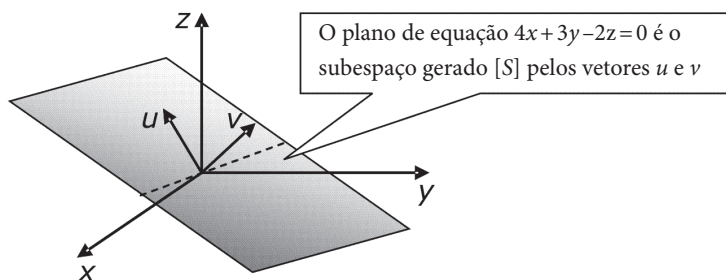
$$a = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \text{ e } b = \frac{1}{2}.$$

Assim, tem-se:

$$\left(\frac{1}{2}, 1, \frac{5}{2}\right) = 1 \cdot (1,0,2) + \frac{1}{2} \cdot (-1,2,1).$$

A representação gráfica deste subespaço é feita na Figura 3.1. Nela, os vetores de S estão designados por u e v , isto é: $u = (1, 0, 2)$ e $v = (-1, 2, 1)$.

Figura 3.1



- 2) Seja $S = \left\{ \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ um subconjunto do espaço vetorial

real das matrizes quadradas de ordem 2, isto é, do espaço $M_2(\mathbb{R})$. Determine o subespaço gerado por S .

É preciso determinar todas as matrizes quadradas de ordem 2 que podem ser escritas como combinação linear das matrizes de S . Para isso, considere-se a matriz genérica

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ do espaço $M_2(\mathbb{R})$; escreve-se essa matriz

como combinação linear das matrizes de S :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &= m \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2m & -m \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -n & 0 \\ 3n & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -p & p \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 2m - n & -m \\ 3n - p & p \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Da igualdade de matrizes, vem:

$$\begin{cases} a = 2m - n \\ b = -m \\ c = 3n - p \\ d = p \end{cases}$$

Quer-se determinar, aqui, de que tipo são as matrizes de ordem 2 que são combinações lineares das matrizes de S , ou seja, como são os elementos dessas matrizes. Na resolução do sistema linear acima, pode-se, por exemplo, obter-se o elemento a escrito em função dos demais elementos b , c e d :

$$a = -\frac{6b + c + d}{3}.$$

Assim, as matrizes de ordem 2 que são combinações lineares das matrizes de S têm a forma:

$$\begin{pmatrix} -\frac{6b + c + d}{3} & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

isto é, o subespaço gerado por S é:

$$[S] = \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{6b + c + d}{3} & b \\ c & d \end{pmatrix}; \forall b, c, d \in \mathfrak{R} \right\}.$$

Por exemplo, se $b = -1$, $c = 2$ e $d = 0$, tem-se $a = \frac{4}{3}$; assim, a matriz

$$M = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

é uma matriz do subespaço gerado por S . Logo, pode ser escrita como combinação linear das matrizes de S . De fato, usando-se as equações do sistema linear resolvido acima, obtém-se:

$$m = 1, p = 0 \text{ e } n = \frac{2}{3}$$

e, portanto, pode-se escrever:

$$\begin{pmatrix} \frac{4}{3} & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{2}{3} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Observação: os exemplos anteriores mostram como determinar o subespaço gerado $[S]$ a partir de um sistema de geradores $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$. É possível

determinar o sistema de geradores $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, a partir de um subespaço gerado $[S]$, como mostram os exemplos a seguir.

Exemplos:

- 1) Seja $W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / x = z + 2t\}$. Determinar um sistema de geradores para W .

Observe que W é um subconjunto do espaço vetorial real $\mathbb{R}^4$. Assim, o sistema de geradores para W será composto de vetores deste espaço vetorial. O que se pretende é determinar um subconjunto S do $\mathbb{R}^4$ tal que o conjunto W seja gerado por S , ou seja, $W = [S]$. Isso significa que os elementos de W serão combinações lineares dos elementos do conjunto S que se procura.

O conjunto W pode ser escrito na forma: $W = \{(z + 2t, y, z, t) \in \mathbb{R}^4\}$, ou seja, todo vetor de W é da forma $(z + 2t, y, z, t)$. Isso significa que há três “variáveis livres”, isto é, variáveis para as quais se podem atribuir valores. A primeira variável, x , não é livre, pois depende das outras três. Por exemplo, se $y = z = t = 1$, tem-se $z + 2t = 3$ e, portanto, o vetor $(3, 1, 1, 1)$ é um elemento de W .

Observando que:

$$(z + 2t, y, z, t) = (0, y, 0, 0) + (z, 0, z, 0) + (2t, 0, 0, t),$$

ou, equivalentemente,

$$(z + 2t, y, z, t) = y(0, 1, 0, 0) + z(1, 0, 1, 0) + t(2, 0, 0, 1),$$

vê-se que cada elemento de W é uma combinação linear dos vetores $(0, 1, 0, 0)$, $(1, 0, 1, 0)$ e $(2, 0, 0, 1)$. Diz-se que cada uma das variáveis livres “gerou” um vetor. Como há três variáveis livres, foram gerados três vetores, os quais formam um sistema de geradores de W . Assim, o conjunto procurado é:

$$S = \{(0, 1, 0, 0), (1, 0, 1, 0), (2, 0, 0, 1)\}$$

e pode-se afirmar que $W = [S]$.

$$2) \text{ Seja } W = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix} \in M_{3 \times 2}(\mathfrak{R}) / a + b - f = 0; c - 2b = 0; f = e = b \right\}.$$

Determinar um sistema de geradores para W .

Quer-se determinar um subconjunto S do espaço vetorial real $M_{3 \times 2}(\mathfrak{R})$ tal que W seja o subespaço gerado por S , isto é, $W = [S]$ e, portanto, todo elemento de W é uma combinação linear dos elementos de S .

Das condições impostas para os elementos das matrizes de W , conclui-se que $a = 0$ e $c = 2b$. Portanto, pode-se reescrever o conjunto W :

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b \\ 2b & d \\ b & b \end{pmatrix}, \forall b, d \in \mathfrak{R} \right\},$$

o que indica que há duas variáveis livres: b e d . Portanto, cada uma delas deverá gerar uma matriz. Tem-se:

$$\begin{pmatrix} 0 & b \\ 2b & d \\ b & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 2b & 0 \\ b & b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Logo, a matriz $\begin{pmatrix} 0 & b \\ 2b & d \\ b & b \end{pmatrix}$ é uma combinação linear das matrizes $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ e

$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, as quais formam, portanto, um sistema de geradores de W . Logo,

o conjunto procurado é:

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

e se pode afirmar que $W = [S]$.

3.3. VETORES LINEARMENTE DEPENDENTES E LINEARMENTE INDEPENDENTES

Definição: Seja V um espaço vetorial sobre um corpo K . Diz-se que os vetores $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$ são linearmente dependentes sobre K se existirem escalares $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in K$, não todos nulos, tais que $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n = \mathbf{0}$.

Em caso contrário, diz-se que os vetores são linearmente independentes sobre K .

Observações:

- 1) Se os vetores são linearmente dependentes, diz-se, de forma abreviada, que eles são LD. De modo análogo, se são linearmente independentes, diz-se que são LI.
- 2) Observe-se que a relação $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n = \mathbf{0}$ é sempre válida se os escalares α_i ($1 \leq i \leq n$) são todos nulos. Se essa relação é válida somente neste caso, isto é, se $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n = \mathbf{0}$ somente se $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$, então os vetores são linearmente independentes. Por outro lado, se a relação também é válida quando pelo menos um dos α_i ($1 \leq i \leq n$) é diferente de zero, então os vetores são linearmente dependentes.
- 3) A diferença entre um conjunto de vetores ser LI ou LD está na relação que existe entre eles: se os vetores são LD é porque existe uma “dependência” entre eles; como se verá adiante, esta dependência será uma combinação linear, o que justifica o nome da relação entre os vetores. Se os vetores são LI, não existe nenhuma “dependência” entre eles.
- 4) Se um dos vetores $v_1, v_2, \dots, v_n$ é nulo, por exemplo, se $v_1 = \mathbf{0}$, então os vetores $v_1, v_2, \dots, v_n$ são LD, pois:

$$1 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + \dots + 0 \cdot v_n = 1 \cdot \mathbf{0} + \mathbf{0} + \dots + \mathbf{0} = \mathbf{0};$$

uma vez que o coeficiente de v_1 não é nulo, conclui-se que os vetores são LD.

- 5) Qualquer vetor não nulo v é, por si só, LI, pois:

$$\alpha v = \mathbf{0}, \text{ com } v \neq \mathbf{0}, \text{ implica, necessariamente, que } \alpha = 0.$$

6) O vetor nulo $\mathbf{0}$ é LD, pois:

$\alpha \mathbf{0} = \mathbf{0}$ é verdadeira, para qualquer valor de α .

Exemplos:

1) Verificar se os vetores $u = (2, 1)$ e $v = (1, 3)$ são LD ou LI.

Têm-se, aqui, elementos do espaço vetorial real $\mathfrak{R}^2$. Para verificar a dependência linear entre os vetores, escreve-se a equação:

$$\alpha_1 u + \alpha_2 v = \mathbf{0},$$

onde α_1 e α_2 são escalares e o $\mathbf{0}$ do 2º membro é o vetor nulo: $\mathbf{0} = (0, 0)$.

Tem-se:

$$\alpha_1 (2, 1) + \alpha_2 (1, 3) = (0, 0).$$

Deve-se, agora, determinar os valores dos escalares α_1 e α_2 que tornam a sentença verdadeira. Tem-se:

$$(2\alpha_1, \alpha_1) + (\alpha_2, 3\alpha_2) = (0, 0),$$

isto é,

$$(2\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 + 3\alpha_2) = (0, 0).$$

Da igualdade de vetores, segue-se que:

$$\begin{cases} 2\alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 + 3\alpha_2 = 0 \end{cases};$$

a resolução desse sistema leva à solução trivial $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, que é única.

Assim,

$$\alpha_1 u + \alpha_2 v = \mathbf{0}$$

implica, necessariamente, em que $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ e, portanto, os vetores u e v são LI.

Observe-se que não há possibilidade de que os vetores sejam LD. Para que isso acontecesse, deveria acontecer uma das três situações abaixo:

(1) $\alpha_1 \neq 0$ e $\alpha_2 = 0$;

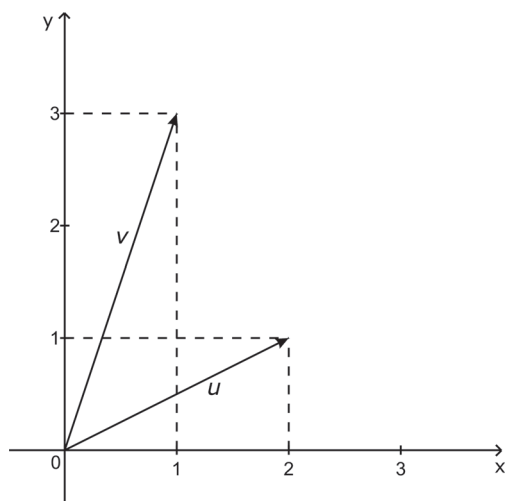
(2) $\alpha_1 = 0$ e $\alpha_2 \neq 0$;

(3) $\alpha_1 \neq 0$ e $\alpha_2 \neq 0$.

A situação (1) não pode ocorrer, pois, se $\alpha_2 = 0$, a equação $\alpha_1 u + \alpha_2 v = \mathbf{0}$ ficaria: $\alpha_1 u = \mathbf{0}$; como o vetor u não é nulo, concluir-se-ia que $\alpha_1 = 0$.

De modo análogo, se $\alpha_1 = 0$, ter-se-ia $\alpha_2 v = \mathbf{0}$ e, como v não é nulo, concluir-se-ia que $\alpha_2 = 0$, ou seja, a situação (2) também não ocorre.

Figura 3.2



Supondo-se, então, que $\alpha_1 \neq 0$ e $\alpha_2 \neq 0$, da equação $\alpha_1 u + \alpha_2 v = \mathbf{0}$ se poderia escrever:

$$u = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} v,$$

ou, chamando $-\frac{\alpha_2}{\alpha_1} = k$, $u = kv$.

Isso significaria que os vetores u e v têm a mesma direção, isto é, são paralelos, o que não é verdade. A Figura 3.2 mostra uma representação gráfica desses vetores.

- 2) Considerem-se, agora, os vetores $u = (2,1)$ e $v = (4,2)$ do $\mathbb{R}^2$. Mostrar-se-á que esses vetores são LD.

De fato, escrevendo-se a equação

$$\alpha_1 u + \alpha_2 v = \mathbf{0},$$

vem:

$$\alpha_1(2,1) + \alpha_2(4,2) = (0,0),$$

ou seja,

$$(2\alpha_1, \alpha_1) + (4\alpha_2, 2\alpha_2) = (0,0),$$

isto é,

$$(2\alpha_1 + 4\alpha_2, \alpha_1 + 2\alpha_2) = (0,0),$$

de onde se segue que:

$$\begin{cases} 2\alpha_1 + 4\alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 = 0 \end{cases}.$$

Observe-se que as duas equações do sistema se reduzem a uma só: $\alpha_1 + 2\alpha_2 = 0$, de onde se conclui que $\alpha_1 = -2\alpha_2$, ou seja, o sistema tem infinitas soluções, já que se pode atribuir a α_2 qualquer valor real e, a partir dele, obter-se o valor de α_1 . Por exemplo, são soluções do sistema:

$$\alpha_1 = 0 \text{ e } \alpha_2 = 0; \alpha_1 = -2 \text{ e } \alpha_2 = 1; \alpha_1 = -1 \text{ e } \alpha_2 = \frac{1}{2},$$

entre outras infinitas soluções.

Assim, existem escalares α_1 e α_2 , não ambos nulos, tais que a equação $\alpha_1 u + \alpha_2 v = \mathbf{0}$ é verdadeira e, portanto, os vetores u e v são LD.

Uma vez que, da resolução do sistema, concluiu-se que $\alpha_1 = -2\alpha_2$, pode-se escrever:

$$-2\alpha_2 u + \alpha_2 v = \mathbf{0},$$

ou seja,

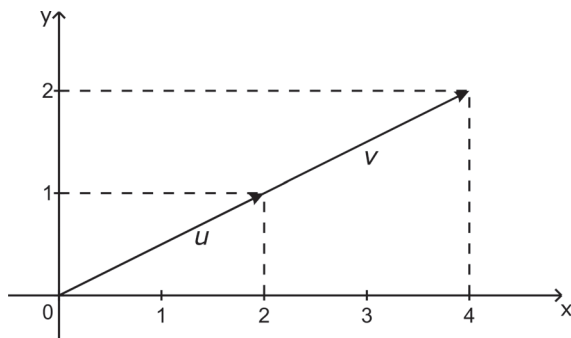
$$u = \frac{1}{2}v,$$

ou, equivalentemente,

$$v = 2u.$$

Isso significa que os vetores u e v têm a mesma direção, isto é, são paralelos. A Figura 3.3 ilustra esse fato.

Figura 3.3



- 3) Verificar se os vetores $u = (6, 2, 3, 4)$, $v = (0, 5, -3, 1)$ e $w = (0, 0, 7, -2)$ são LD ou LI.

Para verificar a dependência linear entre os vetores, escreve-se a equação:

$$\alpha_1 u + \alpha_2 v + \alpha_3 w = \mathbf{0},$$

ou seja:

$$\alpha_1 (6, 2, 3, 4) + \alpha_2 (0, 5, -3, 1) + \alpha_3 (0, 0, 7, -2) = (0, 0, 0, 0).$$

Deve-se, agora, determinar os valores dos escalares $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ que tornam a sentença verdadeira. Tem-se:

$$(6\alpha_1, 2\alpha_1, 3\alpha_1, 4\alpha_1) + (0, 5\alpha_2, -3\alpha_2, \alpha_2) + (0, 0, 7\alpha_3, -2\alpha_3) = (0, 0, 0, 0),$$

isto é,

$$(6\alpha_1, 2\alpha_1 + 5\alpha_2, 3\alpha_1 - 3\alpha_2 + 7\alpha_3, 4\alpha_1 + \alpha_2 - 2\alpha_3) = (0, 0, 0, 0).$$

Da igualdade de vetores, segue-se que:

$$\begin{cases} 6\alpha_1 = 0 \\ 2\alpha_1 + 5\alpha_2 = 0 \\ 3\alpha_1 - 3\alpha_2 + 7\alpha_3 = 0 \\ 4\alpha_1 + \alpha_2 - 2\alpha_3 = 0 \end{cases}$$

a primeira equação conduz a $\alpha_1 = 0$; a segunda, com $\alpha_1 = 0$, conduz a $\alpha_2 = 0$; a terceira, com $\alpha_1 = 0$ e $\alpha_2 = 0$, leva a $\alpha_3 = 0$. Assim,

$$\alpha_1 u + \alpha_2 v + \alpha_3 w = \mathbf{0}$$

implica em que $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$ e $\alpha_3 = 0$. Portanto, os vetores u , v e w são LI.

4) Verificar a dependência linear entre os vetores abaixo:

a) $\{1-2t, -2+t-t^2, 5t+3t^2\}$

b) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 10 & 10 \\ -5 & -2 \end{pmatrix} \right\}$

a) Aqui, os vetores são polinômios de grau menor ou igual a 2, ou seja, são elementos do espaço vetorial real $(P_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$, os quais serão chamados de $f(t)$, $g(t)$ e $h(t)$, respectivamente. Para estudar a dependência linear entre eles, escreve-se a equação homogênea:

$$af(t) + bg(t) + ch(t) = \mathbf{0}.$$

O 2º membro desta equação, isto é, $\mathbf{0}$, representa, aqui, o polinômio nulo $\mathbf{0} = 0 + 0t + 0t^2$. Tem-se, assim:

$$a(1-2t) + b(-2+t-t^2) + c(5t+3t^2) = 0 + 0t + 0t^2,$$

ou seja,

$$(a-2at) + (-2b+bt-bt^2) + (5ct+3ct^2) = 0 + 0t + 0t^2,$$

ou, ainda,

$$(a-2b) + (-2a+b+5c)t + (-b+3c)t^2 = 0 + 0t + 0t^2.$$

Da igualdade de polinômios, vem:

$$\begin{cases} a-2b=0 \\ -2a+b+5c=0 \\ -b+3c=0 \end{cases}$$

A resolução desse sistema, por qualquer método que se utilize, leva à solução trivial, ou seja, $a = b = c = 0$. Assim, a equação

$$af(t) + bg(t) + ch(t) = \mathbf{0}$$

implica em que $a = b = c = 0$ e, portanto, os vetores $f(t)$, $g(t)$ e $h(t)$ são LI.

- b) Nesse caso, os vetores são matrizes quadradas de ordem 2, ou seja, são elementos do espaço vetorial real $M_2(\mathbb{R})$. Chamando:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 5 & 9 \end{pmatrix} \text{ e } C = \begin{pmatrix} 10 & 10 \\ -5 & -2 \end{pmatrix}$$

e considerando-se escalares α , β e γ , escreve-se a equação homogênea:

$$\alpha A + \beta B + \gamma C = \mathbf{0}.$$

Aqui, o $\mathbf{0}$ que figura no 2º membro da equação representa a matriz

nula de ordem 2, ou seja, $\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Então, vem:

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 5 & 9 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 10 & 10 \\ -5 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

ou seja,

$$\begin{pmatrix} \alpha & 2\alpha \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3\beta & 4\beta \\ 5\beta & 9\beta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10\gamma & 10\gamma \\ -5\gamma & -2\gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ou, ainda,

$$\begin{pmatrix} \alpha - 3\beta + 10\gamma & 2\alpha + 4\beta + 10\gamma \\ 5\beta - 5\gamma & \alpha + 9\beta - 2\gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Da igualdade de matrizes, vem:

$$\begin{cases} \alpha - 3\beta + 10\gamma = 0 \\ 2\alpha + 4\beta + 10\gamma = 0 \\ 5\beta - 5\gamma = 0 \\ \alpha + 9\beta - 2\gamma = 0 \end{cases}$$

Da 3ª equação, tem-se que $\beta = \gamma$; substituindo na 1ª equação, obtém-se que $\alpha = -7\gamma$. Substituindo-se na 2ª equação, obtém-se: $0 \cdot \gamma = 0$, que é verdadeira para qualquer número real γ . De modo análogo, se substituir-se $\beta = \gamma$ e $\alpha = -7\gamma$ na 4ª equação, obtém-se $0 \cdot \gamma = 0$. Conclui-se, então, que o sistema tem infinitas soluções, já que γ pode assumir qualquer valor e α e β dependem de γ . A solução (na verdade, as infinitas soluções) do sistema pode ser colocada na forma:

$$\{\alpha = -7\gamma \text{ e } \beta = \gamma, \forall \gamma \in \mathbb{R}\}.$$

Por exemplo, se $\gamma = 2$, tem-se $\alpha = -14$ e $\beta = 2$, ou seja, $(-14, 2, 2)$ é uma solução do sistema. Para essa solução, tem-se:

$$\begin{aligned} -14 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 5 & 9 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 10 & 10 \\ -5 & -2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -14 & -28 \\ 0 & -14 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 & 8 \\ 10 & 18 \end{pmatrix} + \\ + \begin{pmatrix} 20 & 20 \\ -10 & -4 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Assim, existem escalares não nulos que tornam verdadeira a equação $\alpha A + \beta B + \gamma C = \mathbf{0}$, ou seja, as matrizes A , B e C são LD.

Teorema: Seja V um espaço vetorial sobre um corpo K . Um conjunto de vetores $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$ é LD se, e somente se, um deles é combinação linear dos demais vetores.

Observação: este é um teorema de condição necessária e suficiente; o termo “se, e somente se” significa que o teorema tem duas implicações:

(i) “se um conjunto de vetores é LD, então um deles é combinação linear dos demais vetores”

e

(ii) “se, em um conjunto de vetores, um deles é combinação linear dos demais, então esses vetores são LD”.

Assim, a demonstração do teorema contém duas partes: uma para demonstrar a condição necessária (i) e a outra para demonstrar a condição suficiente (ii).

Demonstração:**(i) Condição necessária**

Hipótese: os vetores $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$ são LD

Tese: um deles é combinação linear dos demais vetores

Se, por hipótese, os vetores $v_1, v_2, \dots, v_n$ são LD, então, existem escalares $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, não todos nulos, tais que:

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n = \mathbf{0}.$$

Supondo, por exemplo, que $\alpha_1 \neq 0$, pode-se escrever:

$$v_1 = \left(-\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \right) v_2 + \left(-\frac{\alpha_3}{\alpha_1} \right) v_3 + \dots + \left(-\frac{\alpha_n}{\alpha_1} \right) v_n;$$

chamando:

$$\beta_2 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1}; \beta_3 = -\frac{\alpha_3}{\alpha_1}; \dots; \beta_n = -\frac{\alpha_n}{\alpha_1}, \text{ vem:}$$

$$v_1 = \beta_2 v_2 + \beta_3 v_3 + \dots + \beta_n v_n,$$

e, portanto, o vetor v_1 é combinação linear dos demais vetores.

Observe-se que, assim como se supôs que $\alpha_1 \neq 0$ e se mostrou que v_1 é combinação linear dos demais vetores, pode-se supor que qualquer um dos escalares α_i ($1 \leq i \leq n$) é diferente de zero e concluir-se que v_i é combinação linear dos demais vetores.

(ii) Condição suficiente

Hipótese: um dos vetores é combinação linear dos demais vetores

Tese: os vetores $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$ são LD

Por hipótese, um dos vetores é combinação linear dos demais; pode-se supor, por exemplo, que esse seja o vetor v_1 . Isso significa que existem escalares $\beta_2, \beta_3, \dots, \beta_n$ tais que:

$$v_1 = \beta_2 v_2 + \beta_3 v_3 + \dots + \beta_n v_n;$$

pode-se escrever, equivalentemente:

$$(-1)v_1 + \beta_2 v_2 + \beta_3 v_3 + \dots + \beta_n v_n = \mathbf{0}.$$

Sendo o escalar que multiplica o vetor v_1 não nulo, já que é igual a -1, conclui-se que os vetores $v_1, v_2, \dots, v_n$ são LD.

É claro que, fazendo-se a suposição de que qualquer vetor v_i ($1 \leq i \leq n$) seja combinação linear dos outros vetores, concluir-se-á, de maneira análoga, que os vetores $v_1, v_2, \dots, v_n$ são LD.

Exemplo: Mostrou-se, em exemplo anterior, que o conjunto de matrizes

$$\left\{ A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 10 & 10 \\ -5 & -2 \end{pmatrix} \right\}$$

é LD. Portanto, pelo teorema anterior, uma delas é combinação linear das outras duas. Escrever-se-á uma das matrizes como combinação linear das demais.

Uma das maneiras de se fazer isso, é escrever a equação:

$$\alpha A + \beta B + \gamma C = \mathbf{0},$$

lembrando que o $\mathbf{0}$ que figura no segundo membro da equação representa a matriz nula de ordem 2. Então:

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 5 & 9 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 10 & 10 \\ -5 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

de onde vem que:

$$\begin{pmatrix} \alpha - 3\beta + 10\gamma & 2\alpha + 4\beta + 10\gamma \\ 5\beta - 5\gamma & \alpha + 9\beta - 2\gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Da igualdade de matrizes, segue-se que:

$$\begin{cases} \alpha - 3\beta + 10\gamma = 0 \\ 2\alpha + 4\beta + 10\gamma = 0 \\ 5\beta - 5\gamma = 0 \\ \alpha + 9\beta - 2\gamma = 0 \end{cases};$$

Da terceira equação, conclui-se que $\beta = \gamma$; substituindo-se essa informação em qualquer outra das três equações restantes, obtém-se a relação $\alpha + 7\gamma = 0$,

isto é, $\alpha = -7\gamma$. Atribuindo-se um valor numérico a γ , por exemplo, $\gamma = -1$, obtém-se $\beta = -1$ e $\alpha = 7$. Assim, pode-se escrever:

$$7A - B - C = 0.$$

Essa equação mostra que as matrizes A , B e C são LD. A partir dela, pode-se escrever, por exemplo: $C = 7A - B$.

Esta última equação mostra a matriz C escrita como uma combinação linear das matrizes A e B .

Outra forma de encontrar uma combinação linear entre as matrizes, é escolher uma delas para ser escrita como uma combinação linear das outras. Por exemplo, escrevendo a matriz C como combinação linear das matrizes A e B , tem-se:

$$C = \alpha A + \beta B;$$

então, vem:

$$\begin{pmatrix} 10 & 10 \\ -5 & -2 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 5 & 9 \end{pmatrix},$$

isto é,

$$\begin{pmatrix} 10 & 10 \\ -5 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 2\alpha \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3\beta & 4\beta \\ 5\beta & 9\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha - 3\beta & 2\alpha + 4\beta \\ 5\beta & \alpha + 9\beta \end{pmatrix}.$$

Da igualdade de matrizes, segue-se que:

$$\begin{cases} \alpha - 3\beta = 10 \\ 2\alpha + 4\beta = 10 \\ 5\beta = -5 \\ \alpha + 9\beta = -2 \end{cases}.$$

Da 3ª equação, segue-se que $\beta = -1$; substituindo-se esse valor em qualquer uma das outras três equações, obtém-se $\alpha = 7$. Assim, pode-se escrever:

$$C = 7A - B.$$

Teorema: Se $v_1, v_2, \dots, v_n$ são vetores LD, então, os vetores $v_1, v_2, \dots, v_k$ são LD, para todo $k \geq n$.

Demonstração:

Hipótese: os vetores $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$ são LD

Tese: os vetores $v_1, v_2, \dots, v_k$ são LD, para todo $k \geq n$

Por hipótese, os vetores $v_1, v_2, \dots, v_n$ são LD; então, existem escalares $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, não todos nulos, tais que:

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n = \mathbf{0}.$$

A esse conjunto de n vetores, acrescentem-se mais $k - n$ ($k \geq n$) vetores, isto é, considere-se, agora, o conjunto:

$$\{v_1, v_2, \dots, v_n, v_{n+1}, v_{n+2}, \dots, v_k\}.$$

Escrevendo-se a equação:

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n + \alpha_{n+1} v_{n+1} + \alpha_{n+2} v_{n+2} + \dots + \alpha_k v_k = \mathbf{0},$$

conclui-se, a partir dela, que os vetores $v_1, v_2, \dots, v_n, v_{n+1}, v_{n+2}, \dots, v_k$ são LD, pois, mesmo que os escalares $\alpha_{n+1}, \alpha_{n+2}, \dots, \alpha_k$ sejam todos nulos, entre os escalares $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ há pelo menos um deles que não é nulo, já que os vetores $v_1, v_2, \dots, v_n$ são LD. Logo, o conjunto de vetores $\{v_1, v_2, \dots, v_n, v_{n+1}, v_{n+2}, \dots, v_k\}$ é LD.

Observações:

- 1) Por esse teorema, conclui-se que, se um conjunto de vetores é LD, aumentando-se o número de vetores deste conjunto, o novo conjunto será LD.
- 2) Observe-se que o teorema é apenas de condição necessária, ou seja, a recíproca não é verdadeira. Isso significa que, se um conjunto de n vetores $v_1, v_2, \dots, v_n$ é LD, isso não implica que o conjunto de vetores $v_1, v_2, \dots, v_m$ é LD, para $m \leq n$. Assim, quando se sabe que um conjunto de vetores é LD, se forem retirados desse conjunto um ou mais vetores, não se pode afirmar que o novo conjunto seja LD.

Exemplo:

Considere o conjunto $A = \{v_1 = (1, 0), v_2 = (0, 1), v_3 = (1, 1), v_4 = (1, 2)\}$ de vetores do $\mathbb{R}^2$.

Tem-se:

$$v_1 + v_2 = (1, 0) + (0, 1) = (1, 1) = v_3;$$

Assim, pode-se escrever:

$$v_3 = 1 \cdot v_1 + 1 \cdot v_2 + 0 \cdot v_4,$$

ou seja, v_3 é combinação linear dos demais, de onde se conclui que o conjunto A é LD. Pode-se ver, ainda, que v_4 é combinação linear dos demais vetores, pois:

$$v_1 + 2v_2 = (1, 0) + 2(0, 1) = (1, 2) = v_4,$$

isto é,

$$v_4 = 1 \cdot v_1 + 2 \cdot v_2 + 0 \cdot v_3.$$

Acrescentando-se ao conjunto A um vetor qualquer $u = (x, y)$ do $\mathbb{R}^2$, vê-se que as combinações lineares já existentes continuarão a existir, pois:

$$v_3 = 1 \cdot v_1 + 1 \cdot v_2 + 0 \cdot v_4 = 1 \cdot v_1 + 1 \cdot v_2 + 0 \cdot v_4 + 0 \cdot u$$

e

$$v_4 = 1 \cdot v_1 + 2 \cdot v_2 + 0 \cdot v_3 = 1 \cdot v_1 + 2 \cdot v_2 + 0 \cdot v_3 + 0 \cdot u.$$

Assim, o conjunto A continuará sendo um conjunto de vetores LD.

Por outro lado, retirando-se vetores do conjunto A , não se pode garantir que o conjunto continue sendo LD ou passe a ser LI.

De fato, retirando-se de A o vetor v_4 , obtém-se um novo conjunto:

$$B = \{v_1 = (1, 0), v_2 = (0, 1), v_3 = (1, 1)\},$$

o qual também é LD, já que, como se mostrou anteriormente, o vetor v_3 é combinação linear de v_1 e v_2 .

Entretanto, retirando-se de A os vetores v_3 e v_4 , obtém-se um novo conjunto

$$C = \{v_1 = (1, 0), v_2 = (0, 1)\},$$

que é LI, pois, escrevendo-se a equação:

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 = \mathbf{0},$$

vem:

$$\alpha_1 (1, 0) + \alpha_2 (0, 1) = (0, 0),$$

isto é,

$$(\alpha_1, 0) + (0, \alpha_2) = (0, 0),$$

de onde se segue que $\alpha_1 = 0$ e $\alpha_2 = 0$ e, portanto v_1 e v_2 são LI.

Teorema: Se $v_1, v_2, \dots, v_n$ são vetores LI, então, os vetores $v_1, v_2, \dots, v_k$ são LI, para todo $k \leq n$.

Demonstração:

Hipótese: os vetores $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$ são LI

Tese: os vetores $v_1, v_2, \dots, v_k$ são LI, para todo $k \leq n$

Por hipótese, os vetores $v_1, v_2, \dots, v_n$ são LI; então, a equação

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n = \mathbf{0}$$

é verdadeira somente se $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$.

Tomando-se um índice $k \leq n$, considere-se o conjunto

$$\{v_1, v_2, \dots, v_k\} \subset \{v_1, v_2, \dots, v_n\}.$$

Da equação:

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_k v_k = \mathbf{0},$$

segue-se que $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k = 0$, pois os vetores $v_1, v_2, \dots, v_n$ são LI e os vetores $v_1, v_2, \dots, v_k$ estão entre eles. Portanto, conclui-se que os vetores $v_1, v_2, \dots, v_k$ são LI, o que demonstra o teorema.

Observação:

- 1) Por esse teorema, conclui-se que, se um conjunto de vetores é LI, diminuindo-se o número de vetores deste conjunto, o novo conjunto também será LI.
- 2) O teorema é apenas de condição necessária, isto é, a recíproca não é verdadeira. Isso significa que, se um conjunto de n vetores $v_1, v_2, \dots, v_n$ é LI, isso não implica que o conjunto de vetores $v_1, v_2, \dots, v_m$ é LI, para $m \geq n$. Assim, quando se sabe que um conjunto de vetores é LI, se forem acrescentados a esse conjunto um ou mais vetores, não se pode afirmar que o novo conjunto é LI.

Exemplo:

Considere-se o conjunto $A = \{v_1 = (1, 0, 0), v_2 = (0, 1, 0)\}$ do $\mathfrak{R}^3$, o qual é LI, pois, se

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 = \mathbf{0},$$

vem:

$$\alpha_1 (1, 0, 0) + \alpha_2 (0, 1, 0) = (0, 0, 0),$$

isto é,

$$(\alpha_1, 0, 0) + (0, \alpha_2, 0) = (0, 0, 0),$$

de onde se segue que $\alpha_1 = 0$ e $\alpha_2 = 0$ e, portanto v_1 e v_2 são LI.

Retirando-se de A o vetor v_2 , obtém-se o conjunto

$$B = \{v_1 = (1, 0, 0)\},$$

que é também LI.

Entretanto, acrescentando-se um ou mais vetores ao conjunto A , não se pode afirmar que o novo conjunto seja LI. De fato, acrescentando-se a A o vetor $w = (0, 0, 1)$, obtém-se o conjunto

$$C = \{v_1 = (1, 0, 0), v_2 = (0, 1, 0), w = (0, 0, 1)\},$$

o qual é ainda LI, pois, se

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 w = \mathbf{0},$$

tem-se:

$$\alpha_1 (1, 0, 0) + \alpha_2 (0, 1, 0) + \alpha_3 (0, 0, 1) = (0, 0, 0),$$

isto é,

$$(\alpha_1, 0, 0) + (0, \alpha_2, 0) + (0, 0, \alpha_3) = (0, 0, 0),$$

de onde se segue que $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ e, portanto v_1 , v_2 e w são LI.

Acrescentando-se, agora, a C o vetor $u = (1, 2, -1)$, obtém-se o conjunto $D = \{v_1 = (1, 0, 0), v_2 = (0, 1, 0), w = (0, 0, 1), u = (1, 2, -1)\}$.

Verificar-se-á que este novo conjunto é LD. De fato, escrevendo-se a equação

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 w + \alpha_4 u = \mathbf{0},$$

vem:

$$\alpha_1(1,0,0) + \alpha_2(0,1,0) + \alpha_3(0,0,1) + \alpha_4(1,2,-1) = (0,0,0),$$

isto é,

$$(\alpha_1, 0, 0) + (0, \alpha_2, 0) + (0, 0, \alpha_3) + (\alpha_4, 2\alpha_4, -\alpha_4) = (0, 0, 0),$$

ou seja,

$$(\alpha_1 + \alpha_4, \alpha_2 + 2\alpha_4, \alpha_3 - \alpha_4) = (0, 0, 0),$$

de onde se segue que

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_4 = 0 \\ \alpha_2 + 2\alpha_4 = 0 \\ \alpha_3 - \alpha_4 = 0 \end{cases}$$

Resolvendo-se esse sistema linear, obtém-se:

$$\begin{cases} \alpha_1 = -\alpha_4 \\ \alpha_2 = -2\alpha_4; \\ \alpha_3 = \alpha_4 \end{cases}$$

atribuindo-se um valor a α_4 , por exemplo, -1, vem:

$$\begin{cases} \alpha_1 = 1 \\ \alpha_2 = 2 \\ \alpha_3 = -1 \end{cases}$$

e pode-se escrever:

$$1 \cdot v_1 + 2 \cdot v_2 - 1 \cdot w - 1 \cdot u = 0,$$

ou seja, os vetores são LD.

3.4. EXERCÍCIOS PROPOSTOS

- 1) Verificar se os vetores são LI ou LD. Se forem LD, escrever um deles como combinação linear dos outros.

a) $\{a = (2, -2), b = (1, 5), c = (-3, 1)\}$

R: LD; $a = -\frac{1}{4}b - \frac{3}{4}c$

$$\text{b)} \left\{ \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{R: LI}$$

- 2) Determinar os valores de m para que os vetores $(m+2, 1, 3)$, $(-2, m, 1)$ e $(2, 2, -1)$ sejam LD. R: $m = -2$ ou $m = -8$

- 3) Determinar o subespaço gerado pelo conjunto $S = \{2 - 3t, 3 - 2t^2\}$.

$$\text{R: } [S] = \{a_0 + a_1t + a_2t^2 \in P_2(\mathbb{R}) / 6a_0 + 4a_1 + 9a_2 = 0\}$$

- 4) Seja $W = \{a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3 \in P_3(\mathbb{R}) / a_0 + 3a_1 - 5a_2 = a_2 + 2a_3 = 0\}$.

Determinar um sistema de geradores para W .

$$\text{R: } S = \left\{ -3 + t, 5 + t^2 - \frac{1}{2}t^3 \right\}$$

- 5) Sabendo que o conjunto $\{u, v, w\}$ é LI, mostrar que $\{u + v, v + w, u + w\}$ também é LI.

4

BASE E DIMENSÃO

4.1. INTRODUÇÃO

Em muitas aplicações, não é interessante trabalhar com um espaço vetorial “inteiro”, mas com uma parte deste espaço, ou seja, um subespaço, que seja constituído pelas combinações lineares de um dado conjunto de vetores. Será, então, conveniente, escrever os elementos desse subespaço como combinações lineares de um conjunto que contenha o menor número possível de vetores e que estes sejam escritos de forma simplificada. Este capítulo tratará desse assunto.

4.2. BASE

Definição: Uma base de um espaço vetorial V sobre um corpo K é um subconjunto finito $B \subset V$, satisfazendo as condições:

- a) B gera V , ou seja, o subespaço gerado por B é igual a V .
- b) B é LI.

Exemplos:

- 1) Verificar se o conjunto $B = \{(1, 2, 3), (0, 1, 2), (1, -1, 2)\}$ é uma base do espaço vetorial real $\mathfrak{R}^3$.

É preciso mostrar que são satisfeitas as duas condições da definição.

- a) Seja $v = (x, y, z)$ um vetor genérico do $\mathfrak{R}^3$. Mostrar-se-á que esse vetor se escreve como combinação linear dos vetores de B . Para isso, escreve-se a combinação linear:

$$v = (x, y, z) = a(1, 2, 3) + b(0, 1, 2) + c(1, -1, 2)$$

e mostra-se que é possível encontrar os escalares a , b e c que tornam a equação verdadeira. Tem-se:

$$(x, y, z) = (a, 2a, 3a) + (0, b, 2b) + (c, -c, 2c) = (a + c, 2a + b - c, 3a + 2b + 2c).$$

Da igualdade de vetores, vem:

$$\begin{cases} a + c = x \\ 2a + b - c = y \\ 3a + 2b + 2c = z \end{cases};$$

Resolve-se esse sistema, com o objetivo de se determinar os escalares a , b e c , obtendo-se:

$$\begin{cases} a = \frac{4x + 2y - z}{5} \\ b = \frac{-7x - y + 3z}{5} \\ c = \frac{x - 2y + z}{5} \end{cases}.$$

Observa-se, assim, que o sistema tem solução, isto é, para cada vetor (x, y, z) do $\mathfrak{R}^3$, tem-se um valor para a , b e c , ou seja, todo vetor do $\mathfrak{R}^3$ pode ser escrito como combinação linear dos vetores de B . Logo, B gera o $\mathfrak{R}^3$.

- b) Mostrar-se-á que os vetores de B são LI. Para isso, escreve-se a equação:

$$a(1, 2, 3) + b(0, 1, 2) + c(1, -1, 2) = (0, 0, 0),$$

de onde vem que:

$$(a + c, 2a + b - c, 3a + 2b + 2c) = (0, 0, 0).$$

Portanto:

$$\begin{cases} a + c = 0 \\ 2a + b - c = 0 \\ 3a + 2b + 2c = 0 \end{cases}.$$

A resolução desse sistema, por qualquer método, leva à solução trivial: $a = b = c = 0$, mostrando que os vetores são LI.

De (a) e (b), conclui-se que o conjunto B é uma base do $\mathfrak{R}^3$.

Observe-se que esses vetores não são coplanares (isto é, não pertencem a um mesmo plano), pois, resolvendo-se o determinante de 3ª ordem, cujas linhas são constituídas pelas coordenadas dos três vetores, tem-se:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = (2 + 4 + 0) - (3 - 2 + 0) = 5.$$

Sendo o determinante diferente de zero, conclui-se, por resultado da Geometria Analítica, que os vetores não são coplanares. Verificou-se, assim, que os vetores de B são LI e não são coplanares.

Esse resultado pode ser generalizado: três vetores não coplanares do $\mathfrak{R}^3$ são LI.

- 2) Verificar se o conjunto $B = \{2 + t - t^2, t + t^2\}$ é uma base do espaço vetorial real $P_2(\mathfrak{R})$, com as operações usuais de adição de polinômios e multiplicação por escalar.

Verificar-se-á, neste exemplo, que, embora os vetores (que, aqui, são polinômios de grau menor ou igual a 2, com coeficientes reais) sejam LI, eles não geram o espaço $P_2(\mathfrak{R})$.

De fato, escrevendo-se a equação:

$$a(2 + t - t^2) + b(t + t^2) = 0 + 0 \cdot t + 0 \cdot t^2,$$

vem:

$$2a + (a + b)t + (-a + b)t^2 = 0 + 0 \cdot t + 0 \cdot t^2.$$

Da igualdade de polinômios, obtém-se o sistema:

$$\begin{cases} 2a = 0 \\ a + b = 0 \\ -a + b = 0 \end{cases},$$

que admite apenas a solução trivial $a = b = 0$. Logo, o conjunto B é LI.

Para verificar se o conjunto B gera o espaço $P_2(\mathfrak{R})$, é preciso verificar se todo elemento desse espaço é combinação linear dos elementos de B . Toma-se, assim, um elemento genérico $a_0 + a_1t + a_2t^2$ de $P_2(\mathfrak{R})$ e escreve-se a equação:

$$a_0 + a_1t + a_2t^2 = \alpha(2 + t - t^2) + \beta(t + t^2);$$

o objetivo é verificar se é possível encontrar os escalares α e β que tornem essa equação verdadeira. Tem-se:

$$a_0 + a_1t + a_2t^2 = 2\alpha + (\alpha + \beta)t + (-\alpha + \beta)t^2,$$

e, portanto,

$$\begin{cases} a_0 = 2\alpha \\ a_1 = \alpha + \beta \\ a_2 = -\alpha + \beta \end{cases}.$$

Da 1ª equação, segue-se que $\alpha = \frac{1}{2}a_0$. Substituindo-se esse valor na 2ª equação, obtém-se:

$\beta = a_1 - \frac{1}{2}a_0$. Esses valores de α e β substituídos na 3ª equação levam ao resultado:

$$a_2 = -\frac{1}{2}a_0 + a_1 - \frac{1}{2}a_0 = -a_0 + a_1.$$

Isso mostra que os elementos de B geram apenas os polinômios de $P_2(\mathfrak{R})$ que satisfazem a relação $a_2 = -a_0 + a_1$, isto é, o subespaço vetorial gerado por B é:

$$[B] = \{a_0 + a_1t + a_2t^2 \in P_2(\mathfrak{R}) / a_2 = -a_0 + a_1\},$$

que está contido em $P_2(\mathfrak{R})$, ou seja, B gera apenas uma parte de $P_2(\mathfrak{R})$.

Por exemplo, o polinômio $1 + 5t + 4t^2 \in [B]$, pois $4 = -1 + 5$, isto é, está satisfeita, para os coeficientes desse polinômio, a relação $a_2 = -a_0 + a_1$. Logo, esse polinômio pode ser escrito como combinação linear dos polinômios de B :

$$1 + 5t + 4t^2 = \frac{1}{2}(2 + t - t^2) + \frac{9}{2}(t + t^2).$$

Por outro lado, o polinômio $1 + 5t + 7t^2$ é um elemento de $P_2(\mathfrak{R})$, mas não pertence a $[B]$, pois seus coeficientes não satisfazem a relação $a_2 = -a_0 + a_1$. Pode-se ver que esse polinômio não é uma combinação linear dos elementos de B , pois, escrevendo-se a equação

$$1 + 5t + 7t^2 = \alpha(2 + t - t^2) + \beta(t + t^2),$$

obtem-se:

$$1 + 5t + 7t^2 = 2\alpha + (\alpha + \beta)t + (-\alpha + \beta)t^2,$$

da qual se segue:

$$\begin{cases} 1 = 2\alpha \\ 5 = \alpha + \beta \\ 7 = -\alpha + \beta \end{cases}.$$

Da 1ª equação, tem-se que $\alpha = \frac{1}{2}$; substituindo-se esse valor na 2ª equação, obtém-se $\beta = \frac{9}{2}$; entretanto, substituindo-se na 3ª equação, obtém-se $\beta = \frac{15}{2}$, ou seja, o sistema é incompatível, mostrando que não é possível encontrar escalares α e β que tornem verdadeira a equação

$$1 + 5t + 7t^2 = \alpha(2 + t - t^2) + \beta(t + t^2).$$

Se nem todos os elementos de $P_2(\mathfrak{R})$ podem ser escritos como combinação linear dos elementos de B , conclui-se que esse conjunto não é uma base desse espaço vetorial.

Observações:

- 1) Conforme se viu no Capítulo 2, o vetor nulo é LD. Assim, considerando-se o espaço vetorial nulo, isto é, o espaço vetorial que contém apenas o vetor nulo, este não possui base.
- 2) Todos os demais espaços vetoriais possuem infinitas bases. De todas estas infinitas bases, uma delas é considerada a mais simples e chamada de base canônica.

As bases canônicas dos principais espaços vetoriais são:

- $\mathfrak{R} : \{1\}$
- $\mathfrak{R}^2 : \{(1,0), (0,1)\}$
- $\mathfrak{R}^3 : \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$
- $\vdots$

- $\mathfrak{R}^n : \left\{ \underbrace{(1, 0, \dots, 0), (0, 1, \dots, 0), \dots, (0, 0, \dots, 1)}_{n \text{ vetores com } n \text{ coordenadas}} \right\}$
- $M_2(\mathfrak{R}) : \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$
- $P_n(\mathfrak{R}) : \{1, t, t^2, \dots, t^n\}.$

Processo prático para obter uma base de um subespaço do $\mathfrak{R}^n$

A base será encontrada a partir do conjunto de geradores $S = [u_1, u_2, \dots, u_r] \subset \mathfrak{R}^n$, considerando-se as seguintes propriedades:

- 1) permutando-se dois dos vetores do conjunto, não se altera o espaço gerado;
- 2) multiplicando-se um dos vetores do conjunto por um escalar não nulo α , não se altera o subespaço gerado, isto é:

$$[u_1, u_2, \dots, u_i, \dots, u_r] = [u_1, u_2, \dots, \alpha u_i, \dots, u_r];$$

- 3) somando-se um dos vetores do conjunto com um outro vetor do conjunto multiplicado por um escalar não nulo α , não se altera o subespaço gerado, isto é:

$$[u_1, u_2, \dots, u_i, \dots, u_r] = [u_1, u_2, \dots, u_i, u_j + \alpha u_i, \dots, u_r] \quad (1 \leq i \leq r); \quad (1 \leq j \leq r);$$

- 4) se $u_1, u_2, \dots, u_r$ se apresenta na forma escalonada, ou seja, se o número de zeros iniciais de u_2 é maior do que o de u_1 e, assim, sucessivamente, então os vetores $u_1, u_2, \dots, u_r$ são LI.

Dessa forma, o processo consiste em dispor os vetores de um sistema de geradores do espaço vetorial como linhas de uma matriz e escaloná-la. As linhas não nulas da matriz resultante do escalonamento serão vetores LI, os quais formarão a base procurada.

Exemplo: Seja W um subespaço do $\mathfrak{R}^4$ que possui o seguinte sistema de geradores:

$$[(2, 1, 1, 0), (1, 0, 1, 2), (0, -1, 1, 4), (3, 0, 3, 6)].$$

Determinar uma base para W .

Constrói-se uma matriz com os vetores do conjunto de geradores, considerados em uma ordem qualquer. Aqui, colocou-se o vetor $(1,0,1,2)$ na primeira linha, para facilitar o escalonamento da matriz que se fará a seguir:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Escalonando-se a matriz por linhas, vem:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 3 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{-2L_1+L_2 \\ -3L_1+L_4}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2+L_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Retirando-se as linhas nulas, restam os vetores $(1,0,1,2)$ e $(0,1,-1,-4)$. Logo, de acordo com o processo acima, esses vetores formam uma base para W , isto é, o conjunto $W = \{(1,0,1,2), (0,1,-1,-4)\}$ é uma base de W .

De fato, os vetores são LI, pois, da equação

$$a(1,0,1,2) + b(0,1,-1,-4) = (0,0,0,0),$$

vem:

$$(a, 0, a, 2a) + (0, b, -b, -4b) = (0, 0, 0, 0),$$

ou seja,

$$(a, b, a - b, 2a - 4b) = (0, 0, 0, 0),$$

de onde se segue que $a = b = 0$ e, portanto, os vetores são LI.

Por outro lado, considerando-se um vetor genérico (x, y, z, w) de $W \subset \mathbb{R}^4$ e escrevendo-se:

$$(x, y, z, w) = \alpha(1,0,1,2) + \beta(0,1,-1,-4),$$

vem:

$$(x, y, z, w) = (\alpha, 0, \alpha, 2\alpha) + (0, \beta, -\beta, -4\beta),$$

isto é,

$$(x, y, z, w) = (\alpha, \beta, \alpha - \beta, 2\alpha - 4\beta).$$

Então:

$$\begin{cases} x = \alpha \\ y = \beta \\ z = \alpha - \beta \\ w = 2\alpha - 4\beta \end{cases}.$$

Portanto, um vetor genérico de W tem suas coordenadas escritas em função de α e β . Atribuindo-se, aleatoriamente, valores aos escalares α e β , obtém-se vetores de W . Por exemplo, se $\alpha = 1$ e $\beta = 2$, obtém-se o vetor $(1, 2, -1, -6)$, que é uma combinação linear dos vetores da base:

$$(1, 2, -1, -6) = 1 \cdot (1, 0, 1, 2) + 2 \cdot (0, 1, -1, -4).$$

Se $\alpha = 0$ e $\beta = 0$, obtém-se o vetor nulo $(0, 0, 0, 0)$; se $\alpha = -2$ e $\beta = \frac{1}{2}$, obtém-se o vetor $\left(-2, \frac{1}{2}, -\frac{5}{2}, -6\right)$ e assim por diante. Logo, os vetores $(1, 0, 1, 2)$ e $(0, 1, -1, -4)$ geram W e, portanto, o conjunto $W = \{(1, 0, 1, 2), (0, 1, -1, -4)\}$ é uma base de W .

Definição: Seja V um espaço vetorial sobre um corpo K . Um conjunto de vetores $\{v_1, v_2, \dots, v_n\} \subset V$ é dito LI-maximal se:

- a) $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ é LI
- b) $\{v_1, v_2, \dots, v_n, w\}$ é LD, $\forall w \in V$

Proposição: Um conjunto de vetores $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ é base de um espaço vetorial V se for LI-maximal.

Demonstração:

Hipótese: o conjunto $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ é LI-maximal

Tese: o conjunto $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ é base de V

Se, por hipótese, o conjunto de vetores o conjunto $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ é LI-maximal, então, por definição, o conjunto é LI. Para mostrar que o conjunto $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ é base de V , resta mostrar que o conjunto gera V .

De fato, tomando-se um vetor genérico $u \in V$, tem-se que o conjunto $\{v_1, v_2, \dots, v_n, u\}$ é LD, pois $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ é LI-maximal. Portanto, um dos vetores é uma combinação linear dos demais vetores do conjunto. Ora, o único vetor que pode ser escrito como combinação linear dos demais é u , já que $v_1, v_2, \dots, v_n$ são LI. Conclui-se, assim, que $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ gera V e, portanto, é uma base de V .

4.3. DIMENSÃO

Definição: Seja V um espaço vetorial finitamente gerado. Denomina-se dimensão do espaço V , o número de vetores de qualquer uma de suas bases.

Notação: $\dim(V)$

Observações:

- 1) Se o número de vetores de uma base de um espaço vetorial é finito, diz-se que o espaço é de dimensão finita. Neste texto, não serão estudados os espaços de dimensão infinita.
- 2) As dimensões dos principais espaços vetoriais são:
 - $\dim(\{\mathbf{0}\}) = 0$ (aqui, $\{\mathbf{0}\}$ representa o espaço que contém apenas o vetor nulo)
 - $\dim(\mathbb{R}) = 1$
 - $\dim(\mathbb{R}^2) = 2$
 - $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$
 - $\vdots$
 - $\dim(\mathbb{R}^n) = n$
 - $\dim(M_{m \times n}(\mathbb{R})) = m \cdot n$
 - $\dim(M_n(\mathbb{R})) = n \cdot n = n^2$
 - $\dim(P_n(\mathbb{R})) = n + 1$

Exemplos:

- 1) Seja $W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / x - 2y + t = 0\}$. Determinar a dimensão de W .

Para determinar a dimensão de W , é necessário determinar uma de suas bases. Os elementos (x, y, z, t) de W são tais que $x - 2y + t = 0$, isto é, $x = 2y - t$. Logo, todo vetor de W pode ser escrito na forma: $(2y - t, y, z, t)$, sendo y, z e t números reais. Determina-se, agora, um sistema de geradores para W ; para isso, observe-se que se pode escrever:

$$(2y - t, y, z, t) = (2y, y, z, t) + (-t, 0, 0, 0) = y(2, 1, 0, 0) + z(0, 0, 1, 0) + t(-1, 0, 0, 0)$$

Assim, o conjunto $S = \{(2, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (-1, 0, 0, 0)\}$ é um sistema de geradores para W . Para determinar uma base para W , utiliza-se o processo prático para obtenção de base. Assim, constrói-se uma matriz com os vetores do conjunto de geradores:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ ou, equivalentemente, } \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

A ordem em que os vetores são colocados nas linhas da matriz não interfere, obviamente, no resultado.

Escalonando-se a matriz por linhas, vem:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{2L_1 + L_2} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Observe-se que a matriz está escalonada e não apresenta nenhuma linha nula. Logo, os vetores são LI e constituem uma base de W , ou seja, S é base de W . Portanto, $\dim(W) = 3$.

Observação: Um erro muito comum que se comete é confundir a quantidade de coordenadas de um vetor, com a quantidade de vetores de uma base. No exemplo anterior, a base de W é constituída de 3 vetores quadridimensionais, isto é, com 4 coordenadas, mas $\dim(W) = 3$, que é o número de vetores LI que constituem a base.

- 2) Determinar a dimensão de $U = [1-2t, 2t+t^2-t^3, 1+t^2-t^3, 2-6t-t^2+t^3]$.

Observe-se que U é um subconjunto de $P_3(\mathbb{R})$, que é o conjunto dos polinômios de grau menor ou igual a 3, com coeficientes reais; U é gerado pelos polinômios $1-2t$, $2t+t^2-t^3$, $1+t^2-t^3$ e $2-6t-t^2+t^3$, que são chamados, simplesmente, de “vetores”. Esses vetores podem ser escritos na forma:

$$1-2t = 1-2t+0t^2+0t^3;$$

$$2t+t^2-t^3 = 0+2t+t^2-t^3;$$

$$1+t^2-t^3 = 1+0t+t^2-t^3;$$

$$2-6t-t^2+t^3.$$

Assim, os coeficientes dos polinômios podem ser associados, respectivamente, aos vetores: $(1, -2, 0, 0)$, $(0, 2, 1, -1)$, $(1, 0, 1, -1)$ e $(2, -6, -1, 1)$.

Para determinar uma base de U , constrói-se uma matriz com os coeficientes dos polinômios que o geram, ou seja, com os vetores associados aos polinômios:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & -6 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

A seguir, escalona-se a matriz por linha:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & -6 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{-L_1+L_3 \\ -2L_1+L_4}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{-L_2+L_3 \\ L_2+L_4}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Observa-se, assim, que restaram apenas duas linhas não nulas na matriz escalonada e, portanto, há apenas dois vetores LI no conjunto de geradores, os quais constituem uma base para U : $(1, -2, 0, 0)$, $(0, 2, 1, -1)$. Logo, os polinômios associados a eles $1-2t$ e $2t+t^2-t^3$ são os elementos da base de U , isto é,

$$B = \{1-2t, 2t+t^2-t^3\}$$

é base de U e, portanto, $\dim(U) = 2$.

3) Determinar uma base e a dimensão para o espaço das soluções do sistema

$$\text{linear } (L): \begin{cases} x - y - z - t = 0 \\ 2x + y + t = 0 \\ z - t = 0 \end{cases}$$

Sendo o sistema homogêneo, ele admite pelo menos a solução trivial, isto é, tem-se a solução $(0, 0, 0, 0)$. Para determinar se essa é a única solução ou se há mais de uma solução (neste caso, serão infinitas), resolve-se o sistema. Utilizar-se-á, para tal finalidade, o método de Gauss, ou seja, o método do escalonamento, trabalhando apenas com a matriz dos coeficientes; sendo o sistema homogêneo, não é necessário acrescentar a coluna dos termos independentes. Tem-se:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{-2L_1 + L_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Observe-se que a matriz já está escalonada e, assim, o sistema obtido, equivalente ao sistema dado, é:

$$(L'): \begin{cases} x - y - z - t = 0 \\ 3y + 2z + 3t = 0 \\ z - t = 0 \end{cases}.$$

Da 3ª equação, segue-se que $z = t$; substituindo na 2ª equação, obtém-se:

$$y = -\frac{5}{3}t.$$

Substituindo-se esses valores de z e y na 1ª equação, vem:

$$x + \frac{5}{3}t - t - t = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{3}t.$$

Assim, as soluções do sistema podem ser colocadas na forma:

$$S = \left\{ (x, y, z, t) / x = \frac{1}{3}t, y = -\frac{5}{3}t, z = t, \forall t \in \mathfrak{R} \right\},$$

ou, equivalentemente,

$$S = \left\{ (x, y, z, t) / y = -5x, z = 3x, t = 3x, \forall x \in \mathfrak{R} \right\}.$$

Observe-se que o conjunto S das soluções do sistema (L) é um subconjunto do espaço vetorial real $\mathfrak{R}^4$, que pode ser escrito, ainda, na forma:

$$S = \{(x, -5x, 3x, 3x), \forall x \in \mathfrak{R}\};$$

Assim, um elemento genérico de S é da forma $(x, -5x, 3x, 3x)$, ou seja:

$$(x, -5x, 3x, 3x) = x(1, -5, 3, 3),$$

o que indica que S é gerado pelo vetor $(1, -5, 3, 3)$.

Logo, conjunto $B = \{(1, -5, 3, 3)\}$ é uma base de S e, portanto, $\dim(S) = 1$.

Teorema da Invariância: Seja V um espaço vetorial de dimensão finita. Então, todas as bases de V têm o mesmo número de vetores.

Demonstração:

Hipótese: V é um espaço vetorial de dimensão finita

Tese: duas bases quaisquer de V têm o mesmo número (finito) de elementos

Sejam $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ e $B' = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$ bases do espaço vetorial V , o qual, por hipótese, tem dimensão finita.

Sendo B uma base, segue-se que B gera V ; como B' é LI, conclui-se, pela proposição anterior, que $m \leq n$.

Por outro lado, B' é base e, portanto, gera V ; uma vez que B é LI, conclui-se, pela mesma proposição, que $n \leq m$.

Logo, $m = n$, ou seja, as bases de V têm o mesmo número de vetores.

Lema: Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita e S um subconjunto LI de V . Se v é um vetor de V que não está no subespaço gerado por S , então o conjunto obtido acrescentando-se v a S é LI.

Demonstração:

Hipóteses: V é um espaço vetorial de dimensão finita; S é um subconjunto LI de V ; $v \in V$ não pertence ao subespaço gerado por S

Tese: o conjunto obtido acrescentando-se v a S é LI

Sejam $v_1, v_2, \dots, v_n$ vetores distintos de S ; se $a_1v_1 + a_2v_2 + \dots + a_nv_n + bv = \mathbf{0}$, deve-se ter, necessariamente $b = 0$, pois, caso contrário, escrever-se-ia:

$$v = \left(-\frac{a_1}{b}\right)v_1 + \left(-\frac{a_2}{b}\right)v_2 + \dots + \left(-\frac{a_n}{b}\right)v_n;$$

e concluir-se-ia que v pertenceria ao subespaço gerado por S , contrariando a hipótese. Sendo $b = 0$, tem-se:

$$a_1v_1 + a_2v_2 + \dots + a_nv_n = \mathbf{0}$$

e, como S é LI, segue-se que $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$, isto é, o conjunto $\{v_1, v_2, \dots, v_n, v\}$ é LI.

Teorema do Completamento: Seja V um espaço vetorial de dimensão finita n . Se $\{u_1, u_2, \dots, u_r\} \subset V$ é um conjunto LI com r vetores, sendo $r < n$, então, existem $(n-r)$ vetores $u_{r+1}, u_{r+2}, \dots, u_n$ em V tais que $\{u_1, u_2, \dots, u_r, u_{r+1}, u_{r+2}, \dots, u_n\}$ é uma base de V .

Este teorema pode ser enunciado, de forma equivalente, da seguinte maneira:

Teorema do Completamento: Qualquer conjunto de vetores LI de um espaço vetorial V de dimensão finita pode ser completado de modo a formar uma base de V .

Demonstração:

Hipóteses: V é um espaço vetorial de dimensão finita n ; $\{u_1, u_2, \dots, u_r\} \subset V$ é um conjunto LI com r vetores, sendo $r < n$

Tese: existem $u_{r+1}, u_{r+2}, \dots, u_n$ em V tais que $\{u_1, u_2, \dots, u_r, u_{r+1}, u_{r+2}, \dots, u_n\}$ é uma base de V

Se a dimensão de V é n , então toda base B de V tem n vetores LI, ou seja, B é LI-maximal, e qualquer conjunto com $n+1$ vetores é LD. Seja $S_0 = \{u_1, u_2, \dots, u_r\}$ um subconjunto LI de V , com $r < n$. Pelo lema anterior, existem, no máximo, $n-r$ vetores $u_{r+1}, u_{r+2}, \dots, u_n$ tais que o conjunto $S = \{u_1, u_2, \dots, u_r, u_{r+1}, u_{r+2}, \dots, u_n\}$ é LI e $S_0 \subset S$. Logo, S é um conjunto LI-maximal e, portanto, S é base de V , a qual foi completada a partir de S_0 .

Têm-se, ainda, os resultados seguintes:

Teorema: Seja V um espaço vetorial tal que $\dim(V) = n$. Então:

- a) qualquer conjunto com $n + 1$ ou mais vetores é LD;
- b) qualquer conjunto LI com n vetores é base de V .

Demonstração:

- a) **Hipótese:** $\dim(V) = n$

Tese: qualquer conjunto com $n + 1$ ou mais vetores é LD

Seja $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ uma base de V . Suponha-se que o conjunto $B' = \{v_1, v_2, \dots, v_n, u\}$ seja LI. Mostrar-se-á que B' gera V , isto é, que todo elemento $v \in V$ é combinação linear dos vetores de B' . De fato, como B é uma base de V , então o vetor v é uma combinação linear dos elementos da base, isto é, existem escalares $a_1, a_2, \dots, a_n$ tais que $v = a_1v_1 + a_2v_2 + \dots + a_nv_n$.

Pode-se escrever:

$$v = a_1v_1 + a_2v_2 + \dots + a_nv_n + 0 \cdot u,$$

ou seja, v é combinação linear dos vetores de B' , de onde se conclui que B' gera V . Por outro lado, se B' é LI e gera V , então B' é base de V e, portanto, pode-se concluir que $\dim(V) = n + 1$, o que contraria a hipótese. Portanto, B' não pode ser LI, isto é, B' é LD.

- b) **Hipótese:** $\dim(V) = n$

Tese: qualquer conjunto LI com n vetores é base de V

Seja $B' = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ um conjunto LI do espaço vetorial V e suponha-se que B' não gera V . Então $\exists v \in V$ tal que v não é combinação linear dos elementos de B' . Considere-se, agora, $B'' = \{u_1, u_2, \dots, u_n, v\}$. Pelo lema demonstrado anteriormente, segue-se que B'' é LI, o que contraria o item (a). Logo, B' gera V e, portanto, é base de V .

Proposição: Seja $W \subseteq V$ um subespaço de V . Se $\dim(W) = \dim(V)$ então $W = V$.

Demonstração:

Hipóteses: $W \subseteq V$ é um subespaço de V ; $\dim(W) = \dim(V)$

Tese: $W = V$

Suponha-se que $\dim(W) = \dim(V) = n$ e que $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ seja uma base de W . Como $W \subseteq V$, então B é também base de V . Logo, $[B] = W = V$ e, portanto, $W = V$.

Proposição: Seja $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ uma das bases de um espaço vetorial V . Então, todo elemento de V se escreve de maneira única como combinação linear dos vetores da base B .

Demonstração:

Hipótese: $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ é base de V

Tese: todo elemento de V se escreve de maneira única como combinação linear dos vetores de B

Seja $v \in V$; então, v se escreve como combinação linear dos vetores da base B , ou seja, existem escalares $a_1, a_2, \dots, a_n$ tais que $v = a_1v_1 + a_2v_2 + \dots + a_nv_n$.

Suponha-se que v possa ser escrito como outra combinação linear dos vetores de B , isto é, suponha-se que existam escalares $b_1, b_2, \dots, b_n$ tais que $v = b_1v_1 + b_2v_2 + \dots + b_nv_n$.

Então, tem-se:

$$a_1v_1 + a_2v_2 + \dots + a_nv_n = b_1v_1 + b_2v_2 + \dots + b_nv_n,$$

isto é,

$$a_1v_1 + a_2v_2 + \dots + a_nv_n - b_1v_1 - b_2v_2 - \dots - b_nv_n = \mathbf{0},$$

ou, ainda,

$$(a_1 - b_1)v_1 + (a_2 - b_2)v_2 + \dots + (a_n - b_n)v_n = \mathbf{0}.$$

Como $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ é LI, conclui-se que:

$$a_i - b_i = 0 \quad (1 \leq i \leq n),$$

isto é,

$$a_i = b_i \quad (1 \leq i \leq n).$$

Portanto, a combinação linear é única.

Exemplo: Considere-se a seguinte base do $\mathfrak{R}^2$: $B = \{v_1 = (2, 3), v_2 = (1, 1)\}$; então, todo vetor do $\mathfrak{R}^2$ é gerado pelos vetores de B , isto é, todo vetor do $\mathfrak{R}^2$ é uma combinação linear dos vetores de B .

Tomando-se, por exemplo, o vetor $u = (2, 5)$, este se escreve como combinação linear dos vetores da base B . Para encontrar essa combinação linear, basta que se escreva a equação:

$$(2, 5) = a(2, 3) + b(1, 1)$$

e se determinem os valores de a e b . Tem-se:

$$(2, 5) = (2a, 3a) + (b, b) = (2a + b, 3a + b),$$

de onde se segue que:

$$\begin{cases} 2a + b = 2 \\ 3a + b = 5 \end{cases}.$$

A solução desse sistema linear é: $a = 3$ e $b = -4$. Portanto, pode-se escrever:

$$(2, 5) = 3(2, 3) - 4(1, 1), \text{ ou seja, } u = 3v_1 - 4v_2.$$

Supondo-se que o vetor u admita uma outra combinação linear, diferente desta, por exemplo, $u = \alpha v_1 + \beta v_2$, vem:

$$u = 3v_1 - 4v_2 = \alpha v_1 + \beta v_2,$$

ou seja,

$$\alpha v_1 + \beta v_2 - 3v_1 + 4v_2 = \mathbf{0},$$

ou, ainda,

$$(\alpha - 3)v_1 + (4 + \beta)v_2 = \mathbf{0}.$$

Sendo os vetores LI, essa equação só se verifica se $\alpha - 3 = 0$ e $4 + \beta = 0$, ou seja, se

$$\alpha = 3 \text{ e } \beta = -4, \text{ o que mostra que a combinação linear é única.}$$

Teorema: Sejam U e W subespaços de um espaço vetorial V . Então:

$$\dim(U + W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W).$$

Demonstração:

Hipótese: U e W são subespaços de um espaço vetorial V

Tese: $\dim(U + W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W)$

Seja $B_{U \cap W} = \{e_1, e_2, \dots, e_r\}$ uma base de $U \cap W$. Sendo os vetores dessa base LI em U e em W , então, pelo Teorema do Completamento, existem

$u_1, u_2, \dots, u_s \in U$ e $w_1, w_2, \dots, w_t \in W$ tais que $B_U = \{e_1, e_2, \dots, e_r, u_1, u_2, \dots, u_s\}$ é base de U e $B_W = \{e_1, e_2, \dots, e_r, w_1, w_2, \dots, w_t\}$ é base de W .

Observe-se que $\dim(U \cap W) = r$, $\dim(U) = r + s$ e $\dim(W) = r + t$. Portanto:

$$\dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W) = r + s + r + t - r = r + s + t \quad (1)$$

Mostrar-se-á, agora, que $B_{U+W} = \{e_1, e_2, \dots, e_r, u_1, u_2, \dots, u_s, w_1, w_2, \dots, w_t\}$ é uma base de $U + W$.

É claro que esse conjunto de vetores gera $U + W$, pois, se $v \in U + W$, então $v = u + w$, sendo u escrito como combinação linear da base de U e w , como combinação linear da base de W . Assim, $[B_{U+W}] = U + W$.

Os vetores de B_{U+W} são LI.

Defato, supondo-se que existam escalares $a_1, a_2, \dots, a_r, b_1, b_2, \dots, b_s, c_1, c_2, \dots, c_t$ tais que:

$$a_1 e_1 + a_2 e_2 + \dots + a_r e_r + b_1 u_1 + b_2 u_2 + \dots + b_s u_s + c_1 w_1 + c_2 w_2 + \dots + c_t w_t = \mathbf{0}, \quad (2)$$

pode-se escrever:

$$a_1 e_1 + a_2 e_2 + \dots + a_r e_r + b_1 u_1 + b_2 u_2 + \dots + b_s u_s = -c_1 w_1 - c_2 w_2 - \dots - c_t w_t.$$

Como o vetor $a_1 e_1 + a_2 e_2 + \dots + a_r e_r + b_1 u_1 + b_2 u_2 + \dots + b_s u_s$ é um vetor de U e $-c_1 w_1 - c_2 w_2 - \dots - c_t w_t$ é um vetor de W , então, pela última igualdade, trata-se do mesmo vetor e, portanto, $-c_1 w_1 - c_2 w_2 - \dots - c_t w_t \in U \cap W$. Logo, existem escalares $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r$ tais que:

$$-c_1 w_1 - c_2 w_2 - \dots - c_t w_t = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \dots + \beta_r e_r,$$

de onde vem que

$$\beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \dots + \beta_r e_r + c_1 w_1 + c_2 w_2 + \dots + c_t w_t = \mathbf{0}.$$

Como $\{e_1, e_2, \dots, e_r, w_1, w_2, \dots, w_t\}$ é base de W , seus elementos são LI e, portanto, segue-se que $\beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_r = c_1 = c_2 = \dots = c_t = 0$. Assim, a expressão (2) fica:

$$a_1 e_1 + a_2 e_2 + \dots + a_r e_r + b_1 u_1 + b_2 u_2 + \dots + b_s u_s = \mathbf{0}.$$

Lembrando que $\{e_1, e_2, \dots, e_r, u_1, u_2, \dots, u_s\}$ é base de U , o que acarreta que os vetores são LI, segue-se que $a_1 = a_2 = \dots = a_r = b_1 = b_2 = \dots = b_s = 0$. Con-

clui-se, assim, que o conjunto $\{e_1, e_2, \dots, e_r, u_1, u_2, \dots, u_s, w_1, w_2, \dots, w_t\}$ é LI, o que demonstra que é uma base de $U + W$. Portanto,

$$\dim(U + W) = r + s + t. \quad (3)$$

De (1) e (3), segue-se que $\dim(U + W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W)$, o que demonstra o teorema.

Exemplos:

1) Sejam $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y = 2x\}$ e $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y = -x\}$, dois subespaços do $\mathbb{R}^2$. Tem-se:

- os elementos de U pertencem à reta $y = 2x$; logo, $\dim(U) = 1$;
- os elementos de W pertencem à reta $y = -x$; logo, $\dim(W) = 1$;
- $U \cap W = \{(0, 0)\}$; logo, $\dim(U \cap W) = 0$.

Então, uma vez que $\dim(U + W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W)$, vem:

$$\dim(U + W) = 1 + 1 - 0 = 2.$$

Por outro lado, sabe-se que $\dim(\mathbb{R}^2) = 2$; assim, tem-se:

$$(U + W) \subset \mathbb{R}^2 \text{ e } \dim(U + W) = \dim(\mathbb{R}^2) = 2,$$

de onde se conclui que $U + W = \mathbb{R}^2$.

2) Considerem-se os subespaços do $\mathbb{R}^3$:

$$U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x - 2y + z = 0\} \text{ e } W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 3x + 2y + z = 0\}.$$

Determinar uma base para $U + W$ e $U \cap W$ e suas respectivas dimensões. Em seguida, verificar se $\mathbb{R}^3 = U \oplus W$, onde $\oplus$ indica a soma direta de U e W .

Observe-se que os elementos de U pertencem ao plano contido em $\mathbb{R}^3$, de equação $x - 2y + z = 0$; seus pontos (ou vetores) são da forma: $(2y - z, y, z)$ e, portanto, pode-se escrever:

$$(2y - z, y, z) = y(2, 1, 0) + z(-1, 0, 1).$$

Logo, o conjunto $B_U = \{(2, 1, 0), (-1, 0, 1)\}$ é uma base de U , o que indica que $\dim(U) = 2$. Por outro lado, os elementos de W pertencem ao plano

contido em $\mathfrak{R}^3$, de equação $3x + 2y + z = 0$; seus pontos (ou vetores) são da forma: $(x, y, -3x - 2y)$ e, portanto, pode-se escrever:

$$(x, y, -3x - 2y) = x(1, 0, -3) + y(0, 1, -2);$$

assim, o conjunto $B_W = \{(1, 0, -3), (0, 1, -2)\}$ é uma base de W , de onde se conclui que $\dim(W) = 2$.

Com o objetivo de se determinar uma base para $U + W$, obtém-se, primeiramente, um sistema de geradores, fazendo a união das bases de U e W :

$$S = B_U \cup B_W = \{(2, 1, 0), (-1, 0, 1), (1, 0, -3), (0, 1, -2)\}.$$

Determinam-se, agora, através do processo prático de obtenção de base, quais são os vetores LI desse sistema de geradores. Os vetores do conjunto de geradores podem ser colocados em qualquer linha da matriz, sem que haja uma ordem obrigatória. Como o objetivo é escalonar a matriz por linha, escolhe-se, para a primeira linha, o vetor cuja primeira componente é 1, por facilidade; na segunda linha, optou-se por colocar um vetor cuja primeira coordenada já é nula. Tem-se, então:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{L_1+L_3 \\ -2L_1+L_4}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{-L_2+L_4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{4L_3+L_4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Há, portanto, três vetores LI em S e, portanto, a base de $U + W$ é:

$$B_{U+W} = \{(1, 0, -3), (0, 1, -2), (0, 0, -2)\};$$

assim, $\dim(U + W) = 3$.

Uma vez que $\dim(U + W) = 3$, $\dim(\mathfrak{R}^3) = 3$ e $U + W \subset \mathfrak{R}^3$, segue-se que $U + W = \mathfrak{R}^3$.

Isso significa que o subespaço determinado pela soma de U e W coincide com o espaço $\mathfrak{R}^3$.

Obter-se-ão, agora, informações para o espaço $U \cap W$. Sabe-se que:

$$\dim(U + W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W);$$

então:

$$3 = 2 + 2 - \dim(U \cap W), \text{ ou seja, } \dim(U \cap W) = 1.$$

Portanto, a base de $U \cap W$ deve conter apenas um vetor, o qual deve ser comum a U e a W . Isso significa que um vetor (x, y, z) de $U \cap W$ deve ser escrito como combinação linear dos vetores da base de U e como combinação linear dos elementos da base de W , isto é:

$$(x, y, z) = a(2, 1, 0) + b(-1, 0, 1)$$

e

$$(x, y, z) = \alpha(1, 0, -3) + \beta(0, 1, -2).$$

Igualando as expressões de (x, y, z) , vem:

$$a(2, 1, 0) + b(-1, 0, 1) = \alpha(1, 0, -3) + \beta(0, 1, -2),$$

isto é,

$$(2a - b, a, b) = (\alpha, \beta, -3\alpha - 2\beta),$$

de onde se segue que:

$$\begin{cases} 2a - b = \alpha \\ a = \beta \\ b = -3\alpha - 2\beta \end{cases}.$$

Substituindo-se a 1ª e a 2ª equações na 3ª, obtém-se:

$$b = -3(2a - b) - 2a \Rightarrow b = 4a$$

Considerando-se a expressão:

$$(x, y, z) = a(2, 1, 0) + b(-1, 0, 1)$$

e substituindo-se $b = 4a$, obtém-se:

$$(x, y, z) = a(2, 1, 0) + 4a(-1, 0, 1) = (-2a, a, 4a) = a(-2, 1, 4);$$

por outro lado, considerando-se a expressão:

$$(x, y, z) = \alpha(1, 0, -3) + \beta(0, 1, -2)$$

e substituindo-se $\alpha = 2a - 4a = -2a$ e $\beta = a$, obtém-se:

$$(x, y, z) = -2a(1, 0, -3) + a(0, 1, -2) = (-2a, a, 4a) = a(-2, 1, 4),$$

que é a mesma expressão obtida anteriormente. Conclui-se, assim que os elementos de $U \cap W$ são gerados pelo vetor $(-2, 1, 4)$, isto é, o conjunto $B_{U \cap W} = \{(-2, 1, 4)\}$ é base de $U \cap W$.

Para que o espaço $\mathbb{R}^3$ seja soma direta de U e W , devem ser satisfeitas as condições:

a) $U + W = \mathbb{R}^3$

b) $U \cap W = \{(0, 0, 0)\}$.

A condição (a) se verifica, pois, sendo $\dim(U + W) = 3$ e $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$ e $U + W \subset \mathbb{R}^3$, segue-se que $U + W = \mathbb{R}^3$.

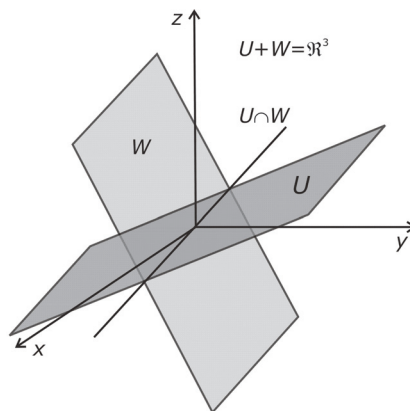
A condição (b) não é satisfeita, pois, se $U \cap W = \{(0, 0, 0)\}$, ter-se-ia $\dim(U \cap W) = 0$, pois o espaço que contém apenas o vetor nulo tem dimensão zero; entretanto, conforme se mostrou acima, $\dim(U \cap W) = 1$, o que acarreta que $U \cap W \neq \{(0, 0, 0)\}$. Conclui-se, assim, que espaço $\mathbb{R}^3$ não é soma direta de U e W .

Também se pode concluir que $U \cap W \neq \{(0, 0, 0)\}$ lembrando que a base de $U \cap W$ é $B_{U \cap W} = \{(-2, 1, 4)\}$, o que significa que o subespaço $U \cap W$ é constituído pelos pontos que pertencem à reta de interseção dos planos $x - 2y + z = 0$ e $3x + 2y + z = 0$. Sua equação, na forma simétrica, é:

$$\frac{x}{-2} = \frac{y}{1} = \frac{z}{4}.$$

A Figura 4.1 mostra os planos e a reta de interseção entre eles.

Figura 4.1



4.4. COORDENADAS DE UM VETOR

Trabalhar-se-á, no que se segue, com bases ordenadas, que são aquelas em que as posições dos vetores estão fixadas. Assim, dada uma base qualquer $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, v_1 será sempre o primeiro vetor, v_2 será o segundo, v_3 será o terceiro e, assim por diante, v_n será o último.

Considerando-se um espaço vetorial V sobre um corpo K e uma de suas bases ordenadas $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, sabe-se que qualquer vetor $v \in V$ se escreve, de maneira única, como combinação linear dos vetores da base B , ou seja, existem escalares $a_1, a_2, \dots, a_n \in K$ tais que:

$$v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n. \quad (4)$$

Definição: os escalares $a_1, a_2, \dots, a_n$ são chamados de coordenadas do vetor v em relação à base B .

Notação: $[v]_B = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}.$

Exemplos:

1) Determinar as coordenadas do vetor $v = (-1, 5, -8)$ em relação às seguintes bases:

a) base canônica do $\mathcal{R}^3$

b) $B = \{(1, 1, 0), (2, 0, 1), (2, -1, 1)\}$

a) A base canônica do $\mathcal{R}^3$ é $C = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$. Para encontrar as coordenadas do vetor v em relação a essa base, deve-se escrevê-lo como combinação linear dos vetores da base, ou seja, escreve-se:

$$v = (-1, 5, -8) = a(1, 0, 0) + b(0, 1, 0) + c(0, 0, 1) = (a, b, c),$$

de onde se segue que $a = -1$, $b = 5$ e $c = -8$. Assim, as coordenadas de v na base canônica são:

$$[v]_C = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -8 \end{pmatrix}$$

- b) Deve-se, agora, escrever v como combinação dos vetores da base B , isto é:

$$v = (-1, 5, -8) = a(1, 1, 0) + b(2, 0, 1) + c(2, -1, 1) = (a + 2b + 2c, a - c, b + c),$$

de onde vem que:

$$\begin{cases} a + 2b + 2c = -1 \\ a - c = 5 \\ b + c = -8 \end{cases}.$$

A resolução desse sistema linear conduz à seguinte solução: $a = 15$, $b = -18$ e $c = 10$ e, portanto, as coordenadas de v na base B são:

$$[v]_B = \begin{pmatrix} 15 \\ -18 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Observações:

- 1) Observe-se que, quando se consideram bases diferentes de um espaço vetorial, as coordenadas de um mesmo vetor são diferentes (em geral).
- 2) O item (a) do exemplo anterior mostrou que as coordenadas do vetor $v = (-1, 5, -8)$, em relação à base canônica do $\mathfrak{R}^3$, são as próprias coordenadas do vetor. Esse resultado é sempre verdadeiro: considerado um espaço vetorial V qualquer, as coordenadas de um vetor qualquer de V , em relação à base canônica de V , coincidem com as próprias coordenadas do vetor. A menos que se diga algo em contrário, considerar-se-ão as coordenadas de um vetor dado sempre em relação à base canônica do espaço ao qual ele pertence.
- 2) Considere-se o espaço vetorial real $P_2(\mathfrak{R})$, com as operações usuais de adição de polinômios e multiplicação por escalar e o polinômio $p(t) = 2 + 4t + t^2$ deste espaço. Determinar suas coordenadas em relação à base $B = \{-2, 1 - t, 1 + 2t - 3t^2\}$.

É preciso lembrar que todo elemento de um espaço vetorial é chamado de “vetor”. Assim, deve-se escrever o vetor dado como combinação linear dos vetores da base, isto é, escreve-se:

$$p(t) = 2 + 4t + t^2 = a(-2) + b(1-t) + c(1+2t-3t^2),$$

ou seja,

$$2 + 4t + t^2 = (-2a + b + c) + (-b + 2c)t + (-3c)t^2.$$

Da igualdade de polinômios, vem:

$$\begin{cases} -2a + b + c = 2 \\ -b + 2c = 4 \\ -3c = 1 \end{cases},$$

de onde se segue que $a = -\frac{7}{2}$, $b = -\frac{14}{3}$ e $c = -\frac{1}{3}$. Assim, as coordenadas do vetor dado, em relação à base B , são:

$$[p(t)]_B = \begin{pmatrix} -\frac{7}{2} \\ -\frac{14}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

4.5. EXERCÍCIOS PROPOSTOS

- 1) Seja $W = \{a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3 \in P_3(\mathbb{R}) / a_0 = 2a_2 - 5a_3 \text{ e } a_1 = a_2 - 4a_3\}$.
Determinar uma base para W e sua dimensão.

$$\text{R: } B = \{2 + t + t^2, -5 - 4t + t^3\}; \dim(W) = 2$$

- 2) Determinar uma base e a dimensão para $W + U$ e $W \cap U$, onde:

$$W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / x - 2y = 0 \text{ e } z = -3t\}$$

e

$$U = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / 2x - y + 2z - t = 0\}$$

$$\text{R: } B_{W+U} = \{(1, 0, 0, 2), (0, 1, 0, -1), (0, 0, 1, 2), (0, 0, 0, 1)\}; \dim(W + U) = 4$$

$$B_{W \cap U} = \left\{ \left(\frac{14}{3}, \frac{7}{3}, -3, 1 \right) \right\}; \dim(W \cap U) = 1$$

- 3) Seja $W = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathfrak{R}) / a = 2b \text{ e } d = -c \right\}$. Determinar uma base para W e sua dimensão. Estender a base de W para obter uma base de $M_2(\mathfrak{R})$.

$$\text{R: } B_W = \left\{ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right\}; B_{M_2(\mathfrak{R})} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

- 4) Seja S o espaço das soluções do sistema linear (L) . Determinar uma base para S e sua dimensão.

$$(L): \begin{cases} x + y + 2z + 2t = 0 \\ -3x + 3y - z + t = 0 \\ -2x + 4y + z + 3t = 0 \\ 6y + 5z + 7t = 0 \end{cases}$$

$$\text{R: } B = \{(-7, -5, 6, 0), (-5, -7, 0, 6)\}; \dim(S) = 2$$

- 5) Mostre que o espaço vetorial real $\mathfrak{R}^3$ é soma direta dos subespaços:

$$V = \left\{ (x, y, z) \in \mathfrak{R}^3 / x - 2y + 5z = 0 \right\} \text{ e } W = \left\{ (x, y, z) \in \mathfrak{R}^3 / \frac{x}{2} = \frac{y}{-1} = z \right\}.$$

5

MATRIZ DE MUDANÇA DE BASE

Conforme se estabeleceu no Capítulo 4, com exceção do espaço nulo $V = \{\mathbf{0}\}$, que não possui base, todos os demais espaços vetoriais possuem infinitas bases. Uma vez que existem infinitas bases, capazes de gerar o mesmo espaço vetorial, pode-se pensar que elas tenham algo em comum. Cabe, assim, o seguinte questionamento: como relacionar os vetores de uma base B com os vetores de uma base C ?

Ainda no Capítulo 4, viu-se que é possível determinar as coordenadas de um dado vetor em diferentes bases e que, embora essas coordenadas sejam expressas de formas diferentes, elas representam o mesmo vetor. Se, por exemplo, $[v]_B$ são as coordenadas de um vetor v em relação à base B e $[v]_C$ são as coordenadas de v em relação à base C , pergunta-se: é possível, a partir de $[v]_B$, obter $[v]_C$ e vice-versa? Ver-se-á, neste capítulo, que isso é possível; ressalta-se, ainda, que, em muitas aplicações práticas, é necessário passar de um sistema de coordenadas para outro, o que é feito através de uma matriz de mudança de coordenadas.

Exemplo: Considerem-se o espaço vetorial real $\mathbb{R}^2$ e o vetor $v = (6, 2)$. A representação de v em relação à base canônica $C = \{i = (1, 0), j = (0, 1)\}$ é $v = 6(1, 0) + 2(0, 1)$ e, portanto, suas coordenadas em relação à base canônica C são $[v]_C = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$. Considere-se, agora, a base $B = \{f_1 = (1, -1), f_2 = (1, 1)\}$; para determinar as coordenadas do vetor v em relação a essa base, escreve-se v como combinação linear dos vetores de B :

$$(6, 2) = a(1, -1) + b(1, 1) = (a + b, -a + b),$$

de onde se segue que:

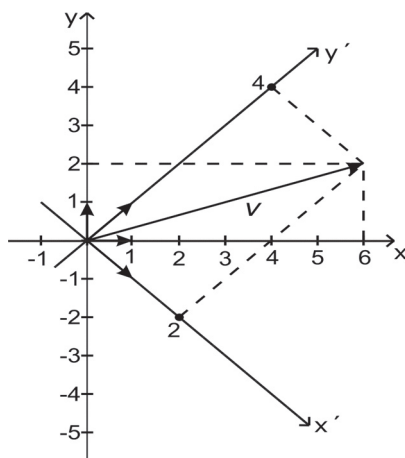
$$\begin{cases} 6 = a + b \\ 2 = -a + b \end{cases}$$

e, portanto, $a = 2$ e $b = 4$. Logo, as coordenadas de v em relação à base B são

$$[v]_B = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

É possível interpretar geometricamente esses resultados. Quando se considera o espaço $\mathbb{R}^2$ com a base canônica, a representação geométrica desse espaço é o sistema de coordenadas cartesianas ortogonais, usualmente designado por plano Oxy . O eixo horizontal Ox tem a direção do vetor $i = (1, 0)$ e o eixo vertical Oy tem a direção do vetor $j = (0, 1)$. Na Figura 5.1, vê-se a representação geométrica dos vetores da base C e do vetor v .

Figura 5.1



Considerar uma nova base B significa considerar um novo sistema de coordenadas, que será indicado por $Ox'y'$, cujos eixos têm a direção dos vetores $f_1 = (1, -1)$ e $f_2 = (1, 1)$, respectivamente. Representando-se, geometricamente, esses novos eixos no mesmo sistema de coordenadas Oxy , vê-se que o sistema $Ox'y'$ está rotacionado, em relação ao sistema Oxy . Entretanto, é claro que, independentemente do sistema considerado (ou seja, independentemente da base considerada), a representação geométrica de v é a mesma.

Considerando-se a expressão do vetor v , escrito como combinação linear dos vetores da base C , ou seja, $v = 6(1, 0) + 2(0, 1)$, vê-se que o segundo membro pode ser expresso, equivalentemente, como um produto de matrizes:

$$v = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Observe-se que os vetores da base C constituem as colunas da matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; chamando de C essa matriz, ou seja, escrevendo a base na forma matricial $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, escreve-se, simbolicamente:

$$v = C[v]_C.$$

Considerando-se, agora, a expressão do vetor v , escrito como combinação linear dos vetores da base B , ou seja, $v = 2(1, -1) + 4(1, 1)$, vê-se que o segundo membro pode ser expresso, equivalentemente, como um produto de matrizes:

$$v = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Observe-se que os vetores da base B constituem as colunas da matriz $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$; chamando de B essa matriz, ou seja, escrevendo a base na forma matricial $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, escreve-se, simbolicamente:

$$v = B[v]_B.$$

Conforme se viu, o vetor v tem coordenadas diferentes, quando se consideram bases diferentes do $\mathfrak{R}^2$; esse fato leva às questões: como obter $[v]_B = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ a partir de $[v]_C = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$ e como obter $[v]_C = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$ a partir $[v]_B = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$? Essas questões são equivalentes à seguinte questão: qual é a relação entre as bases

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}?$$

Uma vez que tanto B quanto C geram o $\mathbb{R}^2$, pois são bases, espera-se que haja uma relação entre elas. De fato, pode-se verificar que as matrizes B e C são equivalentes, isto é, pode-se obter uma delas a partir da outra, utilizando-se as operações elementares com as filas (linhas ou colunas) de uma delas, como se mostra a seguir:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{-L_1+L_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2+2L_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Mostra-se, agora, como mudar de uma base para outra, matricialmente.

Considerem-se um espaço vetorial V sobre um corpo K e duas de suas bases: $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ e $C = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$. Uma vez que B gera o espaço V , cada um dos vetores da base C pode ser escrito como combinação linear dos vetores da base B . Então, existem escalares $a_{ij} \in K$, tais que:

$$S: \begin{cases} u_1 = a_{11}v_1 + a_{21}v_2 + \dots + a_{n1}v_n \\ u_2 = a_{12}v_1 + a_{22}v_2 + \dots + a_{n2}v_n \\ \vdots \\ u_n = a_{1n}v_1 + a_{2n}v_2 + \dots + a_{nn}v_n \end{cases}.$$

A matriz P , de ordem n , constituída dos escalares a_{ij} , isto é:

$$P = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

é chamada de matriz mudança da base B para a base C .

$$\text{Notação: } P = [M]_C^B.$$

Observações:

- 1) As colunas da matriz P são constituídas das coordenadas de cada vetor u_i ($1 \leq i \leq n$) da base C em relação à base B , ou seja:

$$[u_1]_B = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}, [u_2]_B = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix}, \dots, [u_n]_B = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix}.$$

- 2) A matriz de mudança de base é sempre uma matriz quadrada, pois as bases B e C têm a mesma quantidade de vetores. Além disso, como cada vetor da base C se escreve de maneira única como combinação linear dos vetores da base B e essas coordenadas formam um conjunto de vetores LI, o determinante da matriz P é diferente de zero e, portanto, ela é inversível.
- 3) A notação $P = [M]_C^B$ indica a matriz de mudança da base B para a base C ; entretanto, ressalta-se que os vetores da base C é que são escritos como combinação linear dos vetores da base B .
- 4) Escrevendo-se a matriz dos coeficientes do sistema linear S , isto é:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

vê-se que a matriz de mudança de base é a sua transposta.

- 5) É claro que se pode considerar também a matriz de mudança da base C para a base B . Para isso, basta escrever cada vetor da base B como combinação linear dos vetores da base C e considerar a matriz cujas colunas são constituídas pelas coordenadas dos vetores da base B em relação à base C . Nesse caso, obter-se-ia a matriz $Q = [M]_B^C$.

Exemplo: Sejam $B = \{v_1 = (1,1), v_2 = (1,0)\}$ e $C = \{u_1 = (1,2), u_2 = (-4,-3)\}$ duas bases do espaço vetorial real $\mathbb{R}^2$.

- a) Determinar a matriz P de mudança da base B para a base C .
 - b) Determinar a matriz Q de mudança da base C para a base B .
 - c) Que conclusões se obtêm a partir dos produtos PQ e QP ?
- a) Para determinar $P = [M]_C^B$, escrevem-se os vetores da base C como combinação linear dos vetores da base B , isto é:

$$(1,2) = a(1,1) + b(1,0) \Rightarrow (1,2) = (a+b, a),$$

de onde se segue que:

$$\begin{cases} a + b = 1 \\ a = 2 \end{cases},$$

ou seja, $a = 2$ e $b = -1$. Logo, o vetor $u_1 = (1, 2)$ da base C se escreve:

$$(1, 2) = 2(1, 1) - (1, 0),$$

isto é, suas coordenadas em relação à base B são:

$$[u_1]_B = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Considerando-se, agora, o vetor $u_2 = (-4, -3)$, tem-se:

$$(-4, -3) = c(1, 1) + d(1, 0) \Rightarrow (-4, -3) = (c + d, c).$$

Então:

$$\begin{cases} c + d = -4 \\ c = -3 \end{cases},$$

de onde se obtém: $c = -3$ e $d = -1$. Logo, o vetor $u_2 = (-4, -3)$ da base C se escreve:

$$(-4, -3) = -3(1, 1) - (1, 0),$$

ou seja, suas coordenadas em relação à base B são:

$$[u_2]_B = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

O sistema linear S , é então:

$$S: \begin{cases} u_1 = 2v_1 - v_2 \\ u_2 = -3v_1 - v_2 \end{cases}$$

e, portanto, a matriz dos coeficientes é:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}.$$

A matriz P é a transposta dessa matriz; suas colunas são formadas pelas coordenadas de u_1 e u_2 em relação à base B :

$$P = [M]_C^B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

- b) Quer-se, agora, determinar a matriz $Q = [M]_B^C$. Para isso, escrevem-se os vetores da base B como combinação linear dos vetores da base C . Tem-se:

$$(1,1) = a(1,2) + b(-4,-3) \Rightarrow (1,1) = (a-4b, 2a-3b),$$

de onde vem que:

$$\begin{cases} a-4b=1 \\ 2a-3b=1 \end{cases};$$

então: $a = \frac{1}{5}$ e $b = -\frac{1}{5}$. Logo, o vetor $v_1 = (1,1)$ da base B se escreve:

$$(1,1) = \frac{1}{5}(1,2) - \frac{1}{5}(-4,-3),$$

isto é, suas coordenadas em relação à base C são:

$$[v_1]_C = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} \end{pmatrix}.$$

Por outro lado, tem-se:

$$(1,0) = c(1,2) + d(-4,-3) \Rightarrow (1,0) = (c-4d, 2c-3d),$$

ou seja, tem-se o sistema linear:

$$\begin{cases} c-4d=1 \\ 2c-3d=0 \end{cases};$$

de onde se obtém: $c = -\frac{3}{5}$ e $d = -\frac{2}{5}$. Logo, o vetor $v_2 = (1,0)$ da base B se escreve:

$$(1,0) = -\frac{3}{5}(1,2) - \frac{2}{5}(-4,-3),$$

ou seja, suas coordenadas em relação à base B são:

$$[v_2]_C = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ -\frac{2}{5} \end{pmatrix}.$$

O sistema linear S , é então:

$$S: \begin{cases} v_1 = \frac{1}{5}u_1 - \frac{1}{5}u_2 \\ v_2 = -\frac{3}{5}u_1 - \frac{2}{5}u_2 \end{cases}$$

e, portanto, a matriz dos coeficientes é:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \end{pmatrix}.$$

A matriz Q é a transposta dessa matriz; suas colunas são formadas pelas coordenadas de v_1 e v_2 em relação à base C :

$$Q = [M]_B^C = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{3}{5} \\ \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \end{pmatrix}.$$

c) Efetuando-se os produtos solicitados, têm-se:

$$PQ = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{3}{5} \\ -\frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e

$$QP = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{3}{5} \\ -\frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Conclui-se, assim, que as matrizes P e Q são inversas entre si, ou seja,

$$[M]_B^C = \left([M]_C^B\right)^{-1} \text{ e } [M]_C^B = \left([M]_B^C\right)^{-1}.$$

Teorema: Sejam: V um espaço vetorial de dimensão n ; B e C duas bases de V ; P a matriz de mudança da base B para C . Então:

- a) $C = P^t B$
- b) $B = (P^t)^{-1} C$

Demonstração:

- a) **Hipóteses:** $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ e $C = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ são bases do espaço vetorial V ; P é a matriz de mudança da base B para a base C

Tese: $C = P^t B$

Escrevendo-se os vetores da base C como combinação linear dos vetores da base B , obtém-se o sistema linear:

$$S: \begin{cases} u_1 = a_{11}v_1 + a_{21}v_2 + \dots + a_{n1}v_n \\ u_2 = a_{12}v_1 + a_{22}v_2 + \dots + a_{n2}v_n \\ \vdots \\ u_n = a_{1n}v_1 + a_{2n}v_2 + \dots + a_{nn}v_n \end{cases}.$$

Portanto, por definição, a matriz de mudança da base B para a base C é:

$$P = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

A forma matricial do sistema é:

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}.$$

Vê-se, assim, que a matriz dos coeficientes do sistema é a transposta de P . Se as bases B e C forem escritas na forma de matrizes-colunas, isto é,

$$B = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \text{ e } C = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix},$$

conclui-se que $C = P^t B$.

- b) **Hipóteses:** $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ e $C = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ são bases do espaço vetorial V ; P é a matriz de mudança da base B para a base C .

Tese: $B = (P^t)^{-1} C$

De (a), tem-se que $C = P^t B$; sendo a matriz P inversível, pode-se determinar P^{-1} e sua transposta $(P^{-1})^t$. Uma vez que, por propriedade de matrizes, tem-se que $(P^{-1})^t = (P^t)^{-1}$, pode-se escrever:

$$(P^t)^{-1} C = (P^t)^{-1} P^t B,$$

ou seja,

$$(P^t)^{-1} C = Id_n B,$$

onde Id_n é a matriz identidade de ordem n . Logo, vem:

$$B = (P^t)^{-1} C.$$

Exemplo: Considerando-se, novamente, o espaço vetorial real $\mathfrak{R}^2$, com as bases $B = \{v_1 = (1, 1), v_2 = (1, 0)\}$ e $C = \{u_1 = (1, 2), u_2 = (-4, -3)\}$, pode-se verificar os resultados apresentados no teorema anterior.

- a) Do desenvolvimento feito anteriormente, tem-se a matriz de mudança da base B para a base C :

$$P = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix};$$

sua transposta é:

$$P^t = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Escreve-se a matriz B da seguinte maneira: na 1ª linha, colocam-se as coordenadas do vetor v_1 e, na 2ª linha, as coordenadas do vetor v_2 . Efetuando-se o produto $P^t B$, vem:

$$P^t B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -4 & -3 \end{pmatrix} = C$$

Observa-se que a 1ª linha de C contém as coordenadas do vetor u_1 e a 2ª, as coordenadas do vetor u_2 . Mostrou-se, assim, que $C = P^t B$.

- b) Para mostrar que $B = (P^t)^{-1} C$, calcula-se a matriz inversa de P^t :

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2a - c & 2b - d \\ -3a - c & -3b - d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2a - c = 1 \\ -3a - c = 0 \end{cases} \text{ e } \begin{cases} 2b - d = 0 \\ -3b - d = 1 \end{cases}$$

Resolvendo os sistemas lineares, obtém-se a solução:

$$\begin{cases} a = \frac{1}{5} \\ b = -\frac{1}{5}; \\ c = -\frac{3}{5} \\ d = -\frac{2}{5} \end{cases}$$

assim, conclui-se que a matriz inversa de P^t é:

$$(P^t)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \end{pmatrix}.$$

Efetuando-se, agora, o produto $(P^t)^{-1} C$, vem:

$$(P^t)^{-1}C = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \\ 3 & -\frac{2}{5} \\ -\frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -4 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = B,$$

o que mostra o resultado do teorema.

Teorema: Sejam: V um espaço vetorial e B, C e D , três de suas bases. Se $P = [M]_C^B$ é a matriz de mudança da base B para C e $Q = [M]_D^C$ é a matriz de mudança da base C para D , então a matriz $R = [M]_D^B$, de mudança da base B para a base D , é igual ao produto das matrizes P e Q , isto é, $R = PQ = [M]_C^B [M]_D^C$.

Demonstração:

Hipóteses: B, C e D são bases de um espaço vetorial V ; $P = [M]_C^B$, $Q = [M]_D^C$ e $R = [M]_D^B$ são matrizes de mudança de base

Tese: $R = PQ$

Pelo teorema anterior, tem-se:

$$C = P^t B, \quad D = Q^t C \quad \text{e} \quad D = R^t B.$$

Então, vem:

$$D = Q^t C = Q^t P^t B;$$

Por propriedade de matrizes transpostas, tem-se que:

$$D = (PQ)^t B.$$

Como $D = R^t B$, conclui-se que $R = PQ$, ou seja, a matriz de mudança da base B para a base D é:

$$R = PQ = [M]_C^B [M]_D^C.$$

Teorema: Sejam: V um espaço vetorial e B e C duas de suas bases. Se $P = [M]_C^B$ é a matriz de mudança da base B para C e w é um elemento qualquer de V , então:

$$\text{a) } [w]_B = P[w]_C$$

$$\text{b) } [w]_C = P^{-1}[w]_B$$

Demonstração:

- a) **Hipóteses:** B e C são bases de um espaço vetorial V ; $P = [M]_C^B$ é a matriz de mudança da base B para a base C ; w é um elemento genérico de V

Tese: $[w]_B = P[w]_C$

Sejam $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ e $C = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ as bases consideradas. Então, os vetores da base C podem ser escritos como combinação linear dos vetores da base B , isto é, existem escalares a_{ij} ($1 \leq i, j \leq n$), tais que:

$$S: \begin{cases} u_1 = a_{11}v_1 + a_{21}v_2 + \dots + a_{n1}v_n \\ u_2 = a_{12}v_1 + a_{22}v_2 + \dots + a_{n2}v_n \\ \vdots \\ u_n = a_{1n}v_1 + a_{2n}v_2 + \dots + a_{nn}v_n \end{cases}$$

Portanto, por definição, a matriz de mudança da base B para a base C é

$$P = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Considerando-se um vetor w de V , este se escreve como combinação linear dos vetores das bases B e C :

$$w = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n \text{ e } w = \beta_1 u_1 + \beta_2 u_2 + \dots + \beta_n u_n.$$

Assim, têm-se suas coordenadas em relação a cada uma das bases:

$$[w]_B = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \text{ e } [w]_C = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}.$$

Igualando-se as duas expressões de w , vem:

$$w = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n = \beta_1 u_1 + \beta_2 u_2 + \dots + \beta_n u_n.$$

Substituindo-se, no segundo membro dessa equação, as expressões dos vetores u_i ($1 \leq i \leq n$) que constam do sistema S , obtém-se:

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n = \beta_1 (a_{11} v_1 + a_{21} v_2 + \cdots + a_{n1} v_n) + \beta_2 (a_{12} v_1 + a_{22} v_2 + \cdots + a_{n2} v_n) + \cdots + \beta_n (a_{1n} v_1 + a_{2n} v_2 + \cdots + a_{nn} v_n),$$

ou seja,

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n = (\beta_1 a_{11} + \beta_2 a_{12} + \cdots + \beta_n a_{1n}) v_1 + (\beta_1 a_{21} + \beta_2 a_{22} + \cdots + \beta_n a_{2n}) v_2 + \cdots + (\beta_1 a_{n1} + \beta_2 a_{n2} + \cdots + \beta_n a_{nn}) v_n$$

Uma vez que cada vetor se escreve de maneira única como combinação linear dos vetores de uma mesma base, segue-se que:

$$\begin{cases} \alpha_1 = \beta_1 a_{11} + \beta_2 a_{12} + \cdots + \beta_n a_{1n} \\ \alpha_2 = \beta_1 a_{21} + \beta_2 a_{22} + \cdots + \beta_n a_{2n} \\ \vdots \\ \alpha_n = \beta_1 a_{n1} + \beta_2 a_{n2} + \cdots + \beta_n a_{nn} \end{cases};$$

a forma matricial desse sistema é:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}.$$

Portanto, $[w]_B = P[w]_C$.

- b) **Hipóteses:** B e C são bases de um espaço vetorial V ; $P = [M]_C^B$ é a matriz de mudança da base B para a base C ; w é um elemento genérico de V .

Tese: $[w]_C = P^{-1}[w]_B$

Sabe-se que a matriz P é inversível e, do item (a), tem-se que $[w]_B = P[w]_C$.

Então, multiplicando-se ambos os membros dessa expressão pela matriz P^{-1} , obtém-se:

$$P^{-1}[w]_B = P^{-1}P[w]_C \Rightarrow P^{-1}[w]_B = Id_n[w]_C = [w]_C$$

Conclui-se, assim, que $[w]_C = P^{-1}[w]_B$.

Exemplos:

- 1) Sejam: $P_2(\mathfrak{R})$, o espaço vetorial real dos polinômios de grau menor ou igual a 2; $C = \{2, 2 + t\}$, uma base desse espaço; $P = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ a matriz mudança da base B para a base C . Determinar a base B .

Sendo $P = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, tem-se que $(P^t)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Sabe-se que $B = [P^t]^{-1} C$.

A matriz C tem como linhas as coordenadas dos vetores da base que, nesse caso, são os coeficientes dos polinômios que a compõem, isto é:

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Então:

$$B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

ou seja, os vetores da base B são: $(1, 0)$ e $(0, 1)$. Uma vez que as coordenadas dos vetores são os coeficientes dos polinômios que compõem a base, tem-se: $B = \{1, t\}$, que é a base canônica de $P_2(\mathfrak{R})$.

Essa é a forma mais simples de obter a base B ; poder-se-ia tê-la encontrado através da matriz de mudança da base B para a base C , como segue. Para isso, escreve-se cada vetor da base C como combinação linear dos vetores da base B . Tomando-se B como sendo $B = \{a_0 + a_1 t, b_0 + b_1 t\}$, tem-se, então:

$$\begin{cases} 2 = 2(a_0 + a_1 t) + 0(b_0 + b_1 t) \\ 2 + t = 2(a_0 + a_1 t) + 1(b_0 + b_1 t) \end{cases},$$

ou seja,

$$\begin{cases} 2 + 0t = 2a_0 + 2a_1 t \\ 2 + 1t = (2a_0 + b_0) + (2a_1 + b_1)t \end{cases},$$

de onde se obtêm os sistemas lineares

$$\begin{cases} 2 = 2a_0 \\ 0 = 2a_1 \end{cases} \text{ e } \begin{cases} 2 = 2a_0 + b_0 \\ 1 = 2a_1 + b_1 \end{cases}.$$

Assim, têm-se as soluções: $a_0 = 1$, $b_0 = 0$, $a_1 = 0$ e $b_1 = 1$, isto é, obtêm-se os vetores $(1, 0)$ e $(0, 1)$. Portanto, a base B é: $B = \{1, t\}$.

- 2) Sejam: $B = \{(1, 2), (-1, 1)\}$ uma base do espaço vetorial real $\mathfrak{R}^2$ e

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{5}{3} \end{pmatrix} \text{ a matriz de mudança da base } B \text{ para uma base } C. \text{ Determinar}$$

as coordenadas do vetor $v = (2, 3)$ em relação à base C .

Conforme resultado anterior, tem-se: $[v]_C = P^{-1}[v]_B$. Assim, é preciso determinar as coordenadas de v em relação à base B e a matriz inversa de P .

Escrevendo o vetor v como combinação linear dos vetores de B , vem:

$$(2, 3) = a(1, 2) + b(-1, 1) = (a - b, 2a + b);$$

Então:

$$\begin{cases} 2 = a - b \\ 3 = 2a + b \end{cases},$$

de onde se obtêm: $a = \frac{5}{3}$ e $b = -\frac{1}{3}$. Assim, as coordenadas de v em relação à base B são:

$$[v]_B = \begin{pmatrix} \frac{5}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Usando-se qualquer um dos métodos vistos anteriormente, calcula-se a inversa da matriz P , obtendo-se:

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Assim: } [v]_C = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{5}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

De modo análogo ao exemplo anterior, poder-se-ia determinar as coordenadas de v em relação à base C através da definição da matriz de mudança da base de B para C .

Considerando-se a base C como sendo: $C = \{(a, b), (c, d)\}$, tem-se:

$$\begin{cases} (a, b) = \frac{1}{3}(1, 2) + \frac{1}{3}(-1, 1) \\ (c, d) = \frac{2}{3}(1, 2) + \frac{5}{3}(-1, 1) \end{cases},$$

de onde se obtêm os vetores $(0, 1)$ e $(-1, 3)$. Assim, $C = \{(0, 1), (-1, 3)\}$. Determinam-se, agora, as coordenadas do vetor $v = (2, 3)$ em relação à base C :

$$(2, 3) = \alpha(0, 1) + \beta(-1, 3) = (-\beta, \alpha + 3\beta),$$

que leva ao sistema linear:

$$\begin{cases} 2 = -\beta \\ 3 = \alpha + 3\beta \end{cases},$$

cujas soluções são $\alpha = 9$ e $\beta = -2$. Portanto, tem-se: $[v]_C = \begin{pmatrix} 9 \\ -2 \end{pmatrix}$.

5.1. EXERCÍCIOS PROPOSTOS

- 1) Sejam: $B = \{(1, 0), (1, 1)\}$, $C = \{(2, -1), (3, 2)\}$ e D três bases do espaço vetorial real $\mathfrak{R}^2$; $Q = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ a matriz de mudança da base C para a base D .

Determinar a matriz de mudança da base B para a base D e a base D .

$$R: [M]_D^B = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}; D = \{(1, -4), (9, 6)\}$$

- 2) Determinar a matriz de mudança da base $B = \{-2, 3+t, -1+2t^2\}$ para a base $C = \{1+t, -2t+t^2, 3+t^2\}$.

$$R: P = [M]_C^B = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{13}{4} & -\frac{7}{4} \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

- 3) Sejam: B a base canônica do espaço $M_2(\mathfrak{R})$ e $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$ um elemento

desse espaço. Sabendo que a matriz de mudança da B para a base C é

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \text{ determinar as coordenadas de } A \text{ em relação à}$$

base C e a base C .

$$\mathbf{R}: [A]_C = \begin{pmatrix} -2 \\ -7 \\ 12 \\ 4 \end{pmatrix}; C = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}$$

- 4) Considerem-se, no $\mathfrak{R}^3$, as bases $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ e $C = \{g_1, g_2, g_3\}$, relacionadas da seguinte forma:

$$\begin{cases} g_1 = e_1 + e_3 \\ g_2 = 2e_1 + e_2 + e_3, \\ g_3 = e_1 + 2e_2 + e_3 \end{cases}$$

Sabendo-se que $[v]_B = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$ são as coordenadas do vetor v em relação à

base B , determinar $[v]_C$.

$$\mathbf{R}: [v]_C = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

- 5) Dadas as bases $B = \{(1, 2, -1), (3, 4, 2), (1, 1, 1)\}$ e $C = \{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)\}$, verificar que a matriz de mudança da base B para a base C pode ser determinada por $P = [M]_C^B = [CB^{-1}]^t$.

6

TRANSFORMAÇÃO LINEAR

6.1. INTRODUÇÃO

Muitos problemas de Matemática Aplicada envolvem o estudo de transformações, ou seja, a maneira como certos dados de entrada são transformados em dados de saída.

Em geral, o estudante está familiarizado com funções, tais como funções reais de uma variável real, as quais têm por domínio e contradomínio o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais (ou subconjuntos de $\mathbb{R}$), como, por exemplo, a função f indicada a seguir:

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = x^3. \end{aligned}$$

Essa função transforma um número real x qualquer em outro número real, no caso, seu cubo, isto é, x^3 .

Estudam-se, ainda, funções com outros domínios e contradomínios, como, por exemplo:

$$\begin{aligned} f: A \subset \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}. \end{aligned}$$

Neste capítulo, serão estudadas funções cujos conjuntos domínio e contradomínio são espaços vetoriais. Como os elementos de um espaço vetorial são chamados, de modo geral, de vetores, essas funções associarão vetores do conjunto domínio com vetores do conjunto contradomínio.

Definição: Dados dois espaços vetoriais V e W , sendo $V \neq \emptyset$, uma função ou transformação T de V para W é uma lei que associa a todo vetor x de V um único vetor em W , denotado por $T(x)$.

O vetor $T(x)$ de W é chamado imagem de $x \in V$ pela transformação T .

Exemplo: Considerando-se os espaços vetoriais reais $V = \mathbb{R}^3$ e $W = \mathbb{R}^2$ e a transformação definida por:

$$\begin{aligned} T: \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) &\mapsto T(x, y, z) = (x + y, y - z) \end{aligned}$$

vê-se que T leva o vetor $(0, 1, -1) \in \mathbb{R}^3$ no vetor:

$$T(0, 1, -1) = (0 + 1, 1 - (-1)) = (1, 2) \in \mathbb{R}^2.$$

6.2. TRANSFORMAÇÃO LINEAR

Definição: Sejam V e W espaços vetoriais sobre o mesmo corpo K . Uma função $T: V \rightarrow W$ é uma transformação linear se:

- a) $T(v_1 + v_2) = T(v_1) + T(v_2), \forall v_1, v_2 \in V$
- b) $T(\alpha v) = \alpha T(v), \forall v \in V, \forall \alpha \in K$

Observações:

- 1) Na transformação linear $T: V \rightarrow W$, V é chamado espaço de saída e W é chamado espaço de chegada da transformação.
- 2) A transformação linear $T: V \rightarrow W$ é também chamada de aplicação linear; ela preserva a adição de vetores e a multiplicação de um vetor por um escalar.
- 3) A transformação linear $T: V \rightarrow V$ (isto é, $W = V$) é chamada de operador linear.

Exemplos:

- 1) Considere-se a aplicação definida por:

$$\begin{aligned} T: \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\mapsto T(x, y) = (-x, y) \end{aligned}$$

T é uma transformação linear (ou operador linear), como se mostrará a seguir.

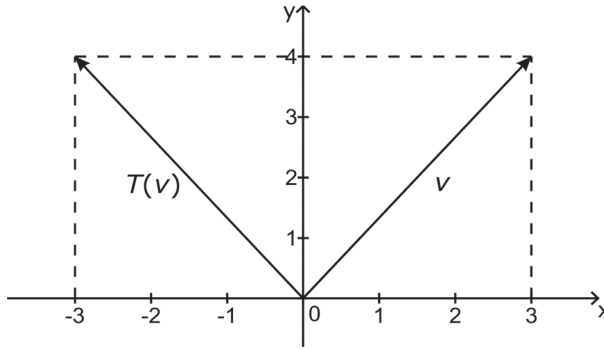
a) sejam $v_1 = (x_1, y_1)$ e $v_2 = (x_2, y_2)$ dois vetores do $\mathbb{R}^2$; tem-se:

$$\begin{aligned} T(v_1 + v_2) &= T[(x_1, y_1) + (x_2, y_2)] = T[(x_1 + x_2, y_1 + y_2)] = \\ &= (-(x_1 + x_2), y_1 + y_2) = (-x_1 - x_2, y_1 + y_2) = (-x_1, y_1) + (-x_2, y_2) = T(v_1) + T(v_2) \end{aligned}$$

b) considerando-se um vetor $v = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ e um número real α , tem-se:

$$T(\alpha v) = T[\alpha(x, y)] = T(\alpha x, \alpha y) = (-\alpha x, \alpha y) = \alpha(-x, y) = \alpha T(x, y) = \alpha T(v)$$

Figura 6.1



É possível visualizar geometricamente a ação da transformação linear T no plano de coordenadas cartesianas ortogonais, que representa geometricamente o espaço vetorial real $\mathbb{R}^2$. Considerando-se, por exemplo, o vetor $v = (3, 4)$, que é o vetor-posição do ponto $(3, 4)$, tem-se:

$$T(v) = T(3, 4) = (-3, 4).$$

Vê-se, na Figura 6.1, que a transformação promove uma rotação do vetor em torno do eixo Oy .

- 2) Seja $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, definida por $T(x, y, z) = (x + z, 2y - z)$. Mostrar que T é uma transformação linear.

Mostrar-se-á que são satisfeitas as condições da definição.

- a) Sejam $v_1 = (x_1, y_1, z_1)$ e $v_2 = (x_2, y_2, z_2)$ dois vetores do $\mathbb{R}^3$. Então:

$$\begin{aligned}
T(v_1 + v_2) &= T\left[\left((x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2)\right)\right] = T(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) = \\
&= \left((x_1 + x_2) + (z_1 + z_2), 2(y_1 + y_2) - (z_1 + z_2)\right) = \\
&= (x_1 + x_2 + z_1 + z_2, 2y_1 + 2y_2 - z_1 - z_2) = \\
&= (x_1 + z_1, 2y_1 - z_1) + (x_2 + z_2, 2y_2 - z_2) = \\
&= T(x_1, y_1, z_1) + T(x_2, y_2, z_2) = T(v_1) + T(v_2)
\end{aligned}$$

b) Sejam $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Tem-se:

$$\begin{aligned}
T(\alpha v) &= T[\alpha(x, y, z)] = T(\alpha x, \alpha y, \alpha z) = (\alpha x + \alpha z, 2\alpha y - \alpha z) \\
&= \alpha(x + z, 2y - z) = \alpha T(x, y, z) = \alpha T(v).
\end{aligned}$$

3) Sejam $\mathbf{0}: V \rightarrow W$ a aplicação nula, definida por $\mathbf{0}(v) = \mathbf{0}$, $\forall v \in V$, e $Id: V \rightarrow V$ a aplicação identidade, definida por $Id(v) = v$, $\forall v \in V$. O leitor poderá verificar que essas transformações são lineares.

4) Seja $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, definida por $T(x, y) = (x, y, 2)$. Mostrar que T não é uma transformação linear.

Deve-se mostrar que pelo menos uma das condições da definição não é satisfeita. Tem-se:

a) Sejam $v_1 = (x_1, y_1)$ e $v_2 = (x_2, y_2)$ dois vetores do $\mathbb{R}^2$. Tem-se:

$$\begin{aligned}
T(v_1 + v_2) &= T[(x_1, y_1) + (x_2, y_2)] = T(x_1 + x_2, y_1 + y_2) = \\
&= (x_1 + x_2, y_1 + y_2, 2) = (x_1, y_1, 2) + (x_2, y_2, 0) \neq T(v_1) + T(v_2)
\end{aligned}$$

Conclui-se, assim, que T não é transformação linear.

5) As seguintes transformações apresentam uma visão geométrica:

a) Expansão:

$$\begin{aligned}
T: \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\
(x, y) &\mapsto T(x, y) = \alpha(x, y), \text{ sendo } \alpha \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Na Figura 6.2, mostram-se, para exemplificar, o vetor $v = (1, 2)$ e o vetor $T(v) = 2v$, ou seja, $T(v) = T(1, 2) = 2(1, 2) = (2, 4)$, onde se considerou $\alpha = 2$.

b) Reflexão em torno do eixo Ox :

$$T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y) \mapsto T(x, y) = (x, -y)$$

Considerando-se, por exemplo, o vetor $v = (2, -3)$, tem-se que $T(v) = T(2, -3) = (2, 3)$. Esses vetores são mostrados na Figura 6.3.

Figura 6.2

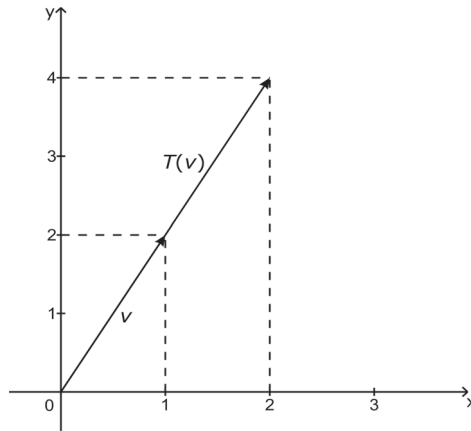
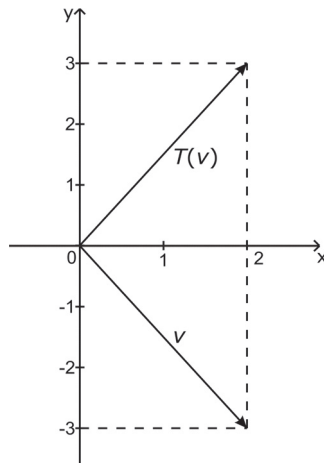


Figura 6.3



c) Reflexão na origem:

$$T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y) \mapsto T(x, y) = (-x, -y)$$

A imagem do vetor $v = (2, 3)$ por essa transformação T é $T(v) = T(2, 3) = (-2, -3)$, conforme se vê na Figura 6.4.

d) Rotação de um ângulo θ no sentido anti-horário:

$$T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y) \mapsto T(x, y) = (x \cos \theta - y \sin \theta, y \cos \theta + x \sin \theta)$$

Tomando-se, novamente, o vetor $v = (2, 3)$ e considerando-se um ângulo de rotação $\theta = 60^\circ$, tem-se:

$$T(x, y) = (2 \cos(60^\circ) - 3 \sin(60^\circ), 3 \cos(60^\circ) + 2 \sin(60^\circ)), \text{ ou seja,}$$

$$\text{tem-se o vetor } T(2, 3) = \left(1 - \frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2} + \sqrt{3}\right), \text{ mostrado na Figura 6.5.}$$

Figura 6.4

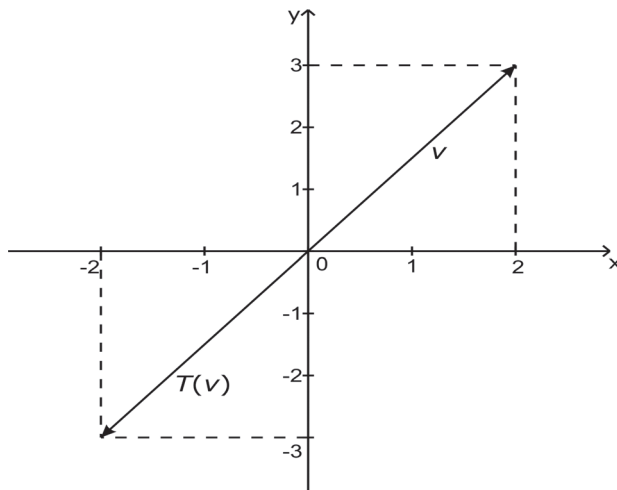
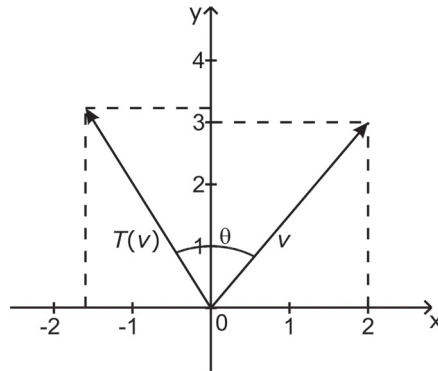


Figura 6.5



e) Reflexão em torno da reta $y = x$:

$$T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y) \mapsto T(x, y) = (y, x)$$

Considerando-se, agora, o vetor $v = (3, 1)$, obter-se-á, pela transformação T , o vetor $T(v) = (1, 3)$, os quais são simétricos em relação à reta $y = x$, como mostra a Figura 6.6.

- 6) Sejam: $M_n(\mathbb{R})$ o espaço vetorial das matrizes quadradas de ordem n sobre o corpo $\mathbb{R}$ e $B \in M_n(\mathbb{R})$ uma matriz fixa. Verificar se é linear a transformação

$$T: M_n(\mathbb{R}) \rightarrow M_n(\mathbb{R})$$

$$A \mapsto T(A) = AB - BA$$

Verificar-se-á se são satisfeitas as condições da definição.

- a) Sejam A e C duas matrizes de $M_n(\mathbb{R})$. Tem-se:

$$T(A) = AB - BA \text{ e } T(C) = CB - BC;$$

então:

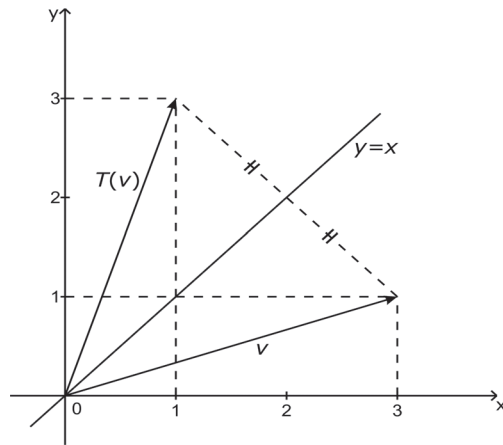
$$\begin{aligned} T(A + C) &= (A + C)B - B(A + C) = AB + CB - BA - BC = \\ &= (AB - BA) + (CB - BC) = T(A) + T(C) \end{aligned}$$

- b) Sejam $A \in M_n(\mathbb{R})$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Tem-se:

$$T(\alpha A) = (\alpha A)B - B(\alpha A) = \alpha(AB) - \alpha(BA) = \alpha(AB - BA) = \alpha T(A)$$

Conclui-se, de (a) e (b), que T é uma transformação linear.

Figura 6.6



7) Considere-se a aplicação $T : P_2(\mathfrak{R}) \rightarrow M_2(\mathfrak{R})$, definida por:

$$T(a_0 + a_1 t + a_2 t^2) = \begin{pmatrix} a_0 + a_1 & a_2 \\ a_1 & a_1 - a_2 \end{pmatrix}.$$

Mostrar que T é uma transformação linear.

Deve-se mostrar que são satisfeitas as condições da definição.

a) Sejam $p_1(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$ e $p_2(t) = b_0 + b_1 t + b_2 t^2$ dois elementos de $P_2(\mathfrak{R})$. Então:

$$\begin{aligned} T(p_1(t) + p_2(t)) &= T(a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + b_0 + b_1 t + b_2 t^2) = \\ &= T[(a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)t + (a_2 + b_2)t^2] = \\ &= \begin{pmatrix} a_0 + a_1 + b_0 + b_1 & a_2 + b_2 \\ a_1 + b_1 & a_1 + b_1 - a_2 - b_2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} a_0 + a_1 & a_2 \\ a_1 & a_1 - a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_0 + b_1 & b_2 \\ b_1 & b_1 - b_2 \end{pmatrix} = \\ &= T(p_1(t)) + T(p_2(t)) \end{aligned}$$

$$\text{Assim, } T(p_1(t) + p_2(t)) = T(p_1(t)) + T(p_2(t)).$$

b) Sejam $p(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2$ um elemento de $P_2(\mathbb{R})$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Tem-se:

$$\begin{aligned} T(\alpha p(t)) &= T(\alpha a_0 + \alpha a_1t + \alpha a_2t^2) = \begin{pmatrix} \alpha a_0 + \alpha a_1 & \alpha a_2 \\ \alpha a_1 & \alpha a_1 - \alpha a_2 \end{pmatrix} = \\ &= \alpha \begin{pmatrix} a_0 + a_1 & a_2 \\ a_1 & a_1 - a_2 \end{pmatrix} = \alpha T(p(t)). \end{aligned}$$

De (a) e (b), conclui-se que T é uma transformação linear.

Teorema: Sejam V e W dois espaços vetoriais reais e $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ uma base ordenada de V . Dados $w_1, w_2, \dots, w_n$ elementos arbitrários de W , existe uma única transformação linear $T: V \rightarrow W$ tal que $T(v_1) = w_1$, $T(v_2) = w_2$, ..., $T(v_n) = w_n$.

Demonstração:

Hipóteses: $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ é base de V ; $w_1, w_2, \dots, w_n$ são elementos arbitrários de W

Tese: existe uma única transformação linear $T: V \rightarrow W$ tal que $T(v_1) = w_1$, $T(v_2) = w_2$, ..., $T(v_n) = w_n$

(i) **Existência**

Seja $v \in V$. Então, existem números reais $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ tais que:

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n.$$

Define-se a seguinte transformação:

$$\begin{aligned} T: V &\rightarrow W \\ v &\mapsto T(v) = \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \dots + \alpha_n w_n. \end{aligned}$$

Observe-se que T está bem definida, pois $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ são únicos. Além disso, tem-se:

$$T(v) = T(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n) = \alpha_1 T(v_1) + \alpha_2 T(v_2) + \dots + \alpha_n T(v_n);$$

conclui-se, assim, que, para $i = 1, 2, \dots, n$, tem-se $T(v_i) = w_i$.

(ii) **Unicidade**

Suponha-se que existe uma transformação linear $T': V \rightarrow W$ tal que $T'(v_i) = w_i$, para $i = 1, 2, \dots, n$. Então, vem:

$$\begin{aligned} T'(v) &= T'(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n) = \alpha_1 T'(v_1) + \alpha_2 T'(v_2) + \dots + \alpha_n T'(v_n) = \\ &= \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \dots + \alpha_n w_n = T(v), \end{aligned}$$

de onde se segue que $T' = T$.

Observação: com este teorema, pode-se afirmar que as transformações lineares são determinadas conhecendo-se apenas seu valor nos elementos de uma base de seu espaço de saída.

6.3. PROPRIEDADES DAS TRANSFORMAÇÕES LINEARES

Para toda transformação linear $T: V \rightarrow W$, são válidas as seguintes propriedades:

$$(P_1) \quad T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$$

De fato, tem-se:

$$T(\mathbf{0}) = T(0 \cdot v) = 0 \cdot T(v) = \mathbf{0}, \quad \forall v \in V.$$

$$(P_2) \quad T(-v) = -T(v), \quad \forall v \in V$$

De fato, tem-se:

$$T(-v) = T(-1 \cdot v) = -1 \cdot T(v) = -T(v)$$

$$(P_3) \quad T(v_1 - v_2) = T(v_1) - T(v_2), \quad \forall v_1, v_2 \in V$$

Com efeito, tem-se:

$$T(v_1 - v_2) = T(v_1 + (-v_2)) = T(v_1) + T(-v_2) = T(v_1) - T(v_2)$$

$$(P_4) \quad T\left[\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i\right] = \sum_{i=1}^n \alpha_i T(v_i), \quad \forall v_i \in V, \quad \forall \alpha_i \in K; \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

De fato, tem-se:

$$\begin{aligned} T\left[\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i\right] &= T(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n) = T(\alpha_1 v_1) + T(\alpha_2 v_2) + \cdots + T(\alpha_n v_n) = \\ &= \alpha_1 T(v_1) + \alpha_2 T(v_2) + \cdots + \alpha_n T(v_n) = \sum_{i=1}^n \alpha_i T(v_i) \end{aligned}$$

(P_5) Se $U \subset V$ como subespaço vetorial, então $T(U) \subset W$ como subespaço vetorial.

Sugere-se demonstrar a afirmação.

Observações:

- 1) Da 1ª propriedade, decorre que, se uma transformação T é tal que $T(\mathbf{0}) \neq \mathbf{0}$, então T não é linear. Ressalte-se, no entanto, que a condição de que $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ não é suficiente para que T seja linear.
- 2) A 4ª propriedade mostra que a transformação linear preserva combinações lineares. Diz-se, então, que a transformação linear satisfaz o princípio de superposição.

Exemplo: Considere-se uma transformação linear $T: \mathfrak{R}^3 \rightarrow P_2(\mathfrak{R})$ satisfazendo as seguintes condições: $T(1,1,1) = 2 - 3t$, $T(1,1,0) = 1 + t - t^2$ e $T(1,0,0) = t + 2t^2$. Determinar a expressão de T .

De acordo com os espaços de saída e de chegada de T , esta transforma vetores do $\mathfrak{R}^3$ em polinômios de grau menor ou igual a 2, com coeficientes reais. Para que seja possível construir a expressão de T aplicada em um vetor $(x, y, z) \in \mathfrak{R}^3$, é preciso conhecê-la aplicada nos vetores de uma base do seu espaço de saída, no caso, o $\mathfrak{R}^3$.

É possível mostrar que o conjunto $B = \{(1,1,1), (1,1,0), (1,0,0)\}$ é uma base deste espaço e, portanto, são conhecidas as imagens desses vetores, pela transformação T .

Tomando um vetor genérico $(x, y, z) \in \mathfrak{R}^3$, este é uma combinação linear dos vetores da base B e, portanto, pode-se escrever:

$$(x, y, z) = a(1,1,1) + b(1,1,0) + c(1,0,0),$$

ou seja,

$$(x, y, z) = (a + b + c, a + b, a),$$

de onde se segue que

$$\begin{cases} x = a + b + c \\ y = a + b \\ z = a \end{cases},$$

e, portanto,

$$\begin{cases} a = z \\ b = y - z \\ c = x - y \end{cases}$$

Logo, pode-se escrever:

$$(x, y, z) = z(1, 1, 1) + (y - z)(1, 1, 0) + (x - y)(1, 0, 0).$$

Aplicando-se a transformação em ambos os lados desta igualdade, vem:

$$T(x, y, z) = T(z(1, 1, 1) + (y - z)(1, 1, 0) + (x - y)(1, 0, 0)).$$

Pela propriedade (P_3) , tem-se:

$$\begin{aligned} T(x, y, z) &= zT(1, 1, 1) + (y - z)T(1, 1, 0) + (x - y)T(1, 0, 0) = \\ &= z(2 - 3t) + (y - z)(1 + t - t^2) + (x - y)(t + 2t^2) \\ &= (y + z) + (x - 4z)t + (2x - 3y + z)t^2. \end{aligned}$$

Assim, para qualquer vetor $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, tem-se que

$$T(x, y, z) = (y + z) + (x - 4z)t + (2x - 3y + z)t^2,$$

que é a expressão procurada da transformação T .

6.4. NÚCLEO E IMAGEM

Definição: O conjunto imagem de uma transformação linear $T: V \rightarrow W$ é o conjunto:

$$\text{Im}(T) = \{w \in W; \exists v \in V / T(v) = w\}.$$

Assim, a imagem de T é constituída dos vetores de W que são imagem de pelo menos um vetor de V , através da aplicação T . É claro que, de maneira geral, tem-se que $\text{Im}(T) \subset W$; pode ocorrer, entretanto, que $\text{Im}(T) = W$.

Definição: O núcleo de uma transformação linear $T: V \rightarrow W$ é o conjunto:

$$\text{Ker}(T) = \{v \in V / T(v) = \mathbf{0}\}.$$

Observações:

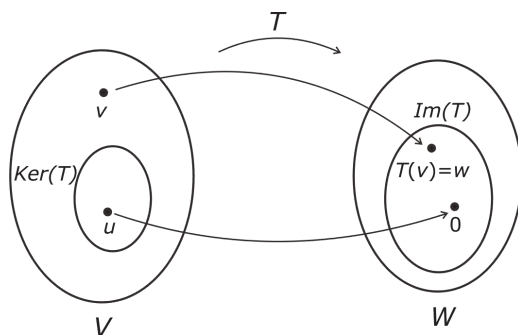
- 1) A notação $\text{Ker}(T)$ para núcleo de T deve-se à palavra inglesa *kernel*, que significa *núcleo*.
- 2) O núcleo de T é um subconjunto de V , isto é, $\text{Ker}(T) \subset V$.
- 3) Também se pode fazer referência ao núcleo de T como *nulidade de T* , com a notação $\text{Nul}(T)$.
- 4) Quando se consideram funções da forma:

$$\begin{aligned} f: A \subseteq \mathfrak{R} &\rightarrow B \subseteq \mathfrak{R} \\ x &\mapsto y = f(x) \end{aligned}$$

ou seja, funções reais de uma variável real, o conjunto dos elementos de A tais que $f(x) = 0$ é o conjunto dos *zeros* da função f , ou seja, das *raízes* reais da equação $f(x) = 0$. Esses são os valores da variável x que anulam a função f , de onde se origina a expressão *nulidade* da função. No caso de transformações lineares, não se utiliza a expressão *zero da transformação* para um vetor v tal que $T(v) = \mathbf{0}$. Diz-se, apenas, que v pertence ao núcleo de T e, portanto, é levado por ela ao vetor nulo do espaço de chegada.

A Figura 6.7 mostra a representação gráfica de uma transformação linear $T: V \rightarrow W$, com os conjuntos $\text{Ker}(T) \subset V$, no qual se mostra um vetor u tal que $T(u) = \mathbf{0}$, e $\text{Im}(T) \subset W$, no qual se mostram os vetores w , imagem de um vetor $v \in V$, e o vetor nulo $\mathbf{0}$, imagem do vetor $u \in V$.

Figura 6.7

**Exemplos:**

- 1) Considere-se a transformação linear T , definida por:

$$T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(x, y) \mapsto T(x, y) = (2x - y, 2x - y, 0)$$

Determinar os conjuntos $Ker(T) \subset \mathbb{R}^2$ e $Im(T) \subset \mathbb{R}^3$.

Para que um vetor $v = (x, y)$ pertença ao núcleo de T , é preciso que $T(v) = \mathbf{0}$, ou seja, deve-se ter: $T(x, y) = (0, 0, 0)$. Assim, vem:

$$(2x - y, 2x - y, 0) = (0, 0, 0),$$

de onde se segue que $y = 2x$. Portanto, o núcleo de T é o conjunto:

$$Ker(T) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y = 2x\},$$

isto é, são os pares ordenados $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ que pertencem à reta de equação $y = 2x$.

O conjunto imagem de T é:

$$Im(T) = \{w \in \mathbb{R}^3; \exists v \in \mathbb{R}^2 / T(v) = w\},$$

ou seja, são as ternas $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ do tipo $(2x - y, 2x - y, 0)$.

Um sistema de geradores para o conjunto imagem é $[(2, 2, 0), (-1, -1, 0)]$. Como esses dois vetores são LD, pois são múltiplos um do outro, pode-se retirar um deles, por exemplo, $(-1, -1, 0)$.

Então, conclui-se que $\text{Im}(T) = [(2, 2, 0)]$, ou seja,

$$\text{Im}(T) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / y = x \text{ e } z = 0\}.$$

A imagem geométrica desse conjunto é a reta do $\mathbb{R}^3$ de equação:

$$\begin{cases} y = x \\ z = 0 \end{cases}.$$

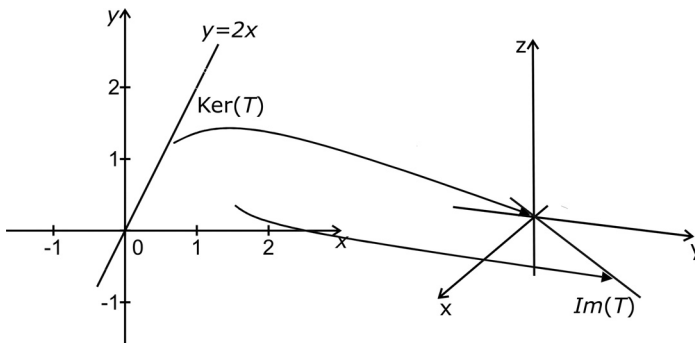
Da análise efetuada, têm-se as seguintes conclusões:

- a) os pares ordenados do $\mathbb{R}^2$ que pertencem à reta $y = 2x$ pertencem ao núcleo de T , isto é, são levados, por esta transformação, ao elemento $(0, 0, 0) \in \mathbb{R}^3$;
- b) os demais elementos do $\mathbb{R}^2$ são levados, por T , à reta do $\mathbb{R}^3$ de equação

$$\begin{cases} y = x \\ z = 0 \end{cases}.$$

Essas conclusões são mostradas na Figura 6.8.

Figura 6.8



- 2) Considere-se a transformação linear

$$\begin{aligned} T: \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) &\mapsto T(x, y, z) = (x, y, 0) \end{aligned}$$

Para que um vetor $v = (x, y, z)$ pertença ao núcleo de T , é preciso que $T(v) = \mathbf{0}$, ou seja, deve-se ter: $T(x, y, z) = (0, 0, 0)$. Assim, vem:

$$(x, y, 0) = (0, 0, 0),$$

de onde se conclui que $x = y = 0$ e z pode ser qualquer número real. Portanto, o núcleo de T é o conjunto:

$$\text{Ker}(T) = \{(0, 0, z) / z \in \mathbb{R}\}.$$

Considerando-se a representação geométrica do $\mathbb{R}^3$, são os pontos sobre o eixo Oz .

O conjunto imagem de T é:

$$\text{Im}(T) = \{w \in \mathbb{R}^3; \exists v \in \mathbb{R}^3 / T(v) = w\},$$

ou seja, são as ternas $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ do tipo $(x, y, 0)$.

$$\text{Portanto, } \text{Im}(T) = \{(x, y, 0) / x, y \in \mathbb{R}\}.$$

Considerando-se a representação geométrica do $\mathbb{R}^3$, são os pontos sobre o plano Oxy .

Teorema: Sejam V e W espaços vetoriais sobre um corpo K e $T: V \rightarrow W$ uma transformação linear. Então:

- a) $\text{Ker}(T)$ é um subespaço vetorial de V .
- b) $\text{Im}(T)$ é um subespaço vetorial de W .

Demonstração:

Hipótese: $T: V \rightarrow W$ uma transformação linear

Teses:

- a) $\text{Ker}(T)$ é um subespaço vetorial de V
 - b) $\text{Im}(T)$ é um subespaço vetorial de W
- a) Para provar que $\text{Ker}(T)$ é um subespaço vetorial de V , devem-se mostrar que são verdadeiros os três axiomas da definição de subespaço vetorial. De fato, tem-se:
- 1) como $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, segue-se que $\mathbf{0} \in \text{Ker}(T)$.
 - 2) sejam u e u' dois elementos de $\text{Ker}(T)$. Então, $T(u) = \mathbf{0}$ e $T(u') = \mathbf{0}$.

Assim, sendo T uma transformação linear, vem:

$$T(u + u') = T(u) + T(u') = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}$$

e, portanto, $u + u' \in \text{Ker}(T)$.

- 3) sejam $u \in \text{Ker}(T)$ e $\alpha \in K$. Sendo u um elemento de $\text{Ker}(T)$, segue-se que $T(u) = \mathbf{0}$. Então, como T é uma transformação linear, vem:

$$T(\alpha u) = \alpha T(u) = \alpha \mathbf{0} = \mathbf{0},$$

de onde se conclui que $\alpha u \in \text{Ker}(T)$.

De (1), (2) e (3), conclui-se que $\text{Ker}(T)$ é um subespaço vetorial de V .
Escreve-se: $\text{Ker}(T) \subset_{se} V$.

- b) Mostrar-se-á, agora, que $\text{Im}(T)$ é um subespaço vetorial de W .

- 1) Como $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, segue-se que $\mathbf{0} \in \text{Im}(T)$.
2) Sejam w e w' dois elementos de $\text{Im}(T)$. Então, existem elementos u e u' em V tais que $T(u) = w$ e $T(u') = w'$. Assim, sendo T uma transformação linear, vem:

$$T(u + u') = T(u) + T(u') = w + w'$$

e, portanto, $w + w' \in \text{Im}(T)$.

- 3) Sejam $w \in \text{Im}(T)$ e $\alpha \in K$. Se $w \in \text{Im}(T)$, segue-se que existe um elemento $u \in V$ tal que $T(u) = w$. Por hipótese, T é transformação linear; então:

$$T(\alpha u) = \alpha T(u) = \alpha w,$$

de onde se conclui que $\alpha w \in \text{Im}(T)$.

De (1), (2) e (3), conclui-se que $\text{Im}(T)$ é um subespaço vetorial de W .
Escreve-se: $\text{Im}(T) \subset_{se} W$.

Definição: Seja $T: V \rightarrow W$ uma transformação linear. Define-se:

- $\dim \text{Im}(T) =$ posto de T ;
- $\dim \text{Ker}(T) =$ nulidade de T .

Exemplos:

1) Considere-se a transformação linear $T : M_2(\mathfrak{R}) \rightarrow \mathfrak{R}^3$, definida por:

$$T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (2a - 5b - 3c, a + c, b + d).$$

Determinar $\text{Ker}(T)$ e $\text{Im}(T)$, assim como as dimensões desses espaços.

Seja $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{Ker}(T)$. Por definição do núcleo de T , tem-se:

$$T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (0, 0, 0),$$

ou seja,

$$(2a - 5b - 3c, a + c, b + d) = (0, 0, 0),$$

de onde vem que:

$$\begin{cases} 2a - 5b - 3c = 0 \\ a + c = 0 \\ b + d = 0 \end{cases}.$$

Resolvendo-se esse sistema linear, obtêm-se:

$$\begin{cases} a = -d \\ b = -d \\ c = d \end{cases}.$$

Assim:

$$\text{Ker}(T) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathfrak{R}) / a = b = -d \text{ e } c = d, \forall d \in \mathfrak{R} \right\},$$

ou, equivalentemente,

$$\text{Ker}(T) = \left\{ \begin{pmatrix} -d & -d \\ d & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathfrak{R}) / d \in \mathfrak{R} \right\}.$$

Encontrar-se-á uma base para esse espaço.

Tomando-se um elemento $\begin{pmatrix} -d & -d \\ d & d \end{pmatrix} \in \text{Ker}(T)$, pode-se escrever:

$$\begin{pmatrix} -d & -d \\ d & d \end{pmatrix} = d \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Então, $B = \left\{ \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ é base de $\text{Ker}(T)$ e, portanto, $\dim \text{Ker}(T) = 1$.

Os elementos $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ que pertencem ao conjunto $\text{Im}(T)$, pela própria definição de T , são do tipo $(2a - 5b - 3c, a + c, b + d)$, onde a, b, c e d são os elementos da matriz $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Para encontrar uma base para $\text{Im}(T)$, escreve-se:

$$(2a - 5b - 3c, a + c, b + d) = a(2, 1, 0) + b(-5, 0, 1) + c(-3, 1, 0) + d(0, 0, 1).$$

Assim, $S = \{(2, 1, 0), (-5, 0, 1), (-3, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ é um sistema de geradores para $\text{Im}(T)$. Para encontrar uma base desse espaço, a partir desse sistema de geradores, conforme se viu anteriormente, constrói-se uma matriz com os vetores do conjunto de geradores e escalona-se a matriz. As linhas não nulas da matriz resultante do escalonamento serão vetores LI, os quais formarão a base procurada. Então:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -5 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{5L_1+2L_2 \\ 3L_1+2L_3}} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2-L_3} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{2}L_3+L_4} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Então $B' = \{(2, 1, 0), (0, 5, 2), (0, 0, 2)\}$ é base de $\text{Im}(T)$ e, portanto, $\dim \text{Im}(T) = 3$.

- 2) Determinar um operador linear $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\text{Im}(T) = [(2, 1, 1), (1, -1, 2)]$.

Observe-se que os vetores $(2,1,1)$ e $(1,-1,2)$ são LI. Considere-se a base canônica $\{e_1, e_2, e_3\}$ do $\mathfrak{R}^3$ e seja $T: \mathfrak{R}^3 \rightarrow \mathfrak{R}^3$ tal que $T(e_1) = (2,1,1)$, $T(e_2) = (1,-1,2)$ e $T(e_3) = (0,0,0)$. Logo, tomando $(x, y, z) \in \mathfrak{R}^3$, tem-se:

$$(x, y, z) = x(1,0,0) + y(0,1,0) + z(0,0,1) = xe_1 + ye_2 + ze_3.$$

Então:

$$\begin{aligned} T(x, y, z) &= T(xe_1 + ye_2 + ze_3) = T(xe_1) + T(ye_2) + T(ze_3) = \\ &= xT(e_1) + yT(e_2) + zT(e_3) = \\ &= x(2,1,1) + y(1,-1,2) + z(0,0,0) = (2x + y, x - y, x + 2y). \end{aligned}$$

Assim,

$$T(x, y, z) = (2x + y, x - y, x + 2y).$$

- 3) Seja $T: \mathfrak{R}^3 \rightarrow \mathfrak{R}^2$ a transformação linear definida por $T(x, y, z) = (x + y, 2x - y + z)$.

- a) Determinar uma base e a dimensão de $\text{Ker}(T)$.

Por definição, tem-se:

$$\text{Ker}(T) = \{(x, y, z) \in \mathfrak{R}^3 / T(x, y, z) = (0, 0)\}.$$

Assim, $\text{Ker}(T)$ é constituído dos vetores do $\mathfrak{R}^3$ da seguinte forma:

$$T(x, y, z) = (x + y, 2x - y + z) = (0, 0),$$

ou seja,

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ 2x - y + z = 0 \end{cases},$$

de onde se conclui que $y = -x$ e $z = -3x$. Portanto, os vetores do $\mathfrak{R}^3$ que pertencem ao núcleo de T são da forma $(x, -x, -3x)$, $\forall x \in \mathfrak{R}$, isto é,

$$\text{Ker}(T) = \{(x, -x, -3x) / x \in \mathfrak{R}\} = \{x(1, -1, -3) / x \in \mathfrak{R}\} = [(1, -1, -3)].$$

Logo, $\{(1, -1, -3)\}$ é uma base de $\text{Ker}(T)$ e $\dim \text{Ker}(T) = 1$.

b) Determinar uma base e a dimensão de $\text{Im}(T)$.

Tem-se, por definição:

$$\text{Im}(T) = \{(x + y, 2x - y + z) / x, y, z \in \mathbb{R}\} = \{x(1, 2) + y(1, -1) + z(0, 1) / x, y, z \in \mathbb{R}\}.$$

Assim, $S = [(1, 2), (1, -1), (0, 1)]$ é um sistema de geradores para $\text{Im}(T)$.

Para encontrar uma base desse espaço, a partir desse sistema de geradores, constrói-se uma matriz com os vetores do conjunto de geradores e escalona-se a matriz. As linhas não nulas da matriz resultante do escalonamento serão vetores LI, os quais formarão a base procurada. Então:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 - L_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{3L_2 - L_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Então $B' = \{(1, 2), (0, 1)\}$ é base de $\text{Im}(T)$ e, portanto, $\dim \text{Im}(T) = 2$.

6.5. OPERAÇÕES COM TRANSFORMAÇÕES LINEARES

6.5.1. Adição

Sejam V e W espaços vetoriais sobre um corpo K e $F: V \rightarrow W$ e $G: V \rightarrow W$ transformações lineares. Chama-se adição de F com G a aplicação $F + G: V \rightarrow W$ tal que $(F + G)(v) = F(v) + G(v), \forall v \in V$.

Propriedades: dadas as transformações lineares $F: V \rightarrow W$, $G: V \rightarrow W$ e $H: V \rightarrow W$, a operação de adição satisfaz as propriedades:

- Comutativa:** $F + G = G + F$
- Associativa:** $F + (G + H) = (F + G) + H$
- Elemento Neutro:** é a transformação linear nula $N: V \rightarrow W$, definida por $N(v) = \mathbf{0}, \forall v \in V$, satisfazendo: $F + N = N + F = F$.
- Elemento Oposto:** considerada a transformação linear $F: V \rightarrow W$, o elemento oposto da operação de adição é a transformação $(-F): V \rightarrow W$, definida por $(-F)(v) = -v, \forall v \in V$, que satisfaz: $F + (-F) = (-F) + F = N$.

Proposição: Sejam: V e W espaços vetoriais sobre um corpo K e $F: V \rightarrow W$ e $G: V \rightarrow W$ duas transformações lineares. Então $F + G$ é uma transformação linear.

Demonstração:

Hipótese: F e G são transformações lineares

Tese: $F + G$ é transformação linear

a) Sejam u e v dois elementos de V . Tem-se, por definição, que:

$$(F + G)(u + v) = F(u + v) + G(u + v).$$

Como, por hipótese, F e G são transformações lineares, pode-se escrever:

$$\begin{aligned} (F + G)(u + v) &= F(u + v) + G(u + v) = [F(u) + F(v)] + [G(u) + G(v)] = \\ &= [F(u) + G(u)] + [F(v) + G(v)] = (F + G)(u) + (F + G)(v) \end{aligned}$$

$$\text{Assim, } (F + G)(u + v) = (F + G)(u) + (F + G)(v).$$

b) Sejam $u \in V$ e $\alpha \in K$; tem-se:

$$(F + G)(\alpha u) = F(\alpha u) + G(\alpha u) = \alpha F(u) + \alpha G(u) = \alpha [F(u) + G(u)] = \alpha [(F + G)(u)].$$

De (a) e (b), conclui-se que $F + G$ é uma transformação linear.

6.5.2. Subtração

Sejam V e W espaços vetoriais sobre um corpo K e $F: V \rightarrow W$ e $G: V \rightarrow W$ transformações lineares. Chama-se subtração das transformações F e G a aplicação $F - G: V \rightarrow W$ tal que $(F - G)(v) = F(v) - G(v)$, $\forall v \in V$.

A subtração de F e G é a adição de F com a transformação oposta de G , ou seja, com $-G$; assim, a subtração de F e G é obtida fazendo-se:

$$F - G = F + (-G)$$

É claro que esta operação satisfaz as mesmas propriedades da adição de transformações. Também é possível demonstrar que é verdadeira a proposição enunciada a seguir.

Proposição: Sejam: V e W espaços vetoriais sobre um corpo K e $F: V \rightarrow W$ e $G: V \rightarrow W$ duas transformações lineares. Então $F - G$ é uma transformação linear.

6.5.3. Multiplicação de uma transformação linear por um escalar

Sejam V e W espaços vetoriais sobre um corpo K , $F: V \rightarrow W$ uma transformação linear e $\alpha \in K$. Chama-se multiplicação da transformação F pelo número α a aplicação $(\alpha F): V \rightarrow W$ tal que $(\alpha F)(v) = \alpha F(v)$, $\forall v \in V$.

Propriedades: dadas as transformações lineares $F: V \rightarrow W$ e $G: V \rightarrow W$ e os escalares α e β , a operação de multiplicação por escalar satisfaz as propriedades:

- a) $\alpha(\beta F) = \beta(\alpha F) = (\alpha\beta)F$
- b) $\alpha(F + G) = \alpha F + \alpha G$
- c) $(\alpha + \beta)F = \alpha F + \beta F$
- d) $1 \cdot F = F$

É possível demonstrar que é verdadeiro o resultado seguinte.

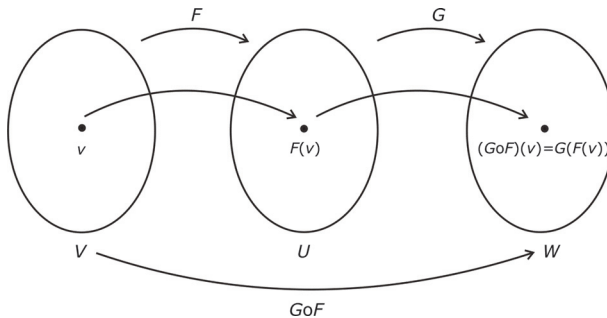
Proposição: Sejam: V e W espaços vetoriais sobre um corpo K , $F: V \rightarrow W$ e $\alpha \in K$. Então αF é uma transformação linear.

6.5.4. Composição de Transformações Lineares

Sejam: V , U e W espaços vetoriais sobre um corpo K e $F: V \rightarrow U$ e $G: U \rightarrow W$ transformações lineares. Chama-se transformação composta de G com F , denotada por $G \circ F$, a aplicação $G \circ F: V \rightarrow W$, definida por: $(G \circ F)(v) = G(F(v))$, $\forall v \in V$.

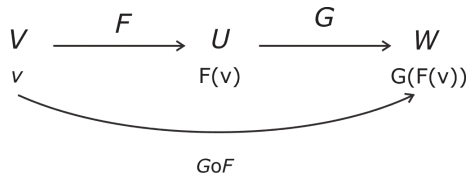
A representação gráfica é mostrada na Figura 6.9.

Figura 6.9



Assim, tem-se:

Figura 6.10



Observação: a composição de G com F , denotada por $G \circ F$, é lida *G composta com F* ou, então, *G bola F*. Não se trata, evidentemente, do produto de G por F , denotado por $G \cdot F$. Além disso, tem-se, em geral, que $(G \circ F)(v) \neq (F \circ G)(v)$, ou seja, *G composta com F* é diferente, em geral, de *F composta com G*. Portanto, a composição de transformações lineares não é comutativa.

Proposição: Sejam: V, U e W espaços vetoriais sobre um corpo K e $F: V \rightarrow U$ e $G: U \rightarrow W$ transformações lineares. Então, $G \circ F: V \rightarrow W$ é uma transformação linear.

Demonstração:

Hipótese: F e G são transformações lineares

Tese: $G \circ F$ é transformação linear

a) Sejam u e v dois elementos de V . Tem-se, por definição, que:

$$(G \circ F)(u + v) = G(F(u + v)).$$

Como, por hipótese, F é uma transformação linear, pode-se escrever:

$$(G \circ F)(u + v) = G(F(u + v)) = G(F(u) + F(v)).$$

Por sua vez, G é uma transformação linear; então:

$$G(F(u) + F(v)) = G(F(u)) + G(F(v)) = (G \circ F)(u) + (G \circ F)(v)$$

$$\text{Assim, } (G \circ F)(u + v) = (G \circ F)(u) + (G \circ F)(v).$$

b) Sejam $u \in V$ e $\alpha \in K$; tem-se:

$$(G \circ F)(\alpha u) = G(F(\alpha u)) = G(\alpha F(u)) = \alpha G(F(u)) = \alpha (G \circ F)(u)$$

De (a) e (b), conclui-se que $G \circ F$ é uma transformação linear.

Para o caso dos operadores lineares, são válidas as propriedades que se seguem.

Propriedades:

Sejam: V , um espaço vetorial sobre um corpo K ; $F: V \rightarrow V$, $G: V \rightarrow V$ e $H: V \rightarrow V$ operadores lineares. Então, são válidas as propriedades:

- a) *Associativa*: $F \circ (G \circ H) = (F \circ G) \circ H$.
- b) *Elemento Neutro*: é o operador linear identidade $Id: V \rightarrow V$, definido por $Id(v) = v, \forall v \in V$, satisfazendo: $F \circ Id = Id \circ F = F$.
- c) *Distributiva*:
 - à esquerda: $F \circ (G + H) = F \circ G + F \circ H$
 - à direita: $(G + H) \circ F = G \circ F + H \circ F$
- d) *Elemento Inverso*: considerado o operador linear inversível $F: V \rightarrow V$, o elemento inverso da composição de transformações é o operador $F^{-1}: V \rightarrow V$ tal que $F \circ F^{-1} = F^{-1} \circ F = Id$.

Observação: as transformações lineares inversíveis serão estudadas no Capítulo 7.

Exemplo: Dadas as transformações lineares: $F: \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}^3$, $G: \mathfrak{R}^3 \rightarrow \mathfrak{R}^2$ e $H: \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}^3$, definidas por:

$$F(x, y) = (x + y, x - y, x), \quad G(x, y, z) = (x - y, x + z) \quad \text{e}$$

$$H(x, y) = (2x - y, y, x + 2y), \quad \text{determinar:}$$

a) $R = 3F + 2H$

Tem-se:

$$\begin{aligned} R(x, y) &= 3F(x, y) + 2H(x, y) = 3(x + y, x - y, x) + 2(2x - y, y, x + 2y) \\ &= (7x + y, 3x - y, 5x + 4y) \end{aligned}$$

b) $G \circ F$

$$\begin{aligned} (G \circ F)(x, y) &= G(F(x, y)) = G(x + y, x - y, x) = \\ &= (x + y - x + y, x + y + x) = (2y, 2x + y) \end{aligned}$$

$$c) \quad F^2 = F \circ F$$

$$\begin{aligned} F^2(x, y) &= (F \circ F)(x, y) = F(F(x, y)) = F(x + y, x - y, x) = \\ &= (x + y + x - y, x + y - x + y, x + y) = (2x, 2y, x + y) \end{aligned}$$

6.6. EXERCÍCIOS PROPOSTOS

- 1) Seja $M_n(\mathfrak{R})$ o espaço vetorial das matrizes quadradas de ordem n e B uma matriz fixa deste espaço. Mostrar que a aplicação $F: M_n(\mathfrak{R}) \rightarrow M_n(\mathfrak{R})$, definida por: $F(X) = BX$, $\forall X \in M_n(\mathfrak{R})$ é um operador linear.

- 2) Sabendo que T é um operador linear do $\mathfrak{R}^2$ tal que $T(1, 2) = (3, -1)$ e $T(0, 1) = (1, 2)$, determinar a expressão de $T(x, y)$.

$$\text{R: } T(x, y) = (x + y, -5x + 2y)$$

- 3) Considere-se a transformação linear definida por:

$$T(x, y, z, t) = (x + y - z, 2x - y + 2z - t, 3x + z - t).$$

Determinar uma base e a dimensão para $\text{Im}(T)$ e $\text{Ker}(T)$.

$$\text{R: Base de } \text{Im}(T) : \{(1, 2, 3), (0, 1, 1)\}; \dim \text{Im}(T) = 2$$

$$\text{Base de } \text{Ker}(T) : \{(-1, 1, 0, -3), (1, 0, 1, 4)\}; \dim \text{Ker}(T) = 2$$

- 4) Determinar um operador do $\mathfrak{R}^3$ cujo núcleo é constituído pelos pontos da reta de equação

$$\begin{cases} y = 2x \\ z = 0 \end{cases}$$

e cuja imagem é constituída pelos pontos do plano de equação $x + 2y + z = 0$.

$$\text{R: } T(x, y, z) = (4x - 2y - z, -2x + y, z)$$

- 5) Sendo $T(x, y) = (3x - 2y, x + y, x - y)$ e $G(x, y, z) = (x - y + z, 2x - z)$ duas transformações lineares, determine a dimensão de $\text{Ker}(G \circ T)$ e de $\text{Im}(G \circ T)$.

$$\text{R: } \dim \text{Ker}(G \circ T) = 0 \text{ e } \dim \text{Im}(G \circ T) = 2$$

7

ISOMORFISMO

A pergunta inicial que se faz neste capítulo e que o motiva é: dada uma transformação linear $T : V \rightarrow W$, é possível definir uma transformação linear que seja inversa de T , ou seja, existe a transformação linear $T^{-1} : W \rightarrow V$? Serão dados, a seguir, definições e resultados que permitam responder a esta pergunta.

Primeiramente, recordar-se-ão três definições importantes sobre funções reais de uma variável real, para, em seguida, estendê-las às transformações lineares.

Definições: Dados dois subconjuntos não vazios de $\mathfrak{R}$, A e B , e uma função f de A em B , define-se:

- $y = f(x)$ é *injetora* se $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$, ou seja, $y_1 = y_2 \Rightarrow x_1 = x_2$. Isto significa que *cada y pertencente ao conjunto $Im(f)$ é imagem de um único x do domínio de f* . Equivalentemente, tem-se: $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$. Assim, elementos distintos do domínio de f têm imagens diferentes.
- $y = f(x)$ é *sobrejetora* se $\forall y \in CD(f), \exists x \in D(f) / y = f(x)$, isto é: $Im(f) = CD(f)$.

Isto significa que *todo elemento de B é imagem de pelo menos um x do domínio de f* . Aqui, $D(f)$ e $CD(f)$ denotam, respectivamente, o domínio e o contradomínio de f .

Quando a função é, ao mesmo tempo, injetora e sobrejetora, diz-se que ela é *bijetora*. Assim, tem-se: a função f de A em B é uma bijeção (ou bijetora) se todo elemento de B é imagem de um único elemento de A .

Apresentam-se, agora, as definições análogas para transformações lineares.

Definição: Dados dois espaços vetoriais não vazios V e W , diz-se que uma transformação linear $T : V \rightarrow W$ é injetora se $T(v_1) = T(v_2) \Rightarrow v_1 = v_2$, $\forall v_1, v_2 \in V$. Equivalentemente, tem-se: $v_1 \neq v_2 \Rightarrow T(v_1) \neq T(v_2)$.

Isto significa que *cada* w pertencente ao conjunto $Im(T)$ é imagem de um único v do domínio de T . Assim, elementos distintos do domínio de T têm imagens diferentes.

Definição: Dados dois espaços vetoriais não vazios V e W , diz-se que uma transformação linear $T: V \rightarrow W$ é sobrejetora se $\forall w \in CD(T)$, $\exists v \in D(T) / w = T(v)$, isto é: $Im(T) = CD(T) = W$.

Isto significa que *todo* elemento de W é imagem de pelo menos um v do domínio de T . Aqui, $D(T)$ e $CD(T)$ denotam, respectivamente, o domínio e o contradomínio de T .

Definição: Dados dois espaços vetoriais não vazios V e W , diz-se que uma transformação linear $T: V \rightarrow W$ é bijetora se é injetora e sobrejetora.

Exemplo: Considere-se a transformação linear $T: \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}^2$ definida por:

$$T(v) = T(x, y) = (x + y, x - y), \text{ para todo } v = (x, y) \in \mathfrak{R}^2.$$

Afirma-se: T é bijetora.

Para ver que essa afirmação é verdadeira, deve-se mostrar que T é injetora e sobrejetora. Tomando-se dois elementos $v_1 = (x_1, y_1)$ e $v_2 = (x_2, y_2)$ no domínio de T , tem-se:

$$T(v_1) = T(x_1, y_1) = (x_1 + y_1, x_1 - y_1) \text{ e } T(v_2) = T(x_2, y_2) = (x_2 + y_2, x_2 - y_2).$$

Então:

$$T(v_1) = T(v_2) \Rightarrow (x_1 + y_1, x_1 - y_1) = (x_2 + y_2, x_2 - y_2),$$

de onde se obtém o sistema linear:

$$\begin{cases} x_1 + y_1 = x_2 + y_2 \\ x_1 - y_1 = x_2 - y_2 \end{cases}.$$

Resolvendo-se esse sistema, conclui-se que $x_1 = x_2$ e $y_1 = y_2$, ou seja, conclui-se que $v_1 = v_2$ e, portanto, T é injetora.

Para mostrar que T é sobrejetora, deve-se mostrar que todo elemento de $CD(T) = \mathfrak{R}^2$ é imagem de pelo menos um elemento de $D(T) = \mathfrak{R}^2$, isto é, deve-se mostrar que $Im(T) = \mathfrak{R}^2$.

Um elemento $w = (x, y)$ pertencente ao conjunto $Im(T)$ é escrito na forma $w = (x + y, x - y)$. Então, vem:

$$w = x(1, 1) + y(1, -1),$$

ou seja, o conjunto $B = \{(1, 1), (1, -1)\}$ é uma base de $Im(T)$. Entretanto, B também é uma base do $\mathbb{R}^2$. Logo, $dim(Im(T)) = dim(\mathbb{R}^2)$. Como $Im(T) \subset \mathbb{R}^2$, conclui-se que $Im(T) = \mathbb{R}^2$, ou seja, T é sobrejetora.

Sendo injetora e sobrejetora, segue-se que T é bijetora.

Serão enunciados, a seguir, teoremas que auxiliarão a verificar se uma transformação linear é ou não injetora.

Teorema 1: Seja $T : V \rightarrow W$ uma transformação linear. Então T é injetora se, e somente se, $Ker(T) = \{\mathbf{0}\}$.

Demonstração:

(i) **Condição necessária**

Hipótese: $T : V \rightarrow W$ é uma transformação linear injetora

Tese: $Ker(T) = \{\mathbf{0}\}$.

Seja $v \in Ker(T)$; então, $T(v) = \mathbf{0}$. Mas, sendo T uma transformação linear, sabe-se que $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ e, portanto, segue-se que $T(v) = T(\mathbf{0})$. Mas, por hipótese, T é injetora e, portanto, conclui-se que $v = \mathbf{0}$, ou seja, $Ker(T) = \{\mathbf{0}\}$.

(ii) **Condição suficiente**

Hipótese: $Ker(T) = \{\mathbf{0}\}$

Tese: T é injetora.

Sejam $u, v \in V$ tais que $T(u) = T(v)$. Então:

$$T(u) - T(v) = \mathbf{0},$$

de onde vem que

$$T(u - v) = \mathbf{0},$$

isto é, $u - v \in Ker(T)$. Como, por hipótese, $Ker(T) = \{\mathbf{0}\}$, conclui-se que $u - v = \mathbf{0}$, ou seja, $u = v$. Portanto, T é injetora.

Exemplo: Considere-se novamente a transformação linear $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, definida por:

$$T(v) = T(x, y) = (x + y, x - y), \text{ para todo } v = (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

a qual é injetora. Tomando um elemento $u = (x, y) \in \text{Ker}(T)$, tem-se:

$T(u) = \mathbf{0}$, ou seja, $T(x, y) = \mathbf{0}$, ressaltando que, neste caso, o elemento $\mathbf{0}$ que figura no segundo membro da igualdade é o vetor $\mathbf{0} = (0, 0)$. Assim, vem:

$$T(x, y) = \mathbf{0} \Rightarrow (x + y, x - y) = (0, 0),$$

ou seja,

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - y = 0 \end{cases},$$

de onde se segue que $x = y = 0$, ou seja, $u = \mathbf{0}$. Conclui-se, assim, que o único elemento que pertence a $\text{Ker}(T)$ é o vetor nulo, isto é, $\text{Ker}(T) = \{\mathbf{0}\}$, ou, equivalentemente, $\text{Ker}(T) = \{(0, 0)\}$.

Teorema 2: Seja $T: V \rightarrow W$ uma transformação linear injetora. Se $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ são vetores LI de V , então $\{T(v_1), T(v_2), \dots, T(v_n)\}$ são vetores LI de W .

Demonstração:

Hipóteses: $T: V \rightarrow W$ é uma transformação linear injetora; $\{v_1, v_2, \dots, v_n\} \subset V$ são LI

Tese: $\{T(v_1), T(v_2), \dots, T(v_n)\} \subset W$ são LI

Considerem-se os escalares $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in K$ tais que:

$$\alpha_1 T(v_1) + \alpha_2 T(v_2) + \dots + \alpha_n T(v_n) = \mathbf{0};$$

sendo T uma transformação linear, pode-se escrever:

$$T(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n) = \mathbf{0}.$$

Como T é injetora, segue-se que:

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n = \mathbf{0}.$$

Sendo $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ LI, segue-se que $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$ e, portanto, $\{T(v_1), T(v_2), \dots, T(v_n)\}$ são LI.

Exemplo: Considere-se, uma vez mais, a transformação linear $T: \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}^2$, definida por:

$$T(v) = T(x, y) = (x + y, x - y), \text{ para todo } v = (x, y) \in \mathfrak{R}^2,$$

e os vetores $v_1 = (1, 2)$ e $v_2 = (0, -1)$, os quais são LI. Tem-se:

$$T(v_1) = T(1, 2) = (1 + 2, 1 - 2) = (3, -1)$$

e

$$T(v_2) = T(0, -1) = (0 - 1, 0 + 1) = (-1, 1)$$

Verificar-se-á que os vetores obtidos $T(v_1) = (3, -1)$ e $T(v_2) = (-1, 1)$ são LI. Para isso, escreve-se a equação abaixo, onde a e b são escalares:

$$aT(v_1) + bT(v_2) = \mathbf{0},$$

ou seja,

$$a(3, -1) + b(1, 1) = (0, 0),$$

ou, ainda,

$$(3a + b, -a + b) = (0, 0),$$

de onde se obtém o sistema linear

$$\begin{cases} 3a + b = 0 \\ -a + b = 0 \end{cases},$$

cujas soluções são $a = b = 0$. Assim, conclui-se que $T(v_1)$ e $T(v_2)$ são LI.

Teorema 3: Sejam V e W espaços vetoriais sobre um corpo K , sendo V de dimensão finita, e $T: V \rightarrow W$ uma transformação linear. Então:

$$\dim(V) = \dim(\text{Im}(T)) + \dim(\text{Ker}(T)).$$

Demonstração:

Hipóteses: V e W são espaços vetoriais sobre K ; V tem dimensão finita; $T: V \rightarrow W$ é transformação linear

Tese: $\dim(V) = \dim(\text{Im}(T)) + \dim(\text{Ker}(T))$

Supondo-se que $\dim(\text{Ker}(T)) \neq 0$, considere-se $\{u_1, u_2, \dots, u_n\} \subset V$ uma base de $\text{Ker}(T)$. Pode-se completar esse conjunto, de modo a obter uma base

de V . Sejam $\{v_1, v_2, \dots, v_m\} \subset V$ tais que $\{u_1, u_2, \dots, u_n, v_1, v_2, \dots, v_m\}$ é uma base de V . Então, $\dim(V) = n + m$. Mostrar-se-á que $\{T(v_1), T(v_2), \dots, T(v_m)\}$ é uma base de $\text{Im}(T)$.

a) O conjunto $\{T(v_1), T(v_2), \dots, T(v_m)\}$ gera $\text{Im}(T)$, isto é:

$$\text{Im}(T) = [T(v_1), T(v_2), \dots, T(v_m)].$$

De fato, tomando-se $w \in \text{Im}(T)$, existe $v \in V$ tal que $T(v) = w$.

Sendo um elemento de V , v é uma combinação linear dos vetores da base de V . Logo, existem escalares β_i ($1 \leq i \leq n$) e α_j ($1 \leq j \leq m$) tais que:

$$v = \beta_1 u_1 + \beta_2 u_2 + \dots + \beta_n u_n + \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_m v_m.$$

Então:

$$w = T(v) = T(\beta_1 u_1 + \beta_2 u_2 + \dots + \beta_n u_n + \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_m v_m),$$

isto é,

$$w = T(v) = \beta_1 T(u_1) + \beta_2 T(u_2) + \dots + \beta_n T(u_n) + \alpha_1 T(v_1) + \alpha_2 T(v_2) + \dots + \alpha_m T(v_m).$$

Como os vetores u_i ($1 \leq i \leq n$) pertencem a $\text{Ker}(T)$, tem-se que $T(u_i) = \mathbf{0}$ ($1 \leq i \leq n$), e, portanto, $w = \alpha_1 T(v_1) + \alpha_2 T(v_2) + \dots + \alpha_m T(v_m)$.

Conclui-se, assim, que $\{T(v_1), T(v_2), \dots, T(v_m)\}$ gera $\text{Im}(T)$.

b) Deve-se mostrar, agora, que os vetores $T(v_1), T(v_2), \dots, T(v_m)$ são LI.

Para isso tomam-se escalares $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ tais que:

$$\alpha_1 T(v_1) + \alpha_2 T(v_2) + \dots + \alpha_m T(v_m) = \mathbf{0}.$$

Dessa equação, pode-se escrever:

$$T(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_m v_m) = \mathbf{0},$$

de onde se segue que $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_m v_m \in \text{Ker}(T)$ e, portanto, é uma combinação linear dos elementos da base deste espaço, ou seja, existem escalares β_i ($1 \leq i \leq n$) tais que:

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_m v_m = \beta_1 u_1 + \beta_2 u_2 + \dots + \beta_n u_n,$$

ou seja,

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_m v_m - \beta_1 u_1 - \beta_2 u_2 - \cdots - \beta_n u_n = \mathbf{0}.$$

Como $\{u_1, u_2, \dots, u_n, v_1, v_2, \dots, v_m\}$ é uma base de V , segue-se que $\beta_i = 0$ ($1 \leq i \leq n$) e $\alpha_j = 0$ ($1 \leq j \leq m$). Portanto, $\{T(v_1), T(v_2), \dots, T(v_m)\}$ é LI.

De (a) e (b), segue-se que $\dim(\text{Im}(T)) = m$ e vem:

$$\dim(\text{Im}(T)) + \dim(\text{Ker}(T)) = m + n = \dim(V),$$

o que prova o teorema.

Corolário: Nas hipóteses do teorema anterior, se $\dim(V) = \dim(W)$, as seguintes afirmações são equivalentes:

- (i) T é sobrejetora
- (ii) T é bijetora
- (iii) T é injetora
- (iv) T leva uma base de V em uma base de W

Demonstração:

(i) $\Rightarrow$ (ii)

Hipóteses: $\dim(V) = \dim(W)$ e T é sobrejetora

Tese: T é bijetora

De fato, por hipótese, $\text{Im}(T) = W$ e, portanto, $\dim(\text{Im}(T)) = \dim(W) = \dim(V)$. Pelo teorema anterior, tem-se que $\dim(V) = \dim(\text{Im}(T)) + \dim(\text{Ker}(T))$, de onde se conclui que $\dim(\text{Ker}(T)) = 0$, ou seja, $\text{Ker}(T) = \{\mathbf{0}\}$. Pelo Teorema 1, segue-se que T é injetora e, portanto, T é bijetora.

(ii) $\Rightarrow$ (iii)

Hipóteses: $\dim(V) = \dim(W)$ e T é bijetora

Tese: T é injetora

Se T é bijetora, então T é injetora.

(iii) $\Rightarrow$ (iv)

Hipóteses: $\dim(V) = \dim(W)$ e T é injetora

Tese: T leva uma base de V em uma base de W

Seja $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ uma base de V . Mostrar-se-á que $T_B = \{T(v_1), T(v_2), \dots, T(v_n)\}$ é uma base de W .

Uma vez que T é injetora, T_B tem tantos vetores quanto B . Dessa forma, resta mostrar que T_B é LI. Considerem-se, então escalares α_i ($1 \leq i \leq n$) tais que:

$$\alpha_1 T(v_1) + \alpha_2 T(v_2) + \dots + \alpha_n T(v_n) = \mathbf{0}.$$

Sendo T uma transformação linear, pode-se escrever:

$$T(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n) = \mathbf{0};$$

sendo T injetora, tem-se que $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n = \mathbf{0}$ e, como $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ é base de V , segue-se que $\alpha_i = 0$ ($1 \leq i \leq n$). Portanto, $T_B = \{T(v_1), T(v_2), \dots, T(v_n)\}$ é base de W .

(iv) $\Rightarrow$ (i)

Hipóteses: $\dim(V) = \dim(W)$ e T leva uma base de V em uma base de W

Tese: T é sobrejetora

De fato, seja $w \in W$. Tomando uma base $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ de V , segue-se, por hipótese, que $T_B = \{T(v_1), T(v_2), \dots, T(v_n)\}$ é uma base de W . Logo, w é uma combinação linear dos elementos desta base, isto é, existem escalares α_i ($1 \leq i \leq n$) tais que:

$$w = \alpha_1 T(v_1) + \alpha_2 T(v_2) + \dots + \alpha_n T(v_n),$$

ou seja,

$$w = T(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n).$$

Isso mostra que $w \in \text{Im}(T)$ e, portanto, T é sobrejetora.

Teorema 4: Se V e W são espaços vetoriais de dimensão finita e $T: V \rightarrow W$ é uma transformação linear, então:

- Se $\dim(V) > \dim(W)$, então T não é injetora.
- Se $\dim(V) < \dim(W)$, então T não é sobrejetora.

Demonstração:

a) **Hipótese:** $\dim(V) > \dim(W)$

Tese: T não é injetora

Demonstrar-se-á a seguinte afirmação equivalente à (a): “Se T é injetora, então $\dim(V) \leq \dim(W)$ ”. De fato, têm-se as seguintes equivalências:

$$T \text{ é injetora} \Leftrightarrow \text{Ker}(T) = \{\mathbf{0}\} \Leftrightarrow \dim(\text{Ker}(T)) = 0.$$

Por outro lado, pelo Teorema 3, tem-se:

$$\dim(V) = \dim(\text{Im}(T)) + \dim(\text{Ker}(T)).$$

Assim, segue-se que $\dim(V) = \dim(\text{Im}(T))$.

Como $\dim(\text{Im}(T)) \leq \dim(W)$, segue-se que $\dim(V) \leq \dim(W)$,

o que demonstra a afirmação.

b) **Hipótese:** $\dim(V) < \dim(W)$

Tese: T não é sobrejetora

De modo análogo, demonstrar-se-á a seguinte afirmação equivalente: “Se T é sobrejetora, então $\dim(V) \geq \dim(W)$ ”. De fato, sendo T sobrejetora, tem-se que $\text{Im}(T) = W$ e, portanto, $\dim(\text{Im}(T)) = \dim(W)$.

Do Teorema 3, tem-se:

$$\dim(V) = \dim(\text{Im}(T)) + \dim(\text{Ker}(T))$$

ou seja,

$$\dim(V) = \dim(W) + \dim(\text{Ker}(T)) \geq \dim(W),$$

O que demonstra a afirmação.

As afirmações (a) e (b) do Teorema 4 asseguram o seguinte resultado:

Teorema 5: Se uma transformação linear $T: V \rightarrow W$ é bijetora, então $\dim(V) = \dim(W)$.

Exemplos:

1) Considere-se novamente a transformação linear $T: \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}^2$ definida por:

$T(v) = T(x, y) = (x + y, x - y)$, para todo $v = (x, y) \in \mathfrak{R}^2$. Mostrar-se-á que T é bijetora, utilizando-se os resultados dos teoremas anteriores.

Sendo $V = W = \mathfrak{R}^2$, tem-se que $\dim(V) = \dim(W)$. Seja $v = (x, y) \in \mathfrak{R}^2$; para que esse elemento pertença ao núcleo de T , deve-se ter $T(v) = \mathbf{0}$, isto é:

$$T(v) = T(x, y) = (x + y, x - y) = (0, 0),$$

ou seja,

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - y = 0 \end{cases},$$

de onde se obtém que $x = y = 0$. Portanto, $\text{Ker}(T) = \{\mathbf{0}\}$; assim, pelo Teorema 1, segue-se que T é injetora. Pelo Corolário do Teorema 3, conclui-se que T é bijetora.

- 2) Seja $T : P_2(\mathfrak{R}) \rightarrow M_2(\mathfrak{R})$ uma transformação linear definida por:

$$T(a_0 + a_1t + a_2t^2) = \begin{pmatrix} a_0 - a_1 & 0 \\ 0 & a_1 - a_2 \end{pmatrix}.$$

Pergunta-se:

- T é sobrejetora?
- T é injetora?
- Quais são as dimensões dos espaços $\text{Ker}(T)$ e $\text{Im}(T)$?
- Uma vez que $\dim(P_2(\mathfrak{R})) < \dim(M_2(\mathfrak{R}))$, conclui-se, pelo Teorema 4, que T não é sobrejetora.
- Seja $p(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2$ um elemento de $\text{Ker}(T)$. Então, $T(p(t)) = \mathbf{0}$, isto é:

$$T(a_0 + a_1t + a_2t^2) = \begin{pmatrix} a_0 - a_1 & 0 \\ 0 & a_1 - a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

de onde vem que:

$$\begin{cases} a_0 - a_1 = 0 \\ a_1 - a_2 = 0 \end{cases},$$

resultando em $a_0 = a_1 = a_2$. Logo, todo elemento $p(t) \in \text{Ker}(T)$ é da forma:

$$p(t) = a_0 + a_0 t + a_0 t^2 = a_0 (1 + t + t^2).$$

Portanto, $\{1 + t + t^2\}$ é base de $\text{Ker}(T)$, isto é, $\dim(\text{Ker}(T)) = 1$. Logo, pelo Teorema 1, conclui-se que T não é injetora.

- c) Conforme se viu em (b), $\dim(\text{Ker}(T)) = 1$. Para determinar $\dim(\text{Im}(T))$, utiliza-se a igualdade:

$$\dim(P_2(\mathfrak{R})) = \dim(\text{Ker}(T)) + \dim(\text{Im}(T));$$

como $\dim(P_2(\mathfrak{R})) = 3$ e $\dim(\text{Ker}(T)) = 1$, segue-se que $\dim(\text{Im}(T)) = 2$.

Definição: Dados dois espaços vetoriais não vazios V e W , diz-se que a transformação linear $T : V \rightarrow W$ é um isomorfismo se é bijetora.

Observação: quando $V = W$, ou seja, $T : V \rightarrow V$ é um operador linear bijetor, então T é chamado de um automorfismo.

Definição: Seja $T : V \rightarrow W$ um isomorfismo. Então, a aplicação inversa $T^{-1} : W \rightarrow V$ é também um isomorfismo tal que $T \circ T^{-1} = T^{-1} \circ T = \text{Id}$.

Observação: quando a transformação linear T admite a aplicação inversa T^{-1} , diz-se que T é inversível, ou invertível, ou regular, ou não singular.

Exemplos:

- 1) Considere-se o operador linear

$$\begin{aligned} T : \mathfrak{R}^2 &\rightarrow \mathfrak{R}^2 \\ (x, y) &\mapsto (x - 2y, 3x + y) \end{aligned}$$

Mostrar que T é inversível e determinar T^{-1} .

Para mostrar que T é inversível, mostrar-se-á que é bijetor.

O núcleo de T é constituído dos elementos (x, y) tais que $T(x, y) = (0, 0)$, ou seja:

$$T(x, y) = (0, 0) \Rightarrow (x - 2y, 3x + y) = (0, 0),$$

isto é,

$$\begin{cases} x - 2y = 0 \\ 3x + y = 0 \end{cases}$$

Esse sistema apresenta apenas a solução trivial $(0,0)$. Conclui-se, assim, que $\text{Ker}(T) = \{(0,0)\}$ e, portanto, T é injetor.

Por outro lado, tem-se:

$$\dim(\text{Im}(T)) = \dim(\mathfrak{R}^2) - \dim(\text{Ker}(T)) = 2 - 0 = 2.$$

De acordo com o Corolário do Teorema 3, segue-se que T é bijetor e, portanto, admite inversa.

Determinar-se-á, agora, T^{-1} . Para isso, seja $T^{-1}(x, y) = (a, b)$. Então:

$$(x, y) = T(a, b) = (a - 2b, 3a + b),$$

de onde se segue que:

$$\begin{cases} a - 2b = x \\ 3a + b = y \end{cases},$$

ou seja,

$$\begin{cases} a - 2b = x \\ 7b = -3x + y \end{cases},$$

isto é,

$$\begin{cases} b = -\frac{3}{7}x + \frac{1}{7}y \\ a = \frac{1}{7}x + \frac{2}{7}y \end{cases}.$$

Portanto:

$$T^{-1}(x, y) = \left(\frac{1}{7}x + \frac{2}{7}y, -\frac{3}{7}x + \frac{1}{7}y \right).$$

- 2) Seja $T: P_2(\mathfrak{R}) \rightarrow \mathfrak{R}^3$ a transformação linear definida por:

$$T(a_0 + a_1t + a_2t^2) = (a_0 + a_1, a_1 - a_2, a_0 + a_1 + a_2).$$

Verificar se T é um isomorfismo. Em caso afirmativo, determinar o isomorfismo inverso.

Determinar-se-á o núcleo de T , para verificar se T é injetora. Considere-se, assim, um elemento $a_0 + a_1t + a_2t^2$ de $\text{Ker}(T)$. Então,

$$T(a_0 + a_1t + a_2t^2) = \mathbf{0},$$

ou seja,

$$(a_0 + a_1, a_1 - a_2, a_0 + a_1 + a_2) = (0, 0, 0).$$

Obtém-se, assim, o sistema linear:

$$\begin{cases} a_0 + a_1 = 0 \\ a_1 - a_2 = 0 \\ a_0 + a_1 + a_2 = 0 \end{cases},$$

do qual se conclui que $a_0 = a_1 = a_2 = 0$. Logo $\text{Ker}(T) = \{\mathbf{0}\}$. Pelo Teorema 1, segue-se que T é injetora.

Uma vez que $\dim(P_2(\mathfrak{R})) = \dim(\mathfrak{R}^3) = 3$, segue-se, do Corolário do Teorema 3, que T é sobrejetora e, assim, T é um isomorfismo.

Quer-se determinar, agora, o isomorfismo inverso $T^{-1}: \mathfrak{R}^3 \rightarrow P_2(\mathfrak{R})$.

Como o contradomínio de T^{-1} é o espaço vetorial $P_2(\mathfrak{R})$, tem-se:

$$T^{-1}(x, y, z) = a_0 + a_1t + a_2t^2. \quad (1)$$

Então:

$$T(T^{-1}(x, y, z)) = T(a_0 + a_1t + a_2t^2),$$

ou seja,

$$T \circ T^{-1}(x, y, z) = T(a_0 + a_1t + a_2t^2)$$

Sendo T e T^{-1} isomorfismos inversos, tem-se que $T \circ T^{-1} = Id$ e, portanto,

$$(x, y, z) = T(a_0 + a_1t + a_2t^2).$$

Pela definição de T , vem:

$$(x, y, z) = (a_0 + a_1, a_1 - a_2, a_0 + a_1 + a_2),$$

de onde se segue que

$$\begin{cases} x = a_0 + a_1 \\ y = a_1 - a_2 \\ z = a_0 + a_1 + a_2 \end{cases}.$$

Resolvendo-se esse sistema para obter os coeficientes a_0 , a_1 e a_2 , vem:

$$\begin{cases} a_0 = 2x - y - z \\ a_1 = -x + y + z \\ a_2 = -x + z \end{cases}$$

Substituindo-se esses coeficientes na expressão de T^{-1} dada por (1), obtém-se, finalmente o isomorfismo inverso procurado:

$$T^{-1}(x, y, z) = (2x - y - z) + (-x + y + z)t + (-x + z)t^2.$$

Observação: nos exemplos anteriores, determinou-se o núcleo de T , isto é, $\text{Ker}(T)$, para verificar se a transformação linear era ou não injetora. Um erro muito comum que se observa é considerar $\text{Ker}(T)$ contido no espaço de chegada da transformação. Ressalta-se que $\text{Ker}(T)$ é um subespaço do domínio da transformação. No exemplo anterior, tem-se $\text{Ker}(T) \subset P_2(\mathfrak{R})$. Assim, os elementos de $\text{Ker}(T)$ são polinômios de grau menor ou igual a 2, os quais são levados, por T , no vetor nulo $\mathbf{0} \in \mathfrak{R}^3$.

- 3) Considere-se o operador linear $T : \mathfrak{R}^3 \rightarrow \mathfrak{R}^3$, com as seguintes características: $T(-2, 1, 0) = (1, 0, 0)$, $T(1, 0, 1) = (0, 0, -1)$ e $T(1, -1, -) = (0, -1, 1)$. Determinar o operador inverso T^{-1} , sabendo-se que ele existe.

Pela definição de operador inverso, tem-se:

$$\begin{cases} T^{-1}(1, 0, 0) = (-2, 1, 0) \\ T^{-1}(0, 0, -1) = (1, 0, 1) \\ T^{-1}(0, -1, 1) = (1, -1, 1) \end{cases} \quad (1)$$

Observe-se que $\{(1, 0, 0), (0, 0, -1), (0, -1, 1)\}$ é uma base de $\mathfrak{R}^3$ e que se conhece a imagem de cada um desses vetores pela aplicação T^{-1} . O que se quer é calcular $T^{-1}(x, y, z)$.

Com esse objetivo, expressa-se (x, y, z) como combinação linear dessa base, isto é:

$$(x, y, z) = a(1, 0, 0) + b(0, 0, -1) + c(0, -1, 1),$$

ou seja:

$$(x, y, z) = (a, -c, -b + c),$$

de onde se segue:

$$\begin{cases} x = a \\ y = -c \\ z = -b + c \end{cases},$$

e, portanto,

$$\begin{cases} a = x \\ c = -y \\ b = -z - y \end{cases}.$$

Então, tem-se:

$$(x, y, z) = x(1, 0, 0) + (-y - z)(0, 0, -1) + (-y)(0, -1, 1).$$

Portanto, tem-se:

$$T^{-1}(x, y, z) = T^{-1}[x(1, 0, 0) + (-y - z)(0, 0, -1) + (-y)(0, -1, 1)].$$

Uma vez que T^{-1} é uma transformação linear, vem:

$$T^{-1}(x, y, z) = T^{-1}[x(1, 0, 0)] + T^{-1}[(-y - z)(0, 0, -1)] + T^{-1}[(-y)(0, -1, 1)],$$

ou, ainda,

$$T^{-1}(x, y, z) = xT^{-1}(1, 0, 0) + (-y - z)T^{-1}(0, 0, -1) + (-y)T^{-1}(0, -1, 1).$$

De (1), vem:

$$T^{-1}(x, y, z) = x(-2, 1, 0) + (-y - z)(1, 0, 1) + (-y)(1, -1, 1),$$

de onde se conclui que

$$T^{-1}(x, y, z) = (-2x - 2y - z, x + y, -2y - z),$$

que é a expressão de T^{-1} que se procurava.

- 4) Seja $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por: $T(x, y) = (2x - y, x + 3y)$. Verificar se T é um automorfismo.

Observe-se, inicialmente, que o enunciado não afirma que T é uma transformação linear. Assim, é necessário, antes de utilizar os resultados enunciados anteriormente, que se faça essa verificação, que será deixada a cargo do leitor.

Uma vez que se tenha mostrado que T é uma transformação linear, verificar-se-á se T é bijetora.

Para verificar se T é injetora, determina-se seu núcleo; seja $(x, y) \in \text{Ker}(T)$.

Então:

$$T(x, y) = (0, 0),$$

ou seja,

$$(2x - y, x + 3y) = (0, 0),$$

de onde vem que:

$$\begin{cases} 2x - y = 0 \\ x + 3y = 0 \end{cases}$$

A resolução desse sistema linear leva à solução $x = y = 0$ e, portanto, conclui-se que $\text{Ker}(T) = \{\mathbf{0}\}$, o que acarreta que T é injetora. Como os espaços de saída e de chegada de T são iguais, eles têm a mesma dimensão; conclui-se, assim, que T é sobrejetora e, portanto, bijetora. Assim, T é um automorfismo.

Definição: Dois espaços vetoriais V e W são isomorfos se existir um isomorfismo entre eles.

Exemplos:

- 1) O espaço vetorial $\mathfrak{R}^2 = \{(x, y) / x, y \in \mathfrak{R}\}$ é isomorfo ao espaço vetorial dos números complexos $\mathcal{C} = \{x + yi / x, y \in \mathfrak{R}\}$, pois, por exemplo, a transformação linear

$$T: \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathcal{C}$$

$$(x, y) \mapsto x + yi$$

é um isomorfismo, ou seja, esses espaços são isomorfos. A aplicação T transforma $\mathfrak{R}^2$ no plano complexo $\mathcal{C}$.

- 2) O espaço vetorial $\mathfrak{R}^2$ é isomorfo ao subespaço $W = \{(x, y, z) \in \mathfrak{R}^3 / z = 0\}$ do $\mathfrak{R}^3$. Observe-se que W é o plano $Oxy \subset \mathfrak{R}^3$, chamado plano horizontal. De fato, a aplicação linear

$$T: \mathfrak{R}^2 \rightarrow W$$

$$(x, y) \mapsto (x, y, 0)$$

é bijetora, pois, a cada vetor $(x, y) \in \mathfrak{R}^2$ corresponde um único vetor $(x, y, 0) \in W$ e, reciprocamente. Assim, T é um isomorfismo e, portanto, $\mathfrak{R}^2$ e W são isomorfos. Denota-se: $\mathfrak{R}^2 \cong W$.

Teorema 6: Dois espaços vetoriais V e W sobre um mesmo corpo K são isomorfos se, e somente se, eles têm a mesma dimensão.

Demonstração:

(i) **Condição necessária**

Hipótese: V e W são espaços vetoriais sobre K isomorfos

Tese: V e W têm a mesma dimensão

Sendo V e W isomorfos, existe um isomorfismo $T: V \rightarrow W$ entre eles. Se T é bijetora, então, pelo Teorema 5, segue-se que $\dim(V) = \dim(W)$.

(ii) **Condição suficiente**

Hipótese: $\dim(V) = \dim(W)$

Tese: V e W são isomorfos

É imediato, pois, se $\dim(V) = \dim(W)$, então existe um isomorfismo entre V e W e, portanto, esses espaços são isomorfos.

Exemplo:

Sejam W e U subespaços dos espaços vetoriais reais $\mathfrak{R}^3$ e $P_2(\mathfrak{R})$, respectivamente, definidos por:

$$W = \{(x, y, z) \in \mathfrak{R}^3 / x - 2y + z = 0\} \text{ e } U = \{a_0 + a_1t + a_2t^2 \in P_2(\mathfrak{R}) / a_0 + a_1 - a_2 = 0\}.$$

a) Mostrar W e U são isomorfos.

b) Determinar um isomorfismo entre W e U .

a) Pelo Teorema 6, para mostrar que W e U são isomorfos, basta mostrar que eles têm a mesma dimensão. Pode-se escrever:

$$W = \{(2y - z, y, z) \in \mathfrak{R}^3, \forall y, z \in \mathfrak{R}\}.$$

Como $(2y - z, y, z) = y(2, 1, 0) + z(-1, 0, 1)$, então o conjunto $B = \{(2, 1, 0), (-1, 0, 1)\}$ forma um sistema de geradores LI de W , ou seja, B é uma base de W . Logo, $\dim(W) = 2$.

Por outro lado, o subespaço U pode ser escrito na forma:

$$U = \{(-a_1 + a_2) + a_1 t + a_2 t^2, \forall a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}.$$

Tem-se:

$$(-a_1 + a_2) + a_1 t + a_2 t^2 = a_1(-1 + t) + a_2(1 + t^2);$$

então o conjunto $C = \{-1 + t, 1 + t^2\}$ forma um sistema de geradores LI de U , ou seja, C é uma base de U . Logo, $\dim(U) = 2$.

Como $\dim(W) = \dim(U) = 2$, conclui-se, pelo Teorema 6, que U e W são isomorfos.

- b) Para se determinar um isomorfismo entre W e U , deve-se determinar uma transformação linear bijetora $T: W \rightarrow U$.

Observe-se que todo vetor de $(x, y, z) \in W$ é gerado pelos vetores da base B , ou seja:

$$(x, y, z) = y(2, 1, 0) + z(-1, 0, 1).$$

Fazendo-se:

$$T(2, 1, 0) = -1 + t \text{ e } T(-1, 0, 1) = 1 + t^2,$$

tem-se:

$$T(x, y, z) = T(y(2, 1, 0) + z(-1, 0, 1)),$$

isto é,

$$T(x, y, z) = yT(2, 1, 0) + zT(-1, 0, 1),$$

ou seja,

$$T(x, y, z) = y(-1 + t) + z(1 + t^2).$$

Obtém-se, assim, a aplicação $T(x, y, z) = (-y + z) + yt + zt^2$, a qual é uma transformação linear, pois:

- para quaisquer vetores $w_1 = (x_1, y_1, z_1)$ e $w_2 = (x_2, y_2, z_2)$ pertencentes a W , tem-se:

$$\begin{aligned} T(w_1 + w_2) &= T(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) = \\ &= (-y_1 - y_2 + z_1 + z_2) + (y_1 + y_2)t + (z_1 + z_2)t^2 = \\ &= (-y_1 + z_1) + y_1t + z_1t^2 + (-y_2 + z_2) + y_2t + z_2t^2 = T(w_1) + T(w_2) \end{aligned}$$

- para qualquer vetor $w = (x, y, z)$ de W e para qualquer número real α , tem-se:

$$\begin{aligned} T(\alpha w) &= T(\alpha x, \alpha y, \alpha z) = (-\alpha y + \alpha z) + \alpha yt + \alpha zt^2 = \\ &= \alpha(-y + z) + \alpha yt + \alpha zt^2 = \alpha T(w) \end{aligned}$$

Determina-se, agora, o $\text{Ker}(T)$. Seja um vetor $(x, y, z) \in \text{Ker}(T)$. Então:

$$T(x, y, z) = 0 + 0t + 0t^2,$$

isto é,

$$(-y + z) + yt + zt^2 = 0 + 0t + 0t^2,$$

de onde se segue que:

$$\begin{cases} -y + z = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}.$$

Como todo vetor de W deve satisfazer a condição $x = 2y - z$, conclui-se que $x = 0$. Portanto, tem-se que $\text{Ker}(T) = \{(0, 0, 0)\}$. Pelo Teorema 1, conclui-se que T é injetora e, portanto, tem-se que $\dim(W) = \dim(U)$, o que acarreta que T é bijetora, pelo Corolário do Teorema 3. Portanto, T é um isomorfismo.

7.1. EXERCÍCIOS PROPOSTOS

- 1) Seja $T \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a+b, b+c, c+d, a+b+c)$ uma transformação linear.

Mostrar que T é um isomorfismo e determinar o isomorfismo inverso.

$$\text{R.: } T^{-1}(x, y, z, t) = \begin{pmatrix} -y+t & x+y-t \\ -x+t & x+z-t \end{pmatrix}$$

- 2) Seja $T(x, y, z) = (x+z, x-z, y)$ um operador linear. Mostrar que T é um automorfismo e determinar o automorfismo inverso.

$$\text{R.: } T^{-1}(x, y, z) = \left(\frac{x+y}{2}, z, \frac{x-y}{2} \right)$$

- 3) Dada a transformação linear $T(x, y, z) = (x, x-y, y-z, z)$, determinar $\dim(\text{Im}(T))$ e $\dim(\text{Ker}(T))$. T é um isomorfismo? Por quê?

$$\text{R.: } \dim(\text{Ker}(T)) = 0; \dim(\text{Im}(T)) = 3; T \text{ não é um isomorfismo}$$

- 4) Se $T^{-1}(x, y, z) = (2x+y-z) + (x-y)t + (y-z)t^2$ é o isomorfismo inverso de T , determinar T e seus espaços de saída e de chegada.

$$\text{R.: } T(a_0 + a_1t + a_2t^2) = \left(\frac{a_0 - a_2}{2}, \frac{a_0 - 2a_1 - a_2}{2}, \frac{a_0 - 2a_1 - 3a_2}{2} \right); T: P_2(\mathfrak{R}) \rightarrow \mathfrak{R}^3$$

- 5) Sabendo que T é um automorfismo do $\mathfrak{R}^2$ e que $T(0,1) = (1,-1)$ e

$$T^{-1}(1,0) = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right), \text{ determinar as expressões de } T \text{ e de } T^{-1}.$$

$$\text{R.: } T(x, y) = (x+y, 2x-y); T^{-1}(x, y) = \left(\frac{x+y}{3}, \frac{2x-y}{3} \right)$$

8

MATRIZ DE UMA TRANSFORMAÇÃO LINEAR

Dada uma transformação linear $T: U \rightarrow V$, mostrar-se-á que é conveniente, muitas vezes, trabalhar com uma matriz que a represente, ao invés de trabalhar com a expressão da transformação linear. Este é o objetivo deste capítulo.

Considerem-se dois espaços vetoriais U e V sobre um corpo K , de dimensões n e m , respectivamente, a transformação linear $T: U \rightarrow V$ e as bases $B = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ de U e $C = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ de V . Os vetores $T(u_1), T(u_2), \dots, T(u_n)$ são elementos de V e, portanto, se escrevem como combinação linear da base C . Logo, existem números reais a_{ij} ($1 \leq i \leq m; 1 \leq j \leq n$) tais que:

$$(S): \begin{cases} T(u_1) = a_{11}v_1 + a_{21}v_2 + \dots + a_{m1}v_m \\ T(u_2) = a_{12}v_1 + a_{22}v_2 + \dots + a_{m2}v_m \\ \vdots \\ T(u_n) = a_{1n}v_1 + a_{2n}v_2 + \dots + a_{mn}v_m \end{cases}$$

Definição: A matriz P , de dimensão $m \times n$, dada por:

$$P = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

é chamada matriz da transformação linear T em relação às bases B e C .

Notação: $P = [T]_C^B$.

Observações:

- 1) As colunas da matriz P são constituídas pelas coordenadas dos vetores $T(u_1), T(u_2), \dots, T(u_n)$ em relação à base C , ou seja:

$$[T(u_1)] = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, [T(u_2)] = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \dots, [T(u_n)] = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Isso indica que P é a matriz transposta da matriz dos coeficientes do sistema linear S .

2) Cuidado com a notação! O leitor deve ficar atento às notações utilizadas neste capítulo e a notação de matriz mudança de base introduzida no Capítulo 5:

- $[T]_C^B$ é a matriz da transformação linear T em relação às bases B e C . De acordo com a definição, aplica-se a transformação T nos vetores da base B e, posteriormente, escreve-se esses vetores como combinação linear da base C
- $[M]_C^B$ é a matriz de mudança da base B para a base C ; nesse caso, são os vetores da base C que são escritos como combinação linear da base B .

Exemplo: Seja $T: \mathfrak{R}^3 \rightarrow \mathfrak{R}^2$ a transformação linear, definida por:

$$T(x, y, z) = (x - y, x + 2z).$$

Considerando-se a base canônica do $\mathfrak{R}^3$ e a base $C = \{(1, 1), (1, -1)\}$ do $\mathfrak{R}^2$, determinar a matriz da transformação linear T em relação às bases B e C .

A base canônica do $\mathfrak{R}^3$ é: $B = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$. A transformação linear T , aplicada nos elementos dessa base, resulta em:

$$\begin{cases} T(1, 0, 0) = (1 - 0, 1 + 0) = (1, 1) \\ T(0, 1, 0) = (0 - 1, 0 + 0) = (-1, 0) \\ T(0, 0, 1) = (0 - 0, 0 + 2) = (0, 2) \end{cases}$$

Escrevendo cada vetor como combinação linear da base C , vem:

$$\begin{cases} (1, 1) = a(1, 1) + b(1, -1) \\ (-1, 0) = c(1, 1) + d(1, -1) \\ (0, 2) = e(1, 1) + f(1, -1) \end{cases}$$

de onde se obtém que:

$$\begin{cases} (1,1) = 1(1,1) + 0(1,-1) \\ (-1,0) = -\frac{1}{2}(1,1) - \frac{1}{2}(1,-1) \\ (0,2) = 1(1,1) - 1(1,-1) \end{cases}$$

Lembrando que as coordenadas obtidas constituirão as colunas da matriz desejada, obtém-se:

$$P = [T]_C^B = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix}.$$

Teorema: Sejam: U e V espaços vetoriais sobre o corpo K , de bases B e C , respectivamente, e $T: U \rightarrow V$ uma transformação linear. Então: $[T(u)]_C = [T]_C^B \cdot [u]_B$.

Demonstração:

Hipóteses: $T: U \rightarrow V$ é transformação linear; B e C são bases de U e V

Tese: $[T(u)]_C = [T]_C^B \cdot [u]_B$

Sejam $B = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ e $C = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ as bases de U e V , respectivamente. Tomando-se $u \in U$, existem em K escalares a_i ($1 \leq i \leq n$) tais que:

$$u = a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_n u_n.$$

Logo, as coordenadas de u em relação à base B são:

$$[u]_B = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}.$$

Tem-se:

$$T(u) = T(a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_n u_n) = a_1 T(u_1) + a_2 T(u_2) + \dots + a_n T(u_n) \quad (1)$$

Uma vez que os vetores $T(u_1), T(u_2), \dots, T(u_n)$ pertencem a V , podem-se determinar suas coordenadas em relação à base C ; assim, existem escalares $b_{ij} \in K$ ($1 \leq i \leq m; 1 \leq j \leq n$), tais que:

$$(S): \begin{cases} T(u_1) = b_{11}v_1 + b_{21}v_2 + \cdots + b_{m1}v_m \\ T(u_2) = b_{12}v_1 + b_{22}v_2 + \cdots + b_{m2}v_m \\ \vdots \\ T(u_n) = b_{1n}v_1 + b_{2n}v_2 + \cdots + b_{mn}v_m \end{cases},$$

e, portanto,

$$[T]_C^B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}.$$

Substituindo-se, na equação (1), as expressões de $T(u_i)$ ($1 \leq i \leq n$) que constam de (S), vem:

$$\begin{aligned} T(u) = & a_1(b_{11}v_1 + b_{21}v_2 + \cdots + b_{m1}v_m) + a_2(b_{12}v_1 + b_{22}v_2 + \cdots + b_{m2}v_m) + \cdots + \\ & + a_n(b_{1n}v_1 + b_{2n}v_2 + \cdots + b_{mn}v_m) \end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{aligned} T(u) = & (a_1b_{11} + a_2b_{12} + \cdots + a_nb_{1n})v_1 + (a_1b_{21} + a_2b_{22} + \cdots + a_nb_{2n})v_2 + \cdots + \\ & + (a_1b_{m1} + a_2b_{m2} + \cdots + a_nb_{mn})v_m. \end{aligned}$$

Esta última expressão de $T(u)$ determina suas coordenadas em relação à base C, ou seja,

$$[T(u)]_C = \begin{pmatrix} a_1b_{11} + a_2b_{12} + \cdots + a_nb_{1n} \\ a_1b_{21} + a_2b_{22} + \cdots + a_nb_{2n} \\ \vdots \\ a_1b_{m1} + a_2b_{m2} + \cdots + a_nb_{mn} \end{pmatrix}.$$

Essa matriz é resultante da multiplicação:

$$[T(u)]_C = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

e, portanto, conclui-se que $[T(u)]_C = [T]_C^B \cdot [u]_B$.

Corolário: Sejam: U um espaço vetorial sobre K ; B_1 e B_2 duas de suas bases; Id o operador identidade de U . As coordenadas de um vetor $u \in U$, em relação às bases B_1 e B_2 , estão relacionadas por:

$$a) \quad [u]_{B_2} = [Id]_{B_2}^{B_1} \cdot [u]_{B_1}$$

$$b) \quad [u]_{B_1} = \left([Id]_{B_2}^{B_1}\right)^{-1} \cdot [u]_{B_2},$$

onde $[Id]_{B_2}^{B_1}$ é a matriz do operador linear Id em relação às bases B_1 e B_2 .

Demonstração:

a) **Hipóteses:** U é espaço vetorial sobre K ; B_1 e B_2 são bases de U ; Id é o operador identidade de U

$$\text{Tese: } [u]_{B_2} = [Id]_{B_2}^{B_1} \cdot [u]_{B_1}$$

Sejam $B_1 = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ e $B_2 = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ duas bases de U . O operador identidade Id é tal que $Id(u) = u$, $\forall u \in U$. Como B_1 é base de U , então existem escalares $a_i \in K$, com $1 \leq i \leq n$ tais que: $u = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n$. Logo, as coordenadas do vetor u em relação à base B_1 são:

$$[u]_{B_1} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}.$$

A matriz $[Id]_{B_2}^{B_1}$ é determinada escrevendo-se cada vetor $Id(v_i) = v_i$ ($1 \leq i \leq n$) como combinação linear dos vetores da base B_2 . Então, existem escalares c_{jk} , com $1 \leq j \leq n$ e $1 \leq k \leq n$, tais que:

$$(S): \begin{cases} Id(v_1) = v_1 = c_{11}w_1 + c_{21}w_2 + \dots + c_{n1}w_n \\ Id(v_2) = v_2 = c_{12}w_1 + c_{22}w_2 + \dots + c_{n2}w_n \\ \vdots \\ Id(v_n) = v_n = c_{1n}w_1 + c_{2n}w_2 + \dots + c_{nn}w_n \end{cases}.$$

Portanto, a matriz procurada é:

$$[Id]_{B_2}^{B_1} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}.$$

Fazendo-se o produto $[Id]_{B_2}^{B_1} [u]_{B_1}$, segue-se que:

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 c_{11} + a_2 c_{12} + \cdots + a_n c_{1n} \\ a_1 c_{21} + a_2 c_{22} + \cdots + a_n c_{2n} \\ \vdots \\ a_1 c_{n1} + a_2 c_{n2} + \cdots + a_n c_{nn} \end{pmatrix}.$$

Substituindo em $u = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_n v_n$ a expressão de cada v_i do sistema (S), vem:

$$u = a_1 (c_{11} w_1 + c_{21} w_2 + \cdots + c_{n1} w_n) + a_2 (c_{12} w_1 + c_{22} w_2 + \cdots + c_{n2} w_n) + \cdots + a_n (c_{1n} w_1 + c_{2n} w_2 + \cdots + c_{nn} w_n).$$

Aplicando a propriedade distributiva e associando os termos convenientemente, segue-se que:

$$u = (a_1 c_{11} + a_2 c_{12} + \cdots + a_n c_{1n}) w_1 + (a_1 c_{21} + a_2 c_{22} + \cdots + a_n c_{2n}) w_2 + \cdots + (a_1 c_{n1} + a_2 c_{n2} + \cdots + a_n c_{nn}) w_n.$$

Essa expressão mostra que u está escrito como combinação linear dos vetores da base B_2 . Logo, as coordenadas do vetor u em relação à base B_2 são:

$$[u]_{B_2} = \begin{pmatrix} a_1 c_{11} + a_2 c_{12} + \cdots + a_n c_{1n} \\ a_1 c_{21} + a_2 c_{22} + \cdots + a_n c_{2n} \\ \vdots \\ a_1 c_{n1} + a_2 c_{n2} + \cdots + a_n c_{nn} \end{pmatrix}.$$

Conclui-se, assim, que $[u]_{B_2} = [Id]_{B_2}^{B_1} \cdot [u]_{B_1}$.

b) **Hipóteses:** U é espaço vetorial sobre K ; B_1 e B_2 são bases de U ; Id é o operador identidade de U

Tese: $[u]_{B_1} = ([Id]_{B_2}^{B_1})^{-1} \cdot [u]_{B_2}$

Multiplicando-se ambos os lados da expressão $[u]_{B_2} = [Id]_{B_2}^{B_1} [u]_{B_1}$ pela matriz $([Id]_{B_2}^{B_1})^{-1}$, obtém-se:

$$([Id]_{B_2}^{B_1})^{-1} [u]_{B_2} = ([Id]_{B_2}^{B_1})^{-1} [Id]_{B_2}^{B_1} [u]_{B_1},$$

isto é,

$$([Id]_{B_2}^{B_1})^{-1} [u]_{B_2} = [u]_{B_1},$$

o que demonstra o item (b).

Exemplo: Sejam: $T: \mathfrak{R}^2 \rightarrow P_2(\mathfrak{R})$, a transformação linear definida por:

$$T(x, y) = (x - y) + (2x + y)t + (x + y)t^2;$$

$B = \{(1, 2), (2, 0)\}$ e $C = \{-2, 1 + t, 2 - t^2\}$ bases de $\mathfrak{R}^2$ e de $P_2(\mathfrak{R})$, respectivamente; $u = (1, -1) \in \mathfrak{R}^2$.

Verificar que $[T(u)]_C = [T]_C^B \cdot [u]_B$, conforme se demonstrou no Teorema anterior.

Inicialmente, determinam-se as coordenadas de u em relação à base B , isto é, determinam-se escalares a e b tais que:

$$(1, -1) = a(1, 2) + b(2, 0);$$

dessa igualdade, vem:

$$\begin{cases} 1 = a + 2b \\ -1 = 2a \end{cases},$$

de onde se segue que $a = -\frac{1}{2}$ e $b = \frac{3}{4}$;

$$\text{assim, } [u]_B = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 3 \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix}.$$

A transformação linear T , aplicada ao vetor u , produz:

$$T(u) = T(1, -1) = (1 - (-1)) + (2 \cdot 1 + (-1))t + (1 + (-1))t^2 = 2 + t.$$

Escreve-se, agora, o elemento $T(u) \in P_2(\mathfrak{R})$ como combinação linear dos elementos da base C , ou seja, determinam-se escalares α, β e γ tais que:

$$T(u) = \alpha(-2) + \beta(1+t) + \gamma(2-t^2).$$

Então:

$$2 + t = \alpha(-2) + \beta(1+t) + \gamma(2-t^2) = (-2\alpha + \beta + 2\gamma) + \beta t - \gamma t^2;$$

da igualdade de polinômios, segue-se que:

$$\begin{cases} -2\alpha + \beta + 2\gamma = 2 \\ \beta = 1 \\ \gamma = 0 \end{cases}.$$

Desse sistema, obtém-se: $\alpha = -\frac{1}{2}, \beta = 1$ e $\gamma = 0$, ou seja, as coordenadas de $T(u)$ em relação à base C são:

$$[T(u)]_C = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Determina-se, agora, a matriz da transformação linear T em relação às bases B e C . Tem-se:

$$\begin{cases} T(1, 2) = -1 + 4t + 3t^2 = a(-2) + b(1+t) + c(2-t^2) \\ T(2, 0) = 2 + 4t + 2t^2 = d(-2) + e(1+t) + f(2-t^2) \end{cases},$$

de onde vem que:

$$\begin{cases} -1 + 4t + 3t^2 = (-2a + b + 2c) + bt - ct^2 \\ 2 + 4t + 2t^2 = (-2d + e + 2f) + et - ft^2 \end{cases}.$$

Tem-se, assim, o sistema linear:

$$\begin{cases} -2a + b + 2c = -1 \\ b = 4 \\ c = -3 \\ -2d + e + 2f = 2 \\ e = 4 \\ f = -2 \end{cases},$$

de onde se obtém: $a = -\frac{1}{2}$; $b = 4$; $c = -3$; $d = -1$; $e = 4$; $f = -2$, ou seja:

$$[T]_C^B = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -1 \\ 4 & 4 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Efetuada-se o produto $[T]_C^B \cdot [u]_B$, obtém-se:

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -1 \\ 4 & 4 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = [T(u)]_C.$$

Mostrou-se, assim, que $[T(u)]_C = [T]_C^B \cdot [u]_B$.

Enunciam-se, a seguir, dois resultados, sem demonstração.

Teorema: Sejam: U e V espaços vetoriais sobre um corpo K , de bases B e C , respectivamente, e $T: U \rightarrow V$ e $S: U \rightarrow V$ duas transformações lineares. Então:

$$[T + S]_C^B = [T]_C^B + [S]_C^B.$$

Teorema: Sejam: U , V e W espaços vetoriais sobre um corpo K , de bases B , C e D , respectivamente, e $T: U \rightarrow V$ e $S: V \rightarrow W$ duas transformações lineares. Então:

$$[S \circ T]_D^B = [S]_D^C \cdot [T]_C^B.$$

Exemplo: Considerem-se as transformações lineares:

- $T: \mathfrak{R}^3 \rightarrow \mathfrak{R}^2$, definida por: $T(x, y, z) = (x + y, x - z)$;
- $S: \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}^2$, definida por: $S(x, y) = (x + y, 2y)$.

Sejam $B = \{(1, 0, 1), (2, 2, 1), (1, -1, 1)\}$, uma base de $\mathfrak{R}^3$; $C = \{(1, 1), (0, 2)\}$ uma base de $\mathfrak{R}^2$, considerado como espaço de chegada de T e como espaço de saída de S ; $D = \{(0, 1), (-1, 2)\}$ uma base de $\mathfrak{R}^2$, considerado como espaço de chegada de S . Determinar a transformação linear $S \circ T$ e verificar que $[S \circ T]_D^B = [S]_D^C \cdot [T]_C^B$.

Primeiramente, determina-se a transformação linear composta de T e S , isto é:

$$\begin{aligned} (S \circ T)(x, y, z) &= S(T(x, y, z)) = S(x + y, x - z) = \\ &= ((x + y) + (x - z), 2(x - z)) = (2x + y - z, 2x - 2z) \end{aligned}$$

Observe-se que $S \circ T$ é uma transformação de $\mathfrak{R}^3$ em $\mathfrak{R}^2$, sendo este último espaço considerado com a base D . Para calcular a matriz $[S \circ T]_D^B$, deve-se aplicar $S \circ T$ em cada vetor da base B de $\mathfrak{R}^3$ e escrever os vetores resultantes como combinação linear dos vetores da base D de $\mathfrak{R}^2$, ou seja:

$$\begin{cases} (S \circ T)(1, 0, 1) = (1, 0) = a(0, 1) + b(-1, 2) \\ (S \circ T)(2, 2, 1) = (5, 2) = c(0, 1) + d(-1, 2) \\ (S \circ T)(1, -1, 1) = (0, 0) = e(0, 1) + f(-1, 2) \end{cases}.$$

Então:

$$\begin{cases} (1, 0) = (-b, a + 2b) \\ (5, 2) = (-d, c + 2d) \\ (0, 0) = (-f, e + 2f) \end{cases},$$

de onde se segue que: $a = 2$; $b = -1$; $c = 12$; $d = -5$; $e = f = 0$.

Portanto, a matriz de $S \circ T$ em relação às bases B e D é:

$$[S \circ T]_{D}^B = \begin{pmatrix} 2 & 12 & 0 \\ -1 & -5 & 0 \end{pmatrix}.$$

É preciso, agora, calcular as matrizes $[T]_C^B$ e $[S]_D^C$. Para calcular a primeira delas, deve-se calcular a transformação linear T nos elementos da base B e, em seguida, escrever esses vetores obtidos como combinação linear da base C de seu espaço de chegada, isto é:

$$\begin{cases} T(1, 0, 1) = (1, 0) = a(1, 1) + b(0, 2) \\ T(2, 2, 1) = (4, 1) = c(1, 1) + d(0, 2) \\ T(1, -1, 1) = (0, 0) = e(1, 1) + f(0, 2) \end{cases}.$$

Então:

$$\begin{cases} (1, 0) = (a, a + 2b) \\ (4, 1) = (c, c + 2d) \\ (0, 0) = (e, e + 2f) \end{cases},$$

de onde vem que: $a = 1$; $b = -\frac{1}{2}$; $c = 4$; $d = -\frac{3}{2}$; $e = f = 0$.

Portanto, a matriz procurada é:

$$[T]_C^B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Para o cálculo da matriz $[S]_D^C$, faz-se:

$$\begin{cases} S(1, 1) = (2, 2) = a(0, 1) + b(-1, 2) \\ S(0, 2) = (2, 4) = c(0, 1) + d(-1, 2) \end{cases},$$

de onde vem que:

$$\begin{cases} (2, 2) = (-b, a + 2b) \\ (2, 4) = (-d, c + 2d) \end{cases}.$$

Resolvendo-se esse sistema, obtêm-se os valores: $a=6$; $b=-2$; $c=8$; $d=-2$ e, assim, a matriz procurada é:

$$[S]_D^C = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Efetuada-se o produto $[S]_D^C \cdot [T]_C^B$, vem:

$$[S]_D^C \cdot [T]_C^B = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 12 & 0 \\ -1 & -5 & 0 \end{pmatrix} = [S \circ T]_D^B.$$

Enunciam-se, a seguir, três proposições, sem demonstração.

Proposição: Sejam: U e V espaços vetoriais sobre o corpo K , com bases B e C , respectivamente, e $T: U \rightarrow V$ um isomorfismo. Então $[T^{-1}]_B^C = ([T]_C^B)^{-1}$.

Observação: a matriz do isomorfismo T , em relação às bases B e C , é: $[T]_C^B$. Conforme se viu no Capítulo 7, sendo um isomorfismo, T é bijetora e, portanto, admite o isomorfismo inverso $T^{-1}: V \rightarrow U$. A matriz desse isomorfismo, em relação às bases C e B , é: $[T^{-1}]_B^C$. O que se afirma nessa proposição é que, para obter essa última matriz, pode-se calcular a matriz inversa de $[T]_C^B$, ou seja, $[T^{-1}]_B^C = ([T]_C^B)^{-1}$.

Proposição: Sejam: U e V espaços vetoriais sobre o corpo K , com bases B e C , respectivamente, e $T: U \rightarrow V$ uma transformação linear. Então, T é um isomorfismo se, e somente se, $\det([T]_C^B) \neq 0$.

Observação: a proposição afirma que T admite o isomorfismo inverso se, e somente se, o determinante da matriz $[T]_C^B$ é não nulo.

Exemplo: Considere-se o operador linear

$$\begin{aligned} T: \mathfrak{R}^2 &\rightarrow \mathfrak{R}^2 \\ (x, y) &\mapsto (x - 2y, 3x + y). \end{aligned}$$

Mostrar que T é inversível e determinar T^{-1} .

Esse exemplo foi resolvido de outra forma no capítulo anterior. Aqui, mostrar-se-á que T é inversível mostrando-se que a matriz do operador linear em relação à base canônica do $\mathfrak{R}^2$ é inversível, ou seja, que seu determinante é não nulo.

Para isso, deve-se calcular T nos elementos da base canônica do $\mathfrak{R}^2$ e escrevê-los como combinação linear dessa base. Têm-se:

$$\begin{cases} T(1,0) = (1-0, 3+0) = (1,3) = 1(1,0) + 3(0,1) \\ T(0,1) = (0-2, 0+1) = (-2,1) = -2(1,0) + 1(0,1) \end{cases}$$

Assim, a matriz procurada é:

$$[T] = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Uma vez que $\det([T]) = 7 \neq 0$, segue-se que $[T]$ é não singular, ou seja, é inversível, e, portanto, o operador linear T é inversível.

Para determinar T^{-1} , determina-se a matriz inversa de $[T]$. Utilizando-se qualquer método de inversão de matrizes, obtém-se:

$$[T^{-1}] = [T]^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{7} & \frac{2}{7} \\ -\frac{3}{7} & \frac{1}{7} \end{pmatrix}.$$

Então:

$$[T^{-1}](x, y) = [T]^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{7} & \frac{2}{7} \\ -\frac{3}{7} & \frac{1}{7} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{7}x + \frac{2}{7}y \\ -\frac{3}{7}x + \frac{1}{7}y \end{pmatrix}.$$

Assim, tem-se:

$$T^{-1}(x, y) = \left(\frac{1}{7}x + \frac{2}{7}y, -\frac{3}{7}x + \frac{1}{7}y \right).$$

Proposição: Sejam: U e V espaços vetoriais sobre o corpo K ; B e C , bases de U ; D e E , bases de V ; $T: U \rightarrow V$ uma transformação linear. Então:

$$[T]_D^B = [Id]_D^E \cdot [T]_E^C \cdot [Id]_C^B.$$

Teorema: Sejam: V , um espaço vetorial sobre o corpo K ; B e C bases de V ; $T: V \rightarrow V$ um operador linear; $P = [M]_C^B$ a matriz de mudança da base B para a base C . Então: $[T]_C = P^{-1} \cdot [T]_B \cdot P$.

Observação: $[T]_B$ denota a matriz $[T]_B^B$, assim como $[T]_C$ denota a matriz $[T]_C^C$.

Demonstração:

Hipóteses: V é um espaço vetorial sobre o corpo K ; B e C são bases de V ; $T: V \rightarrow V$ é um operador linear; $P = [M]_C^B$ é a matriz de mudança da base B para a base C

Tese: $[T]_C = P^{-1} \cdot [T]_B \cdot P$

Sejam $B = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ e $C = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ as bases de V consideradas na hipótese e $u \in V$. Determinar-se-á a matriz de mudança da base B para a base C . Para isso, escrevem-se os vetores da base C como combinação linear dos elementos da base B :

$$\begin{cases} v_1 = a_{11}u_1 + a_{21}u_2 + \dots + a_{n1}u_n \\ v_2 = a_{12}u_1 + a_{22}u_2 + \dots + a_{n2}u_n \\ \vdots \\ v_n = a_{1n}u_1 + a_{2n}u_2 + \dots + a_{nn}u_n \end{cases} \quad (1)$$

assim, obtém-se:

$$P = [M]_C^B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Determinar-se-ão, agora, as matrizes de T em relação às bases B e C . Para determinar $[T]_B = [T]_B^B$, deve-se escrever, para cada $1 \leq i \leq n$, $T(u_i)$ como combinação linear dos vetores $u_1, u_2, \dots, u_n$, isto é:

$$\begin{cases} T(u_1) = b_{11}u_1 + b_{21}u_2 + \cdots + b_{n1}u_n \\ T(u_2) = b_{12}u_1 + b_{22}u_2 + \cdots + b_{n2}u_n \\ \vdots \\ T(u_n) = b_{1n}u_1 + b_{2n}u_2 + \cdots + b_{nn}u_n \end{cases} \quad (2)$$

Assim, a matriz de T em relação à base B é:

$$[T]_B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}.$$

De modo análogo, Para determinar $[T]_C = [T]_C^C$, deve-se escrever, para cada $1 \leq i \leq n$, $T(v_i)$ como combinação linear dos vetores $v_1, v_2, \dots, v_n$, isto é:

$$\begin{cases} T(v_1) = c_{11}v_1 + c_{21}v_2 + \cdots + c_{n1}v_n \\ T(v_2) = c_{12}v_1 + c_{22}v_2 + \cdots + c_{n2}v_n \\ \vdots \\ T(v_n) = c_{1n}v_1 + c_{2n}v_2 + \cdots + c_{nn}v_n \end{cases}, \quad (3)$$

e, portanto, vem:

$$[T]_C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}.$$

Sendo T um operador linear, a partir das equações (1), obtém-se:

$$\begin{cases} T(v_1) = a_{11}T(u_1) + a_{21}T(u_2) + \cdots + a_{n1}T(u_n) \\ T(v_2) = a_{12}T(u_1) + a_{22}T(u_2) + \cdots + a_{n2}T(u_n) \\ \vdots \\ T(v_n) = a_{1n}T(u_1) + a_{2n}T(u_2) + \cdots + a_{nn}T(u_n) \end{cases} \quad (4)$$

Em (4), na expressão de $T(v_1)$, substitui-se o primeiro membro pela primeira equação de (3) e, no segundo membro, substitui-se $T(u_i)$, $(1 \leq i \leq n)$, pelas equações de (2), obtendo-se:

$$c_{11}v_1 + c_{21}v_2 + \cdots + c_{n1}v_n = a_{11}(b_{11}u_1 + b_{21}u_2 + \cdots + b_{n1}u_n) + \\ + a_{21}(b_{12}u_1 + b_{22}u_2 + \cdots + b_{n2}u_n) + \cdots + a_{n1}(b_{1n}u_1 + b_{2n}u_2 + \cdots + b_{nn}u_n).$$

Por outro lado, substituindo-se as expressões de v_i , $(1 \leq i \leq n)$, dadas em (1), vem:

$$c_{11}(a_{11}u_1 + a_{21}u_2 + \cdots + a_{n1}u_n) + c_{21}(a_{12}u_1 + a_{22}u_2 + \cdots + a_{n2}u_n) + \cdots + \\ + c_{n1}(a_{1n}u_1 + a_{2n}u_2 + \cdots + a_{nn}u_n) = a_{11}(b_{11}u_1 + b_{21}u_2 + \cdots + b_{n1}u_n) + \\ + a_{21}(b_{12}u_1 + b_{22}u_2 + \cdots + b_{n2}u_n) + \cdots + a_{n1}(b_{1n}u_1 + b_{2n}u_2 + \cdots + b_{nn}u_n)$$

ou seja,

$$(c_{11}a_{11} + c_{21}a_{12} + \cdots + c_{n1}a_{1n})u_1 + (c_{11}a_{21} + c_{21}a_{22} + \cdots + c_{n1}a_{2n})u_2 + \cdots + \\ + (c_{11}a_{n1} + c_{21}a_{n2} + \cdots + c_{n1}a_{nn})u_n = (a_{11}b_{11} + a_{21}b_{12} + \cdots + a_{n1}b_{1n})u_1 + \\ + (a_{11}b_{21} + a_{21}b_{22} + \cdots + a_{n1}b_{2n})u_2 + \cdots + (a_{11}b_{n1} + a_{21}b_{n2} + \cdots + a_{n1}b_{nn})u_n.$$

Da igualdade de vetores, obtém-se:

$$\begin{cases} c_{11}a_{11} + c_{21}a_{12} + \cdots + c_{n1}a_{1n} = a_{11}b_{11} + a_{21}b_{12} + \cdots + a_{n1}b_{1n} \\ c_{11}a_{21} + c_{21}a_{22} + \cdots + c_{n1}a_{2n} = a_{11}b_{21} + a_{21}b_{22} + \cdots + a_{n1}b_{2n} \\ \vdots \\ c_{11}a_{n1} + c_{21}a_{n2} + \cdots + c_{n1}a_{nn} = a_{11}b_{n1} + a_{21}b_{n2} + \cdots + a_{n1}b_{nn} \end{cases}. \quad (5)$$

Escrevendo essas equações na forma matricial, obtém-se:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Tem-se, então, o produto das matrizes:

$$P[T]_c = [T]_B P.$$

Sendo P inversível, podem-se multiplicar ambos os membros dessa equação por P^{-1} , obtendo-se:

$$P^{-1}P[T]_c = P^{-1}[T]_B P,$$

ou seja,

$$[T]_c = P^{-1}[T]_B P.$$

De modo análogo, trabalhando-se com $T(v_2), \dots, T(v_n)$, obtém-se o produto de matrizes anterior.

Exemplo: Determinar o operador linear do $\mathfrak{R}^2$ cuja matriz em relação à base

$$B = \{(1, 2), (0, 5)\} \text{ é } \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Tem-se: } [T]_B = [T]_B^B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Por definição, para se obter $[T]_B^B$, calcula-se o valor de T em cada vetor da base B e se escrevem esses vetores como combinação linear dos vetores da própria base B . Os escalares dessas combinações lineares são os elementos dessa matriz. Ou seja:

$$\begin{cases} T(1, 2) = 3(1, 2) + 2(0, 5) = (3, 16) \\ T(0, 5) = 1(1, 2) - 1(0, 5) = (1, -3) \end{cases} \quad (1)$$

Tomando-se um elemento genérico $(u, v) \in \mathfrak{R}^2$, quer-se determinar $T(u, v)$. Uma vez que T é um operador linear do $\mathfrak{R}^2$, tem-se que $T(u, v) \in \mathfrak{R}^2$, ou seja, $T(u, v) = (x, y)$. Assim, (x, y) pode ser escrito como combinação linear da base B , ou seja:

$$(x, y) = a(1, 2) + b(0, 5) = (a, 2a + 5b), \quad (2)$$

de onde se segue que:

$$\begin{cases} a = x \\ b = \frac{-2x + y}{5} \end{cases}$$

Substituindo-se esses valores de a e b em (2), vem:

$$T(x, y) = xT(1, 2) + \left(\frac{-2x + y}{5}\right)T(0, 5);$$

por outro lado, das equações (1), vem:

$$T(x, y) = x(3, 16) + \left(\frac{-2x + y}{5}\right)(1, -3),$$

e, portanto, a expressão de T é:

$$T(x, y) = \left(\frac{13x + y}{5}, \frac{86x - 3y}{5}\right).$$

8.1. EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1) Sejam $F: \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}^3$ e $G: \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}^3$ transformações lineares tais que a ma-

triz de $F + G$ em relação às bases canônicas do $\mathfrak{R}^2$ e do $\mathfrak{R}^3$ é $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$.

Sabendo-se que $F(x, y) = (x, x - y, 2y)$, determinar a matriz de G em relação às bases canônicas do $\mathfrak{R}^2$ e do $\mathfrak{R}^3$. Em seguida, determinar a expressão de $G(x, y)$.

$$\text{R.: } [G] = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}; \quad G(x, y) = (x + y, -x + 2y, 3x + y)$$

- 2) Seja $F: P_2(\mathfrak{R}) \rightarrow \mathfrak{R}$ a transformação linear definida por $F(p(t)) = \int_{-1}^1 p(t) dt$.

Determinar a matriz de F em relação às bases $B = \{1, 1+t, -1+t^2\}$ de $P_2(\mathfrak{R})$

e $C = \{-2\}$ de $\mathfrak{R}$.

$$\text{R.: } [F]_C^B = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

- 3) Seja $T: \mathfrak{R}^3 \rightarrow M_2(\mathfrak{R})$ a transformação linear cuja matriz em relação às

bases canônicas do $\mathfrak{R}^3$ e de $M_2(\mathfrak{R})$ é $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Considerando-se o

vetor $u = (2, -1, 3)$, determinar as coordenadas de $T(u)$ em relação à base canônica de $M_2(\mathfrak{R})$. Determinar a expressão de $T(x, y, z)$.

$$\text{R.: } [T(u)] = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}; T(x, y, z) = \begin{pmatrix} x & x+y \\ y+z & z \end{pmatrix}$$

- 4) Seja F o operador linear do $\mathfrak{R}^2$ cuja matriz em relação à base

$B = \{(1, 0), (1, 4)\}$ é $[F]_B^B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$. Determinar a matriz de F em relação à

base canônica do $\mathfrak{R}^2$.

$$\text{R.: } [F]_C^C = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 20 & -4 \end{pmatrix}$$

5) Sejam: $[T]_C^B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ a matriz de uma transformação linear

$T: M_2(\mathfrak{R}) \rightarrow P_2(\mathfrak{R})$; B e C as bases canônicas de $M_2(\mathfrak{R})$ e de $P_2(\mathfrak{R})$, respectivamente. Sabendo-se que as coordenadas do vetor $u \in M_2(\mathfrak{R})$,

em relação à base B , são $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, determinar as coordenadas do vetor $T(u)$

em relação à base C . Qual é a expressão de $T: M_2(\mathfrak{R}) \rightarrow P_2(\mathfrak{R})$?

$$\text{R.: } [T(u)]_C = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}; T \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a - b + 2c - d) + (2a + b - c)t + (a - 3b)t^2$$

9

OPERADORES DIAGONALIZÁVEIS

No capítulo 8, viu-se que é possível determinar a matriz de uma transformação ou de um operador linear em relação a qualquer base do espaço onde estão definidos. Neste capítulo, considerado um operador linear $T: V \rightarrow V$, quer-se determinar uma base de V em relação à qual a matriz de T seja a mais simples possível. Mostrar-se-á que essa matriz é diagonal, o que justificará a nomenclatura de *operador diagonalizável*. Para tanto, são necessários algumas definições e resultados.

9.1. AUTOVALORES E AUTOVETORES

Definição: Sejam: V um espaço vetorial sobre o corpo K dos números complexos ou reais e $T: V \rightarrow V$ um operador linear. Um vetor não nulo $v \in V$ é um autovetor de T se existir um escalar $\lambda \in K$ tal que $T(v) = \lambda v$. O escalar λ é chamado de autovalor de T associado ao autovetor v .

Observação: podem ser usadas, alternativamente, as seguintes expressões para “autovetor”: *vetor próprio* ou *vetor característico*. Analogamente, podem ser usadas as seguintes expressões para “autovalor”: *valor próprio* ou *valor característico*.

Exemplo: Sejam: V um espaço vetorial sobre um corpo K e $T = H_\lambda$ a homotetia de razão λ , definida por:

$$\begin{aligned} H_\lambda: V &\rightarrow V \\ v &\mapsto H_\lambda(v) = \lambda v. \end{aligned}$$

Pela definição do operador linear H_λ , vê-se que todo vetor de V é um autovetor, com autovalor λ .

Proposição: Seja $T: V \rightarrow V$ um operador linear. O autovalor λ é univocamente determinado pelo autovetor v de T .

Demonstração:

Hipóteses: $T : V \rightarrow V$ é um operador linear; v é um autovetor de T

Tese: o autovalor λ é único

De fato, suponha-se que existam dois autovalores λ e λ^* associados ao autovetor v , isto é:

$$T(v) = \lambda v \text{ e } T(v) = \lambda^* v.$$

Então:

$$\lambda v = \lambda^* v \Rightarrow (\lambda - \lambda^*)v = \mathbf{0} \Rightarrow \lambda - \lambda^* = 0 \Rightarrow \lambda = \lambda^*.$$

Logo, o autovalor λ determinado por v é único.

Observação: este resultado significa que cada autovetor está associado a apenas um autovalor, ou seja, cada autovetor gera um único autovalor. Entretanto, como se verá a seguir, cada autovalor pode gerar infinitos autovetores.

Definição: Sejam: V um espaço vetorial sobre o corpo K dos números complexos ou reais e $T : V \rightarrow V$ um operador linear. Dado o autovalor $\lambda \in K$, o subespaço próprio de λ é o subespaço $V(\lambda)$, dado por:

$$V(\lambda) = \{v \in V / T(v) = \lambda v\}.$$

Proposição: Sejam: V um espaço vetorial sobre o corpo K dos números complexos ou reais e $T : V \rightarrow V$ um operador linear. Dado o autovalor $\lambda \in K$ associado ao autovetor $v \in V$, o subespaço próprio de λ é $V(\lambda) = \text{Ker}(T - \lambda Id)$.

Demonstração:

Hipóteses: V é espaço vetorial sobre K ; $T : V \rightarrow V$ é operador linear; $\lambda \in K$ é autovalor de T associado ao autovetor $v \in V$

Tese: $V(\lambda) = \text{Ker}(T - \lambda Id)$

Da definição de $V(\lambda)$, tem-se que o subespaço próprio de λ é constituído pelos elementos de V tais que $T(v) = \lambda v$. Então, vem:

$$T(v) = \lambda v \Rightarrow T(v) - \lambda v = \mathbf{0} \Rightarrow T(v) - \lambda Id(v) = \mathbf{0} \Rightarrow (T - \lambda Id)(v) = \mathbf{0},$$

e, portanto, v pertence ao núcleo do operador linear $(T - \lambda Id)$. Assim, pode-se escrever:

$$V(\lambda) = \text{Ker}(T - \lambda Id).$$

Exemplos:

- 1) Seja $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ o operador linear definido por $T(x, y) = (y, x)$. Determinar os subespaços próprios, se existirem.

Inicialmente, observe-se que esse operador é a reflexão em torno da reta $y = x$. A representação geométrica de T é apresentada na Figura 9.1.

Primeiramente, é preciso verificar se existem autovalores. Para tanto, considerem-se $v = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ ($v \neq \mathbf{0}$) e $\lambda \in \mathbb{R}$. Impondo-se a condição $T(v) = \lambda v$, ou seja, $T(x, y) = \lambda(x, y)$, vem:

$$(y, x) = \lambda(x, y),$$

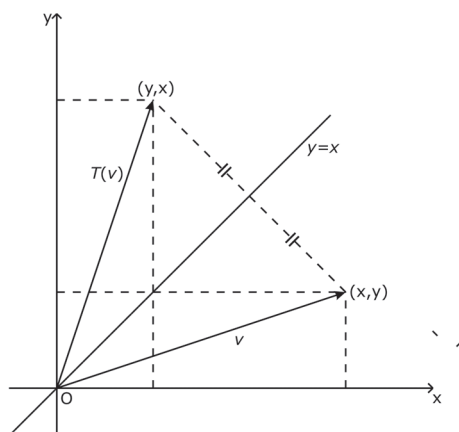
de onde se segue que

$$\begin{cases} y = \lambda x \\ x = \lambda y \end{cases}.$$

Conclui-se, assim, que $\lambda = -1$ ou $\lambda = 1$, ou seja, existem dois autovalores.

Determinam-se, agora, os autovetores associados a cada autovalor.

Figura 9.1

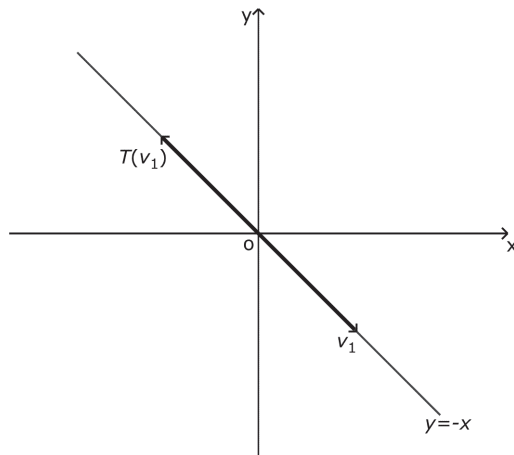


Para $\lambda_1 = -1$, tem-se:

$$\begin{cases} y = -1 \cdot x \\ x = -1 \cdot y \end{cases},$$

ou seja, $\lambda_1 = -1$ gera vetores da forma $v_1 = (x, -x)$. Mais precisamente, $\lambda_1 = -1$ gera o subespaço próprio $V(-1) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y = -x\}$. Geometricamente, os vetores desse subespaço pertencem à reta bissetriz do 2º e 4º quadrantes, onde $T(v_1) = -v_1$ (Figura 9.2).

Figura 9.2

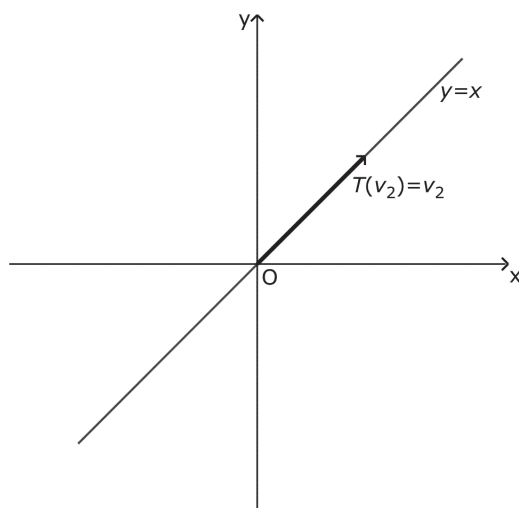


Para $\lambda_2 = 1$, tem-se:

$$\begin{cases} y = 1 \cdot x \\ x = 1 \cdot y \end{cases},$$

ou seja, $\lambda_2 = 1$ gera vetores da forma $v_2 = (x, x)$. Esse autovetor gera o subespaço próprio $V(1) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y = x\}$. Geometricamente, os vetores desse subespaço pertencem à reta bissetriz do 1º e 3º quadrantes, onde $T(v_2) = v_2$ (Figura 9.3).

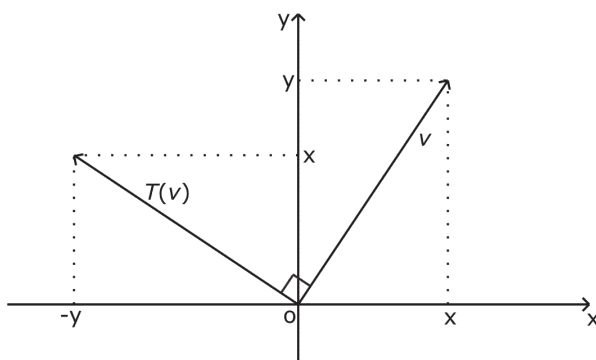
Figura 9.3



- 2) Seja $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ o operador linear dado por $T(x, y) = (-y, x)$, que é a rotação de um ângulo de 90° em torno da origem. Determinar, se existirem, os subespaços próprios.

A representação geométrica de T é apresentada na Figura 9.4.

Figura 9.4



Sejam $v = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ ($v \neq \mathbf{0}$) e $\lambda \in \mathbb{R}$. Impondo-se a condição $T(v) = \lambda v$, ou seja, $T(x, y) = \lambda(x, y)$, vem:

$$(-y, x) = \lambda(x, y),$$

de onde se segue que

$$\begin{cases} -y = \lambda x \\ x = \lambda y \end{cases}.$$

Substituindo-se a primeira equação na segunda, vem:

$$x = \lambda(-\lambda x),$$

ou seja,

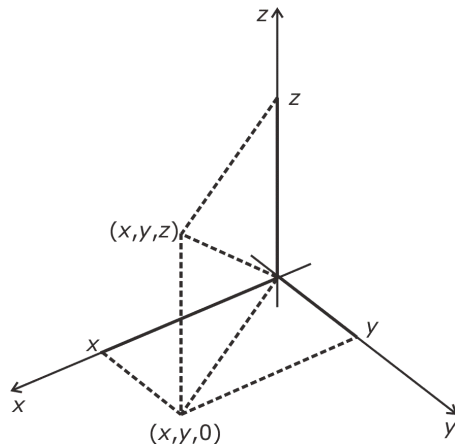
$$\lambda^2 x + x = 0 \Rightarrow (\lambda^2 + 1)x = 0.$$

Para que essa equação seja verdadeira para todo x , deve-se ter $\lambda^2 + 1 = 0$; entretanto, essa equação não admite solução em $\mathfrak{R}$. Conclui-se, assim, que não existem números reais λ tais que $T(x, y) = \lambda(x, y)$, isto é, não existem subespaços próprios.

- 3) Seja $T: \mathfrak{R}^3 \rightarrow \mathfrak{R}^3$ o operador linear dado por $T(x, y, z) = (x, y, 0)$. Determinar, caso existam, os subespaços próprios.

O operador T é a projeção ortogonal de um ponto (x, y, z) sobre o plano Oxy . Geometricamente, pode-se visualizar a ação do operador linear T na Figura 9.5.

Figura 9.5



Sejam $\lambda \in \mathfrak{R}$ e um vetor não nulo $v = (x, y, z) \in \mathfrak{R}^3$. Impondo-se a condição $T(v) = \lambda v$, tem-se:

$$T(x, y, z) = \lambda(x, y, z),$$

isto é,

$$(x, y, 0) = \lambda(x, y, z),$$

de onde vem:

$$\begin{cases} x = \lambda x \\ y = \lambda y \\ 0 = \lambda z \end{cases} \quad (1)$$

Dessas equações, conclui-se que há dois valores de λ : $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = 1$.

Substituindo-se o valor $\lambda_1 = 0$ nas equações (1), obtém-se:

$$\begin{cases} x = 0x \\ y = 0y \\ 0 = 0z \end{cases}$$

de onde se conclui que $x = 0$, $y = 0$ e z pode assumir qualquer valor, isto é, obtém-se o vetor $v_1 = (0, 0, z)$. Assim, $V(0) = \{(x, y, z) \in \mathfrak{R}^3 / x = y = 0\}$ é o subespaço próprio gerado por $\lambda_1 = 0$. Esse subespaço, geometricamente, é o eixo $Oz \subset \mathfrak{R}^3$ (Figura 9.6).

Figura 9.6

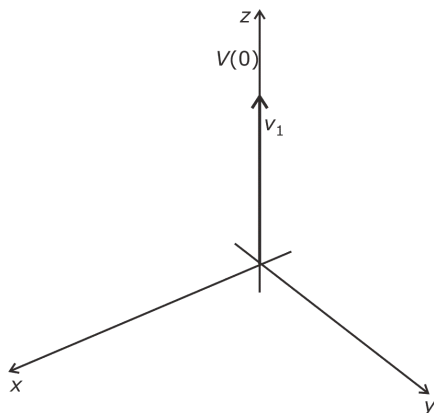
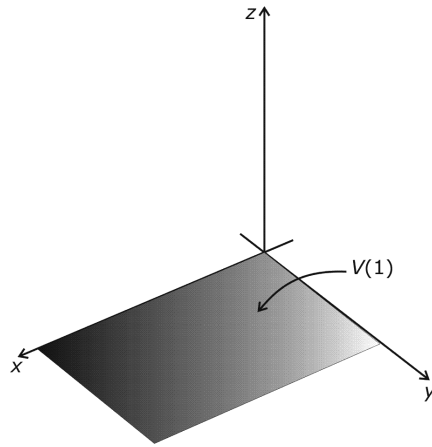


Figura 9.7



Substituindo-se, agora, o valor $\lambda_2 = 1$ nas equações (1), obtém-se:

$$\begin{cases} x = 1x \\ y = 1y, \\ 0 = 1z \end{cases}$$

de onde se conclui que $z = 0$ e x e y são quaisquer, isto é, obtém-se o vetor $v_2 = (x, y, 0)$. Assim, $V(1) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / z = 0\}$ é o subespaço próprio gerado por $\lambda_2 = 1$. Esse subespaço, geometricamente, é o plano $Oxy \subset \mathbb{R}^3$ (Figura 9.7).

Definição: Dada uma matriz quadrada A de ordem n , chama-se polinômio característico da matriz A , denotado por $P_C(\lambda)$, ao determinante: $\det(A - \lambda Id)$.

Observação: nessa definição, Id denota a matriz identidade de ordem n . Assim, se

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

então:

$$\begin{aligned}
 A - \lambda Id &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Logo,

$$P_C(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix}.$$

Proposição: Matrizes semelhantes têm o mesmo polinômio característico.

Demonstração:

Hipótese: A e B são matrizes semelhantes

Tese: A e B têm o mesmo polinômio característico

De fato, sejam A e B duas matrizes semelhantes. Então, existe uma matriz inversível P tal que: $A = P^{-1}BP$. Então: $A - \lambda Id = P^{-1}BP - \lambda Id$. Calculando o determinante das matrizes desta equação, vem:

$$\begin{aligned}
 |A - \lambda Id| &= |P^{-1}BP - \lambda Id| = |P^{-1}BP - P^{-1}\lambda IdP| = |P^{-1}(B - \lambda Id)P| = \\
 &= |P^{-1}| |B - \lambda Id| |P| = |B - \lambda Id|
 \end{aligned}$$

Logo, A e B têm o mesmo polinômio característico.

Exemplo: Mostrar que as matrizes $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & -\frac{5}{2} \\ -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ são semelhantes.

Mostrar-se-á que essas matrizes têm o mesmo polinômio característico. Tem-se:

$$P_C(\lambda)_A = \det(A - \lambda Id) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix},$$

ou seja,

$$P_C(\lambda)_A = \lambda^2 - 2\lambda - 5.$$

Por outro lado, tem-se:

$$P_C(\lambda)_B = \det(B - \lambda Id) = \begin{vmatrix} \frac{5}{2} - \lambda & -\frac{5}{2} \\ -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} - \lambda \end{vmatrix},$$

de onde segue-se que

$$P_C(\lambda)_B = \lambda^2 - 2\lambda - 5.$$

Como $P_C(\lambda)_A = P_C(\lambda)_B$, conclui-se que A e B são semelhantes.

Definição: Sejam V um espaço vetorial de dimensão n e $T: V \rightarrow V$ um operador linear. Chama-se polinômio característico do operador T o polinômio característico da matriz de T em relação a qualquer base.

Notação: $P_T(\lambda)$.

Exemplo: Seja $T: \mathfrak{R}^3 \rightarrow \mathfrak{R}^3$ o operador linear definido por:

$$T(x, y, z) = (x, x + y, x + z).$$

Determinar o polinômio característico de T em relação:

- à base canônica do $\mathfrak{R}^3$.
- à base $B = \{(1, 0, 1), (2, 3, 0), (1, -1, 2)\}$.
 - A base canônica do $\mathfrak{R}^3$ é: $C = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$. Para determinar a matriz de T em relação a essa base, calculam-se primeiramente, os vetores resultantes da aplicação de T em cada um dos vetores da base, isto é:

$$\begin{cases} T(1,0,0) = (1,1+0,1+0) = (1,1,1) \\ T(0,1,0) = (0,0+1,0+0) = (0,1,0) \\ T(0,0,1) = (0,0+0,0+1) = (0,0,1) \end{cases}$$

A matriz de T em relação a essa base é aquela cujas colunas são as coordenadas dos vetores encontrados, ou seja:

$$[T]_C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Portanto, o polinômio característico de T é o polinômio característico dessa matriz, isto é:

$$P_T(\lambda) = \det([T]_C - \lambda Id) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix},$$

e, portanto,

$$P_T(\lambda) = (1-\lambda)^3 = -\lambda^3 + 3\lambda^2 - 3\lambda + 1.$$

b) Calculando o valor de T em cada vetor da base, obtém-se:

$$\begin{cases} T(1,0,1) = (1,1+0,1+1) = (1,1,2) \\ T(2,3,0) = (2,2+3,2+0) = (2,5,2) \\ T(1,-1,2) = (1,1-1,1+2) = (1,0,3) \end{cases}$$

Escrevendo-se cada um dos vetores como combinação linear dos vetores da base B , tem-se:

$$\bullet \quad (1,1,2) = a(1,0,1) + b(2,3,0) + c(1,-1,2),$$

de onde vem que:

$$\begin{cases} 1 = a + 2b + c \\ 1 = 3b - c \\ 2 = a + 2c \end{cases},$$

de onde se conclui que

$$\begin{cases} a = -8 \\ b = 2 \\ c = 5 \end{cases}.$$

$$\bullet \quad (2, 5, 2) = d(1, 0, 1) + e(2, 3, 0) + f(1, -1, 2),$$

ou seja,

$$\begin{cases} 2 = d + 2e + f \\ 5 = 3e - f \\ 2 = d + 2f \end{cases},$$

de onde se segue que

$$\begin{cases} d = -18 \\ e = 5 \\ f = 10 \end{cases}.$$

$$\bullet \quad (1, 0, 3) = g(1, 0, 1) + h(2, 3, 0) + i(1, -1, 2),$$

isto é,

$$\begin{cases} 1 = g + 2h + i \\ 0 = 3h - i \\ 3 = g + 2i \end{cases},$$

e, portanto,

$$\begin{cases} g = -9 \\ h = 2 \\ i = 6 \end{cases}$$

Assim, a matriz $[T]_{\mathcal{C}}$ é:

$$[T]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} -8 & -18 & -9 \\ 2 & 5 & 2 \\ 5 & 10 & 6 \end{pmatrix}.$$

Logo, o polinômio característico de T é o polinômio característico dessa matriz, isto é:

$$P_T(\lambda) = \det\left(\begin{bmatrix} T \end{bmatrix}_C - \lambda Id\right) = \begin{vmatrix} -8-\lambda & -18 & -9 \\ 2 & 5-\lambda & 2 \\ 5 & 10 & 6-\lambda \end{vmatrix}$$

e, portanto,

$$P_T(\lambda) = -\lambda^3 + 3\lambda^2 - 3\lambda + 1$$

Assim, independentemente da base, o polinômio característico de um operador linear T é sempre o mesmo.

Proposição: Seja V um espaço vetorial de dimensão n e $T: V \rightarrow V$ um operador linear. Os zeros do polinômio característico do operador T são seus autovalores.

Observação: os zeros do polinômio característico $P_T(\lambda)$ são as raízes da equação $P_T(\lambda) = 0$.

Teorema: Autovetores associados a autovalores distintos são LI.

Demonstração:

Hipóteses: $T: V \rightarrow V$ é um operador linear; $v_1, v_2, \dots, v_r$ são autovetores associados aos autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$, distintos entre si

Tese: os autovetores $v_1, v_2, \dots, v_r$ são LI

Considere-se o operador linear $T: V \rightarrow V$ e sejam $v_1, v_2, \dots, v_r$ autovetores associados aos autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$, distintos entre si. A demonstração será feita por indução.

Para $k=1$, tem-se apenas um autovetor v_1 , associado ao autovalor λ_1 , o qual é LI, pois é não nulo.

Para $k=2$, têm-se os autovetores v_1 e v_2 , associados, respectivamente, aos autovalores λ_1 e λ_2 . Demonstrar-se-á que v_1 e v_2 são LI.

De fato, tomando-se escalares α_1 e α_2 tais que:

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 = \mathbf{0}, \quad (1)$$

vem:

$$T(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = T(\mathbf{0}),$$

ou seja,

$$T(\alpha_1 v_1) + T(\alpha_2 v_2) = \mathbf{0},$$

isto é,

$$\alpha_1 T(v_1) + \alpha_2 T(v_2) = \mathbf{0}.$$

Sendo v_1 e v_2 autovetores associados, respectivamente, aos autovalores λ_1 e λ_2 , pode-se escrever:

$$\alpha_1 (\lambda_1 v_1) + \alpha_2 (\lambda_2 v_2) = \mathbf{0}. \quad (2)$$

Multiplicando-se a expressão (1) por λ_2 , obtém-se:

$$\alpha_1 \lambda_2 v_1 + \alpha_2 \lambda_2 v_2 = \mathbf{0}. \quad (3)$$

Subtraindo-se membro a membro a equação (2) da equação (3), vem:

$$\alpha_1 (\lambda_2 - \lambda_1) v_1 = \mathbf{0},$$

de onde se segue que $\alpha_1 = 0$, já que $v_1 \neq \mathbf{0}$ e $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Substituindo-se $\alpha_1 = 0$ em (1), conclui-se que $\alpha_2 = 0$ e, portanto, conclui-se que v_1 e v_2 são LI.

Supondo-se que são LI os autovetores $v_1, v_2, \dots, v_k$ ($1 < k < r$), demonstrar-se-á que $v_1, v_2, \dots, v_{k+1}$ são LI. De fato, sejam $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{k+1}$ escalares tais que

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_{k+1} v_{k+1} = \mathbf{0}. \quad (4)$$

Tem-se:

$$T(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_{k+1} v_{k+1}) = T(\mathbf{0}),$$

ou seja,

$$T(\alpha_1 v_1) + T(\alpha_2 v_2) + \dots + T(\alpha_{k+1} v_{k+1}) = \mathbf{0},$$

ou, ainda,

$$\alpha_1(\lambda_1 v_1) + \alpha_2(\lambda_2 v_2) + \cdots + \alpha_{k+1}(\lambda_{k+1} v_{k+1}) = \mathbf{0}. \quad (5)$$

Multiplica-se, agora, a expressão (4) por λ_{k+1} e vem:

$$\alpha_1 \lambda_{k+1} v_1 + \alpha_2 \lambda_{k+1} v_2 + \cdots + \alpha_{k+1} \lambda_{k+1} v_{k+1} = \mathbf{0}. \quad (6)$$

Fazendo-se (6) – (5), vem:

$$\alpha_1(\lambda_{k+1} - \lambda_1)v_1 + \alpha_2(\lambda_{k+1} - \lambda_2)v_2 + \cdots + \alpha_k(\lambda_{k+1} - \lambda_k)v_k = \mathbf{0}.$$

Uma vez que os vetores $v_1, v_2, \dots, v_k$ são LI e os autovetores são distintos, conclui-se que $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_k = 0$. Substituindo-se esses escalares em (4), conclui-se que $\alpha_{k+1} = 0$ e, portanto, os vetores $v_1, v_2, \dots, v_{k+1}$ são LI, o que demonstra o teorema.

Observação: a recíproca desse teorema não é verdadeira, ou seja, se os autovetores $v_1, v_2, \dots, v_r$ são LI, isso não significa que eles são associados a autovalores distintos. De fato, considerando-se, por exemplo, a homotetia de razão λ , isto é, o operador

$$H_\lambda : V \rightarrow V \\ v \mapsto H_\lambda(v) = \lambda v,$$

sendo V um espaço de dimensão $n > 1$, vê-se que todo vetor de V é um autovetor associado a um único autovalor, que é λ .

Corolário: Se V é um espaço vetorial de dimensão n e $T : V \rightarrow V$ é um operador linear que admite n autovalores distintos, então V possui uma base cujos elementos são autovetores de T .

Exemplo: Considere-se o espaço vetorial real $\mathfrak{R}^3$ e o operador linear definido por:

$$T(x, y, z) = (3x - 6y + 4z, x - 4y + 4z, x - 3y + 3z).$$

Mostrar que existe uma base do $\mathfrak{R}^3$ constituída de autovetores de T , conforme afirma o corolário anterior.

A matriz de T em relação à base canônica C do $\mathfrak{R}^3$ é:

$$[T]_C = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 4 \\ 1 & -4 & 4 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

O polinômio característico de T é obtido através do determinante:

$$P_C(\lambda) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -6 & 4 \\ 1 & -4-\lambda & 4 \\ 1 & -3 & 3-\lambda \end{vmatrix},$$

de onde vem:

$$P_C(\lambda) = -\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda - 2,$$

cujas raízes são os autovalores de T : $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$ e $\lambda_3 = 2$. Tem-se, portanto, 3 autovalores distintos. Determinam-se, agora, os autovetores:

Para $\lambda_1 = -1$, tem-se:

$$\begin{pmatrix} 3+1 & -6 & 4 \\ 1 & -4+1 & 4 \\ 1 & -3 & 3+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

de onde vem que:

$$\begin{cases} 4x - 6y + 4z = 0 \\ x - 3y + 4z = 0 \\ x - 3y + 4z = 0 \end{cases}.$$

A solução geral desse sistema é:

$$\begin{cases} x = 2z \\ y = 2z \end{cases}, \forall z \in \Re, \text{ com } z \neq 0.$$

Logo, $\lambda_1 = -1$ gera autovetores da forma $v = (2z, 2z, z)$, $\forall z \in \Re$, com $z \neq 0$. Em particular, para $z = 1$, tem-se o autovetor $v_1 = (2, 2, 1)$.

Para $\lambda_2 = 1$, tem-se:

$$\begin{pmatrix} 3-1 & -6 & 4 \\ 1 & -4-1 & 4 \\ 1 & -3 & 3-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

de onde se obtém o sistema:

$$\begin{cases} 2x - 6y + 4z = 0 \\ x - 5y + 4z = 0 \\ x - 3y + 2z = 0 \end{cases},$$

cujas soluções gerais são dadas por:

$$\begin{cases} x = z \\ y = z \end{cases}, \quad \forall z \in \mathbb{R}, \text{ com } z \neq 0.$$

Logo, $\lambda_2 = 1$ gera autovetores da forma $v = (z, z, z)$, $\forall z \in \mathbb{R}$, com $z \neq 0$. Em particular, para $z = 1$, tem-se o autovetor $v_2 = (1, 1, 1)$.

Para $\lambda_3 = 2$, tem-se:

$$\begin{pmatrix} 3-2 & -6 & 4 \\ 1 & -4-2 & 4 \\ 1 & -3 & 3-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

ou seja,

$$\begin{cases} x - 6y + 4z = 0 \\ x - 6y + 4z = 0 \\ x - 3y + z = 0 \end{cases}$$

cujas soluções gerais são dadas por:

$$\begin{cases} x = 2z \\ y = z \end{cases}, \quad \forall z \in \mathbb{R}, \text{ com } z \neq 0.$$

Logo, $\lambda_3 = 2$ gera autovetores da forma $v = (2z, z, z)$, $\forall z \in \mathbb{R}$, com $z \neq 0$. Em particular, para $z = 1$, tem-se o autovetor $v_3 = (2, 1, 1)$.

Pode-se verificar que o conjunto $B = \{(2, 2, 1), (1, 1, 1), (2, 1, 1)\}$ é LI e, portanto, é uma base do $\mathbb{R}^3$, a qual é formada por autovetores de T .

9.2. DIAGONALIZAÇÃO DE OPERADORES

Teorema: Seja V um espaço vetorial n -dimensional. A matriz $[T]_B$ de um operador linear $T: V \rightarrow V$, em relação a uma base B , é uma matriz diagonal se, e somente se, essa base B é formada por autovetores de T .

Demonstração:

Condição necessária:

Hipóteses: $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ é base de V e $v_1, v_2, \dots, v_n$ são autovetores de T

Tese: a matriz de T em relação à base B é diagonal

De fato, sendo $v_1, v_2, \dots, v_n$ autovetores de T , tem-se:

$$\begin{cases} T(v_1) = \lambda_1 v_1 \\ T(v_2) = \lambda_2 v_2 \\ \vdots \\ T(v_n) = \lambda_n v_n \end{cases},$$

onde $\lambda_i (1 \leq i \leq n)$ são os autovalores, não necessariamente distintos. Ou seja,

$$\begin{cases} T(v_1) = \lambda_1 v_1 + 0v_2 + \dots + 0v_n \\ T(v_2) = 0v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + 0v_n \\ \vdots \\ T(v_n) = 0v_1 + 0v_2 + \dots + \lambda_n v_n \end{cases}.$$

Assim, a matriz do operador T , em relação a essa base, é:

$$[T]_B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Vê-se, assim, que a matriz de T em relação a uma base de autovetores é diagonal.

Condição suficiente:

Hipóteses: $B' = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ é base de V e a matriz de T em relação a essa base é diagonal

Tese: $u_1, u_2, \dots, u_n$ são autovetores de T

Seja

$$[T]_{B'} = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$$

a matriz de T em relação à base B' .

Tem-se, então:

$$\begin{cases} T(u_1) = a_1 u_1 + 0u_2 + \cdots + 0u_n \\ T(u_2) = 0u_1 + a_2 u_2 + \cdots + 0u_n \\ \vdots \\ T(u_n) = 0u_1 + 0u_2 + \cdots + a_n u_n \end{cases},$$

e, portanto, os vetores u_i ($1 \leq i \leq n$) são autovetores de T associados aos autovalores a_i ($1 \leq i \leq n$), ou seja, a base B' é composta de autovetores de T .

A definição seguinte define o que é um operador diagonalizável.

Definição: Seja $T: V \rightarrow V$ um operador linear. Diz-se que T é um operador diagonalizável se existir uma base de V formada por autovetores de T .

Observação: por essa definição, se V tem dimensão n e se o operador é diagonalizável, então existe uma base B de V constituída por autovetores de T , associados a autovalores λ_i ($1 \leq i \leq n$). Conforme se viu acima, a matriz de T em relação a essa base é diagonal, sendo que sua diagonal contém os autovalores, isto é,

$$[T]_B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

O questionamento que se pode fazer é: qual é a posição dos autovalores λ_i na diagonal?

O que determina a posição dos autovalores na diagonal é a posição dos autovetores dentro da base B . Lembrando que as raízes do polinômio característico de T são seus autovalores, é possível que haja raízes (isto é, autovalores) com multiplicidade maior do que 1. Assim, a matriz de T em relação à base de autovetores é formada por blocos, cujas ordens são iguais à multiplicidade dos autovalores λ_i ($1 \leq i \leq n$), como raízes do polinômio característico.

Por exemplo, se o polinômio característico de um operador linear T é:

$$P_T(\lambda) = (\lambda - 4)(\lambda + 3)^2,$$

conclui-se que a raiz $\lambda_1 = 4$ tem multiplicidade 1 e que a raiz $\lambda_2 = -3$ tem multiplicidade 2. Então, a matriz de T em relação à base dos autovetores associados a esses autovalores é formada por dois blocos: um de ordem 1, associado ao autovalor $\lambda_1 = 4$ e um de ordem 2, associado ao autovalor $\lambda_2 = -3$.

Portanto, a matriz $[T]_B$ pode apresentar as seguintes formas:

$$\left(\begin{array}{c|cc} 4 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{array} \right) \text{ ou } \left(\begin{array}{cc|c} -3 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -3 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 4 \end{array} \right)$$

Exemplos:

1) Verificar quais dos operadores T é diagonalizável. Para os que forem, exibir a matriz de T em relação à base de autovetores.

a) $T(x, y) = (x + 4y, 2x + 3y)$

b) $T(x, y, z) = (5x - 6y - 6z, -x + 4y + 2z, 3x - 6y - 4z)$

a) Observe-se que T é um operador linear de $\mathfrak{R}^2$ em $\mathfrak{R}^2$. Para determinar os autovalores, calculam-se as raízes do polinômio característico de T . Como o polinômio característico é o mesmo em relação a qualquer base, usar-se-á a base canônica de $\mathfrak{R}^2$ para construir a matriz de T .

Tem-se:

$$\begin{cases} T(1, 0) = (1 + 0, 2 + 0) = (1, 2) \\ T(0, 1) = (0 + 4, 0 + 3) = (4, 3) \end{cases},$$

e, portanto, sua matriz em relação a essa base é:

$$[T] = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Assim, o polinômio característico de T é o determinante:

$$P_T(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 4 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda - 5.$$

Os zeros desse polinômio, isto é, as raízes da equação $\lambda^2 - 4\lambda - 5 = 0$, são $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = 5$. Portanto, esses são os autovalores de T . Para determinar os autovetores associados, faz-se:

$$T(v) = \lambda v,$$

ou seja,

$$[T - \lambda Id](v) = \mathbf{0}.$$

Tomando-se um vetor $v = (x, y)$, vem:

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & 4 \\ 2 & 3-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Então:

- para $\lambda_1 = -1$, tem-se:

$$\begin{pmatrix} 1-(-1) & 4 \\ 2 & 3-(-1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

de onde se segue que

$$\begin{cases} 2x + 4y = 0 \\ 2x + 4y = 0 \end{cases},$$

ou seja,

$$x = -2y.$$

Assim, os autovetores associados a esse autovalor são do tipo $v = (-2y, y) = y(-2, 1)$. Fazendo-se, por exemplo, $y = 1$, obtém-se o autovetor $v_1 = (-2, 1)$.

- para $\lambda_2 = 5$, tem-se:

$$\begin{pmatrix} 1-5 & 4 \\ 2 & 3-5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

isto é,

$$\begin{cases} -4x + 4y = 0 \\ 2x - 2y = 0 \end{cases},$$

De onde se conclui que $x = y$.

Logo, os autovetores associados a esse autovalor são do tipo $v = (x, x) = x(1, 1)$. Tomando-se, por exemplo, $x = 1$, obtém-se o autovetor $v_2 = (1, 1)$.

Observe-se que esses autovetores são LI, pois, se a_1 e a_2 são escalares tais que:

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 = \mathbf{0},$$

vem:

$$a_1(-2, 1) + a_2(1, 1) = (0, 0),$$

ou seja,

$$(-2a_1 + a_2, a_1 + a_2) = (0, 0),$$

de onde vem que:

$$\begin{cases} -2a_1 + a_2 = 0 \\ a_1 + a_2 = 0 \end{cases}.$$

A resolução desse sistema linear leva à solução trivial, isto é, $a_1 = a_2 = 0$ e, portanto, os vetores v_1 e v_2 são LI e formam uma base de $\mathfrak{R}^2$, isto é, $B = \{(-2, 1), (1, 1)\}$ é uma base de $\mathfrak{R}^2$. Conclui-se, assim, que T é um operador diagonalizável e sua matriz em relação a essa base é uma matriz diagonal, cuja diagonal principal é formada pelos autovalores, ou seja:

$$[T]_B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

É claro que $[T]_B = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ é também a matriz de T em relação à base

B . A ordem dos autovalores na diagonal da matriz depende da posição dos autovetores dentro da base B .

- b) Aqui, tem-se que T é um operador linear de $\mathfrak{R}^3$ em $\mathfrak{R}^3$. Para determinar os autovalores, calculam-se as raízes do polinômio característico de T . Usar-se-á a base canônica de $\mathfrak{R}^3$ para construir a matriz de T .

Tem-se:

$$\begin{cases} T(1,0,0) = (5-0-0, -1+0+0, 3-0-0) = (5, -1, 3) \\ T(0,1,0) = (0-6-0, 0+4+0, 0-6-0) = (-6, 4, -6) \\ T(0,0,1) = (0-0-6, 0+0+2, 0-0-4) = (-6, 2, -4) \end{cases}$$

Assim, a matriz de T em relação à base canônica de $\mathfrak{R}^3$ é:

$$[T] = \begin{pmatrix} 5 & -6 & -6 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & -4 \end{pmatrix};$$

portanto, seu polinômio característico é:

$$P_T(\lambda) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & -6 & -6 \\ -1 & 4-\lambda & 2 \\ 3 & -6 & -4-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 5\lambda^2 - 8\lambda + 4.$$

Determinando-se os zeros desse polinômio, isto é, as raízes da equação $-\lambda^3 + 5\lambda^2 - 8\lambda + 4 = 0$, obtêm-se: $\lambda_1 = 1$, com multiplicidade 1, e $\lambda_2 = 2$, com multiplicidade 2. Logo, o polinômio pode ser escrito na forma:

$$P_T(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)^2.$$

Para determinar os autovetores associados, toma-se um vetor $v = (x, y, z)$ e impõe-se a condição:

$$T(v) = \lambda v,$$

ou seja,

$$[T - \lambda Id](v) = \mathbf{0},$$

ou, ainda,

$$\begin{pmatrix} 5-\lambda & -6 & -6 \\ -1 & 4-\lambda & 2 \\ 3 & -6 & -4-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Então:

- para $\lambda_1 = 1$, vem:

$$\begin{pmatrix} 4 & -6 & -6 \\ -1 & 3 & 2 \\ 3 & -6 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

de onde se obtém o sistema linear

$$\begin{cases} 4x - 6y - 6z = 0 \\ -x + 3y + 2z = 0 \\ 3x - 6y - 5z = 0 \end{cases}$$

De sua resolução, obtêm-se:

$$\begin{cases} x = -3y \\ z = -3y \end{cases}.$$

Assim, os autovetores associados a esse autovalor são do tipo $v = (-3y, y, -3y) = y(-3, 1, -3)$. Fazendo-se, por exemplo, $y = 1$, obtém-se o autovetor $v_1 = (-3, 1, -3)$.

- para $\lambda_2 = 2$, vem:

$$\begin{pmatrix} 3 & -6 & -6 \\ -1 & 2 & 2 \\ 3 & -6 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

de onde vem que:

$$\begin{cases} 3x - 6y - 6z = 0 \\ -x + 2y + 2z = 0 \\ 3x - 6y - 6z = 0 \end{cases}$$

que leva à solução da forma $x = 2y + 2z$. Portanto, os autovetores associados e esse autovalor são do tipo $v = (2y + 2z, y, z) = y(2, 1, 0) + z(2, 0, 1)$.

Tomando-se, por exemplo, $y=1$ e $z=0$, obtém-se o autovetor $v_2 = (2, 1, 0)$; tomando-se outro par de valores para y e z , por exemplo, $y=0$ e $z=1$, obtém-se outro autovetor associado a esse autovalor: $v_3 = (2, 0, 1)$.

Pode-se verificar que os autovetores determinados são LI e, portanto, formam uma base de $\mathfrak{R}^3$: $B = \{(-3, 1, -3), (2, 1, 0), (2, 0, 1)\}$. Então, T é um operador diagonalizável e sua matriz em relação a essa base é diagonal, dada por:

$$[T]_B = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{array} \right).$$

Alternativamente, mudando-se a ordem dos vetores na base B , pode-se escrever a matriz de T na forma:

$$[T]_B = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

- 2) Mostrar que o operador linear $T(x, y, z) = (2x + y, y - z, 2y + 4z)$ não é diagonalizável.

Tem-se, aqui, um operador linear de $\mathfrak{R}^3$ em $\mathfrak{R}^3$. Considerando-se a base canônica de $\mathfrak{R}^3$, verificar-se-á se existe uma base de $\mathfrak{R}^3$ constituída por autovetores de T . Para isso, determinam-se, primeiramente os autovalores de T , construindo o polinômio característico e calculando-se seus zeros.

Tem-se:

$$\begin{cases} T(1, 0, 0) = (2 + 0, 0 - 0, 0 + 0) = (2, 0, 0) \\ T(0, 1, 0) = (0 + 1, 1 - 0, 2 + 0) = (1, 1, 2) \\ T(0, 0, 1) = (0 + 0, 0 - 1, 0 + 4) = (0, -1, 4) \end{cases}$$

e, portanto, a matriz de T em relação à base canônica de $\mathfrak{R}^3$ é:

$$[T] = \left(\begin{array}{ccc} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{array} \right).$$

Portanto, o polinômio característico é:

$$P_T(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & -1 \\ 0 & 2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 7\lambda^2 - 16\lambda + 12.$$

Determinando-se as raízes da equação $-\lambda^3 + 7\lambda^2 - 16\lambda + 12 = 0$, obtêm-se $\lambda_1 = 2$, com multiplicidade 2, e $\lambda_2 = 3$, com multiplicidade 1. Assim, o polinômio pode ser escrito na forma $P_T(\lambda) = (\lambda - 3)(\lambda - 2)^2$.

Tomando-se um vetor $v = (x, y, z)$ e impondo-se a condição $T(v) = \lambda v$, ou, equivalentemente, $[T - \lambda Id](v) = \mathbf{0}$, obtém-se:

$$\begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & -1 \\ 0 & 2 & 4-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- Para $\lambda_1 = 3$, tem-se:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

de onde vem que:

$$\begin{cases} -x + y = 0 \\ -2y - z = 0, \\ 2y + z = 0 \end{cases}$$

$$\text{que leva a } \begin{cases} x = y \\ z = -2y. \end{cases}$$

Logo, os autovetores associados são do tipo $v = (y, y, -2y) = y(1, 1, -2)$.

Tomando-se, por exemplo, $y = 1$, obtém-se o autovetor $v_1 = (1, 1, -2)$.

- Para $\lambda_2 = 2$, tem-se:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

isto é,

$$\begin{cases} y = 0 \\ -y - z = 0, \\ 2y + 2z = 0 \end{cases}$$

de onde se conclui que $y = z = 0$.

Portanto, os autovetores associados são do tipo $v = (x, 0, 0) = x(1, 0, 0)$. Tomando-se, por exemplo, $x = 1$, obtém-se o autovetor $v_2 = (1, 0, 0)$.

Vê-se, assim, que há apenas dois autovetores associados aos autovalores obtidos, e, portanto, o conjunto $B = \{(1, 1, -2), (1, 0, 0)\}$ não é uma base de $\mathfrak{R}^3$. Se não existe uma base de $\mathfrak{R}^3$ constituída pelos autovetores de T , então T não é um operador diagonalizável e, portanto, não possui uma matriz diagonal em relação a nenhuma base de $\mathfrak{R}^3$.

9.3. RELAÇÃO ENTRE MATRIZ DIAGONALIZÁVEL E AUTOVETORES

No Capítulo 1, viu-se que uma matriz quadrada B , de ordem n , é diagonalizável se existe uma matriz não singular P , de mesma ordem, tal que $A = P^{-1}BP$ é uma matriz diagonal. Quando isso ocorre, diz-se que A e B são semelhantes. A dificuldade consiste em determinar a matriz P . No entanto, pode-se demonstrar que se B for diagonalizável, as colunas da matriz P são constituídas das coordenadas dos autovetores relativos a um operador linear T e a matriz A , cuja diagonal principal é constituída dos autovalores associados, é a representação diagonal da matriz B .

Exemplos:

1) No Exemplo 1 do item 1.3.6. *Matrizes Semelhantes* do Capítulo 1, mostrou-se

que as matrizes $A = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$ são semelhantes, determi-

nando-se, através da definição, a matriz $P = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -6 \end{bmatrix}$; ou seja, impôs-se

que $A = P^{-1}BP$, ou equivalentemente, $PA = BP$, e determinou-se a matriz P .

Determinar-se-á, agora, essa mesma matriz P , utilizando-se os conceitos de autovetores e autovalores associados a um operador linear T . A partir da matriz B , determina-se seu polinômio característico:

$$P_C(\lambda) = \begin{vmatrix} -4-\lambda & -1 \\ 6 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \lambda - 6,$$

cujas raízes são os autovalores $\lambda_1 = -3$ e $\lambda_2 = 2$. Os autovetores associados são calculados a seguir.

Para $\lambda_1 = -3$, tem-se:

$$\begin{pmatrix} -4-(-3) & -1 \\ 6 & 3-(-3) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

ou seja,

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 6 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

que leva ao sistema linear

$$\begin{cases} -x - y = 0 \\ 6x + 6y = 0 \end{cases}.$$

Desse sistema, conclui-se que $x = -y$, isto é, o autovetor gerado por $\lambda_1 = -3$ é da forma $v_1 = (-y, y)$, $\forall y \in \mathfrak{R}$, com $y \neq 0$. Em particular, para $y = 1$, gera-se o autovetor $v_1 = (-1, 1)$.

Para $\lambda_2 = 2$, tem-se:

$$\begin{pmatrix} -4-2 & -1 \\ 6 & 3-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

isto é,

$$\begin{pmatrix} -6 & -1 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

de onde se obtém:

$$\begin{cases} -6x - y = 0 \\ 6x + y = 0 \end{cases}.$$

A solução geral desse sistema é $y = -6x$, com $x \in \mathfrak{R}$. Então, o autovetor gerado por $\lambda_2 = 2$ é da forma $v_2 = (x, -6x)$, $\forall x \in \mathfrak{R}$, com $x \neq 0$. Em particular, para $x = 1$, tem-se o autovetor $v_2 = (1, -6)$. Logo, a matriz P é constituída dos autovetores v_1 e v_2 , ou seja, $P = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -6 \end{bmatrix}$, que é a matriz obtida

anteriormente. Essa matriz é não singular e sua inversa é $P^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{6}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix}$.

Assim, da mesma forma que se fez no Exemplo 1 do item 1.3.6. *Matrizes Semelhantes* do Capítulo 1, tem-se:

$$P^{-1}BP = \begin{bmatrix} -\frac{6}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{18}{5} & \frac{3}{5} \\ -\frac{2}{5} & -\frac{2}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = A.$$

Observe-se que os elementos da diagonal de A são os autovalores encontrados.

2) Também no Exemplo 1 do item 1.3.6. *Matrizes Semelhantes* do Capítulo 1,

mostrou-se que as matrizes $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ não são

semelhantes, ou seja, não existe a matriz P tal que $A = P^{-1}BP$. Pode-se chegar a essa mesma conclusão utilizando-se autovalores e autovetores associados a um operador linear T . A partir de B , determina-se seu polinômio característico:

$$P_C(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & -1 \\ 0 & 2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 7\lambda - 16\lambda + 12 = (\lambda - 3)(\lambda - 2)^2;$$

as raízes desse polinômio são os autovalores $\lambda_1 = 3$ (com multiplicidade 1) e $\lambda_2 = 2$ (com multiplicidade 2).

Para $\lambda_1 = 3$, tem-se:

$$\begin{pmatrix} 2-3 & 1 & 0 \\ 0 & 1-3 & -1 \\ 0 & 2 & 4-3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

isto é,

$$\begin{cases} -x + y = 0 \\ -2y - z = 0 \\ 2y + z = 0 \end{cases}$$

A resolução do sistema leva às conclusões $x = y$ e $z = -2y$, para $y \in \mathfrak{R}$. Então, o autovetor gerado por $\lambda_1 = 3$ é da forma $v_1 = (y, y, -2y)$, $\forall y \in \mathfrak{R}$, com $y \neq 0$. Em particular, para $y = 1$, gera-se o autovetor $v_1 = (1, 1, -2)$.

Para $\lambda_2 = 2$, tem-se:

$$\begin{pmatrix} 2-2 & 1 & 0 \\ 0 & 1-2 & -1 \\ 0 & 2 & 4-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

ou seja, obtém-se o sistema linear

$$\begin{cases} y = 0 \\ -y - z = 0 \\ 2y + 2z = 0 \end{cases},$$

cujas soluções gerais são $y = z = 0$ e $x \in \mathfrak{R}$. Então, o autovetor gerado por $\lambda_2 = 2$ é da forma $v_2 = (x, 0, 0)$, $\forall x \in \mathfrak{R}$, com $x \neq 0$. Em particular, para $x = 1$, tem-se o autovetor $v_2 = (1, 0, 0)$.

Como só existem dois autovetores $v_1 = (1, 1, -2)$ e $v_2 = (1, 0, 0)$, não existe a matriz P de ordem 3, constituída de autovetores, tal que $A = P^{-1}BP$. Conclui-se, portanto, que as matrizes A e B não são semelhantes, ou seja, B não é diagonalizável, como já se havia concluído no citado exemplo do Capítulo 1.

- 3) No Exemplo 2 do item 9.2. *Diagonalização de Operadores* deste Capítulo, mostrou-se que:

• a matriz $A = \begin{pmatrix} 5 & -6 & -6 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & -4 \end{pmatrix}$, que é a matriz de um operador linear em

relação à base canônica do $\mathfrak{R}^3$, é diagonalizável;

- seus autovalores são $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 2$;
- os autovetores gerados são $v_1 = (-3, 1, -3)$, $v_2 = (2, 1, 0)$ e $v_3 = (2, 0, 1)$.

Logo, existe a matriz $P = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, cuja inversa é:

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -1 & 3 & 2 \\ 3 & -6 & -5 \end{pmatrix}.$$

Pode-se, assim, utilizar essa matriz para determinar a matriz diagonal B que é semelhante à matriz A . Basta que se efetue o produto $P^{-1}AP$:

$$\begin{aligned} P^{-1}AP &= \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -1 & 3 & 2 \\ 3 & -6 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -6 & -6 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 6 & 4 \\ 6 & -12 & -10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Obteve-se, assim, a matriz

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

diagonal, a qual é semelhante à matriz A , que é a mesma obtida anteriormente no citado exemplo.

9.4. EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1) Seja $T : M_2(TS) \rightarrow M_2(TS)$, onde $M_2(TS)$ é o espaço vetorial das matrizes

triangulares superiores, cuja base canônica é $C = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Mostrar que o operador linear $T \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a & 3b \\ 0 & -a + 3b + c \end{pmatrix}$ é diagonalizável e exibir sua matriz em relação à base de autovetores.

$$R: [T]_B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ ou } [T]_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

- 2) Verificar quais dos operadores lineares são diagonalizáveis. Para os que o forem, exibir a matriz do operador em relação à base de autovetores.

a) $T(x, y, z) = (2x + z, x + 2y - z, 2x + 3z)$

$$R: \text{ é diagonalizável; } [T]_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \text{ ou } [T]_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{ou } [T]_B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \dots$$

b) $T(a_0 + a_1 t) = (8a_0 - 6a_1) + (9a_0 - 7a_1)t$

$$R.: \text{ é diagonalizável; } [T]_B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ ou } [T]_B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

c) $T(x, y, z) = (x + y + z, x + y - z, x - y - z)$

$$R.: \text{ é diagonalizável; } [T]_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \text{ ou } [T]_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{ou } [T]_B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \dots$$

$$\text{d) } T(x, y) = \left(\frac{6x - y}{4}, \frac{2x + 3y}{4} \right)$$

$$\text{R.: é diagonalizável; } [T]_B = \begin{pmatrix} \frac{5}{4} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ ou } [T]_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{5}{4} \end{pmatrix}$$

$$\text{e) } T(x, y, z) = (x, y + z, 2z)$$

R.: não é diagonalizável.

$$\text{f) } T(x, y, z) = (x + 2y + 3z, 2x + y + 2z, 3x + 3y + z)$$

$$\text{R.: é diagonalizável; } [T]_B = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \text{ ou } [T]_B = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{ou } [T]_B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \dots$$

10

ESPAÇOS COM PRODUTO INTERNO

Em Geometria Analítica, estudam-se, em particular, dois espaços vetoriais: o $\mathfrak{R}^2$ (cuja imagem geométrica é o plano de coordenadas cartesianas ortogonais) e o $\mathfrak{R}^3$ (cuja imagem geométrica é o espaço tridimensional). São espaços vetoriais reais importantes, os quais têm visão geométrica. Dentre os conceitos e definições que se introduzem nesses espaços, tem-se o produto escalar entre dois vetores, de grande importância e aplicabilidade. O que se pretende, neste capítulo, é generalizar o conceito de *produto escalar* visando a introduzir os conceitos de *distância*, *comprimento*, *ângulo* e *ortogonalidade*, os quais, apesar de terem um caráter geométrico, podem ser estendidos para espaços vetoriais não geométricos.

10.1. PRODUTO INTERNO

Definição: Seja V um espaço vetorial real. Um produto interno sobre V é uma função $\Phi: V \times V \rightarrow \mathfrak{R}$, que, para todo par de vetores $(u, v) \in V \times V$, associa um número real $\Phi(u, v) = \langle u, v \rangle$ satisfazendo:

- a) $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle, \forall u, v \in V$
- b) $\langle \alpha u, v \rangle = \alpha \langle u, v \rangle, \forall u, v \in V \text{ e } \forall \alpha \in \mathfrak{R}$
- c) $\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle, \forall u, v, w \in V$
- d) $\langle u, u \rangle \geq 0$ e $\langle u, u \rangle = 0 \Leftrightarrow u = \mathbf{0}$

Um espaço vetorial real munido de produto interno é chamado *espaço euclidiano*.

Observação: pode-se, em geral, definir mais de um produto interno em um espaço vetorial real.

Exemplos:

- 1) Dados dois vetores $u, v \in \mathfrak{R}^n$, isto é, $u = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ e $v = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, define-se o produto interno entre eles da seguinte forma:

$$\langle u, v \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$$

Esse é o produto interno usual do $\mathfrak{R}^n$.

- 2) O produto escalar entre dois vetores do $\mathfrak{R}^3$ é o produto interno usual, pois, dados dois vetores $u = (x_1, y_1, z_1)$ e $v = (x_2, y_2, z_2)$ do $\mathfrak{R}^3$, então:

$$u \bullet v = \langle u, v \rangle = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2.$$

- 3) O produto escalar entre dois vetores do $\mathfrak{R}^2$ é o produto interno usual, pois, dados dois vetores $u = (x_1, y_1)$ e $v = (x_2, y_2)$ do $\mathfrak{R}^2$, então:

$$u \bullet v = \langle u, v \rangle = x_1 x_2 + y_1 y_2.$$

- 4) Mostrar que $\langle u, v \rangle = 2x_1 x_2 + x_1 y_2 + y_1 x_2 + 3y_1 y_2$ define um produto interno no $\mathfrak{R}^2$, quaisquer que sejam os vetores $u = (x_1, y_1)$ e $v = (x_2, y_2)$.

De fato, considerem-se os vetores $u = (x_1, y_1)$, $v = (x_2, y_2)$ e $w = (x_3, y_3)$ pertencentes ao $\mathfrak{R}^2$. Verificar-se-á que são satisfeitas as condições da definição de produto interno. Tem-se:

$$\text{a) } \langle u, v \rangle = 2x_1 x_2 + x_1 y_2 + y_1 x_2 + 3y_1 y_2 = 2x_2 x_1 + x_2 y_1 + y_2 x_1 + 3y_2 y_1 = \langle v, u \rangle$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \langle \alpha u, v \rangle &= 2\alpha x_1 x_2 + \alpha x_1 y_2 + \alpha y_1 x_2 + 3\alpha y_1 y_2 = \\ &= \alpha (2x_1 x_2 + x_1 y_2 + y_1 x_2 + 3y_1 y_2) = \alpha \langle u, v \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \langle u + v, w \rangle &= 2(x_1 + x_2)x_3 + (x_1 + x_2)y_3 + (y_1 + y_2)x_3 + 3(y_1 + y_2)y_3 = \\ &= 2x_1 x_3 + 2x_2 x_3 + x_1 y_3 + x_2 y_3 + y_1 x_3 + y_2 x_3 + 3y_1 y_3 + 3y_2 y_3 = \\ &= (2x_1 x_3 + x_1 y_3 + y_1 x_3 + 3y_1 y_3) + (2x_2 x_3 + x_2 y_3 + y_2 x_3 + 3y_2 y_3) = \\ &= \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } \langle u, u \rangle &= 2x_1^2 + 2x_1 y_1 + 3y_1^2 = x_1^2 + (x_1^2 + 2x_1 y_1 + y_1^2) + 2y_1^2 = \\ &= (x_1 + y_1)^2 + (x_1^2 + 2y_1^2) \geq 0 \end{aligned}$$

Por outro lado, tem-se:

$$\begin{aligned}\langle u, u \rangle = 0 &\Leftrightarrow (x_1 + y_1)^2 + (x_1^2 + 2y_1^2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + y_1 = 0 \\ x_1^2 + 2y_1^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x_1 = 0 \text{ e } y_1 = 0 \Leftrightarrow u = (0, 0)\end{aligned}$$

- 5) Seja $M_n(\mathfrak{R})$ o espaço vetorial das matrizes quadradas de ordem n com elementos reais. Define-se o produto interno entre duas matrizes A e B desse espaço da seguinte forma:

$$\langle A, B \rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{ji}.$$

Sugestão: verificar que esse produto satisfaz as condições da definição de produto interno para $n = 2$.

- 6) Seja $P_n(\mathfrak{R})$ o espaço vetorial dos polinômios de grau menor ou igual a n com coeficientes reais. Dados dois polinômios $p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ e $q(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_nx^n$ desse espaço, é possível verificar que

$$\langle p(x), q(x) \rangle = \sum_{i=0}^n a_i b_i$$

define um produto interno.

Sugestão: verificar para o caso em que $n = 2$.

10.2. NORMA, MÉTRICA E ÂNGULO

10.2.1. Norma

Definição: Seja V um espaço euclidiano com produto interno $\langle u, v \rangle$. A norma (ou comprimento) de um vetor $u \in V$, denotada por $\|u\|$, é o número real não negativo dado por $\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}$.

Exemplos:

- 1) No $\mathfrak{R}^3$, a norma $\|u\|$ de qualquer vetor $u = (x, y, z)$ coincide com seu módulo $|u|$, pois, utilizando-se o produto interno usual (que é o produto escalar), tem-se:

$$\langle u, u \rangle = x^2 + y^2 + z^2$$

Assim:

$$\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = |u|$$

e, portanto, tem-se que $\|u\| = |u|$.

- 2) Conforme se observou anteriormente, o produto interno não é único. Dessa forma, um vetor de um espaço euclidiano poderá ter normas diferentes, conforme se considerem produtos internos diferentes no espaço vetorial.

Para ver isso, considere-se, por exemplo, o espaço vetorial $\mathfrak{R}^2$, com o produto interno usual e o produto interno definido no exemplo 4, isto é:

$$\langle u, v \rangle = 2x_1x_2 + x_1y_2 + y_1x_2 + 3y_1y_2,$$

para $u = (x_1, y_1)$ e $v = (x_2, y_2)$ pertencentes ao $\mathfrak{R}^2$.

Tomando-se, por exemplo, o vetor $u = (3, 4)$, calcular-se-á sua norma usando-se cada um dos produtos internos citados:

- usando-se o produto interno usual, tem-se:

$$\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle} = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$$

- usando-se o produto interno acima definido, tem-se:

$$\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle} = \sqrt{2 \cdot 3 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 3 + 3 \cdot 4 \cdot 4} = \sqrt{90} = 3\sqrt{10} \cong 9,5$$

Vê-se, assim, que o vetor u tem normas (comprimentos) diferentes em relação a produtos internos diferentes.

- 3) Dados uma matriz $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ do espaço vetorial $M_2(\mathfrak{R})$ e o produto

interno $\langle A, B \rangle = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 a_{ij}b_{ji}$, a norma de A , segundo esse produto interno é:

$$\langle A, A \rangle = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 a_{ij}a_{ji} = \sum_{i=1}^2 (a_{i1}a_{1i} + a_{i2}a_{2i}) =$$

$$= a_{11}a_{11} + a_{12}a_{21} + a_{21}a_{12} + a_{22}a_{22} = a_{11}^2 + 2a_{12}a_{21} + a_{22}^2$$

Tomando-se, por exemplo, a matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$, tem-se:

$$\|A\| = \sqrt{\langle A, A \rangle} = \sqrt{2^2 + 2 \cdot (-1) \cdot 5 + 3^2} = \sqrt{3}.$$

Propriedades da Norma

Dados um espaço euclidiano V e vetores $u, v \in V$, são válidas as seguintes propriedades:

$$(P_1) \quad \|u\| \geq 0 \text{ e } \|u\| = 0 \Leftrightarrow u = \mathbf{0}$$

De fato, por definição, tem-se:

$$\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle};$$

uma vez que, por definição de produto interno, tem-se que $\langle u, u \rangle \geq 0$, segue-se que:

$$\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle} \geq 0.$$

Além disso, se $\|u\| = 0$, vem:

$$0 = \|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle} \Leftrightarrow \langle u, u \rangle = 0 \Leftrightarrow u = \mathbf{0}.$$

$$(P_2) \quad \langle u, u \rangle = \|u\|^2$$

Imediata, pois, por definição, $\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}$.

$$(P_3) \quad \|ku\| = |k|\|u\|, \quad \forall k \in \mathfrak{R}$$

Tem-se:

$$\|ku\| = \sqrt{\langle ku, ku \rangle} = \sqrt{k^2 \langle u, u \rangle} = |k| \sqrt{\langle u, u \rangle} = |k|\|u\|$$

$$(P_4) \quad \text{Desigualdade de Cauchy-Schwarz: } |\langle u, v \rangle| \leq \|u\|\|v\|$$

Primeiramente, observe-se que, se $u = \mathbf{0}$ ou $v = \mathbf{0}$, tem-se:

$$|\langle u, v \rangle| = 0 \text{ e } \|u\|\|v\| = 0;$$

então,

$$|\langle u, v \rangle| = \|u\| \|v\|$$

e, portanto, é verdadeiro que

$$|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \|v\|.$$

Se $u \neq 0$ e $v \neq 0$, tem-se, para todo número real k , que:

$$\|ku + v\|^2 \geq 0,$$

de onde se segue que:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \|ku + v\|^2 = \langle ku + v, ku + v \rangle = \langle ku, ku \rangle + \langle ku, v \rangle + \langle v, ku \rangle + \langle v, v \rangle = \\ &= k^2 \langle u, u \rangle + 2k \langle u, v \rangle + \langle v, v \rangle = k^2 \|u\|^2 + 2k \langle u, v \rangle + \|v\|^2 \end{aligned}$$

Tem-se, aqui, uma inequação do 2º grau na variável k , já que $\|u\|^2 > 0$:

$$\|u\|^2 k^2 + 2\langle u, v \rangle k + \|v\|^2 \geq 0.$$

Considerando-se a equação do 2º grau

$$\|u\|^2 k^2 + 2\langle u, v \rangle k + \|v\|^2 = 0,$$

seu discriminante é:

$$\Delta = 4\langle u, v \rangle^2 - 4\|u\|^2 \|v\|^2,$$

o qual deve ser menor ou igual a zero, para que a inequação seja satisfeita, ou seja, deve-se ter:

$$4\langle u, v \rangle^2 - 4\|u\|^2 \|v\|^2 \leq 0,$$

isto é,

$$\langle u, v \rangle^2 \leq \|u\|^2 \|v\|^2,$$

ou, ainda,

$$|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \|v\|,$$

o que demonstra a desigualdade.

(P_5) Desigualdade Triangular: $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$

Tem-se:

$$\|u + v\|^2 = \langle u + v, u + v \rangle = \langle u, u \rangle + \langle u, v \rangle + \langle v, u \rangle + \langle v, v \rangle = \|u\|^2 + 2\langle u, v \rangle + \|v\|^2$$

Pela Desigualdade de Cauchy-Schwarz, tem-se:

$$\langle u, v \rangle \leq |\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \|v\|;$$

logo, vem:

$$\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + 2\langle u, v \rangle + \|v\|^2 \leq \|u\|^2 + 2\|u\| \|v\| + \|v\|^2 = (\|u\| + \|v\|)^2,$$

isto é,

$$\|u + v\|^2 \leq (\|u\| + \|v\|)^2$$

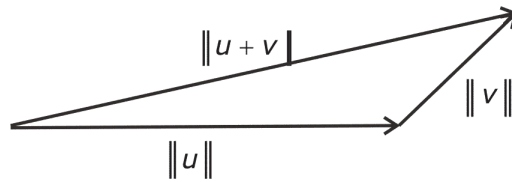
e, portanto,

$$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|.$$

Observações:

- 1) Se $\|u\| = 1$ ou, equivalentemente, se $\langle u, u \rangle = 1$, diz-se que u é um vetor *unitário* e que o vetor está *normalizado*. Um vetor qualquer $u \neq \mathbf{0}$ pode ser normalizado fazendo-se $u_0 = \frac{1}{\|u\|} u$; o vetor u_0 assim obtido é um múltiplo positivo de u . Esse processo é denominado de *normalização* do vetor v . O vetor u_0 é também chamado de *versor* do vetor u .
- 2) Uma interpretação geométrica particular da desigualdade triangular é bastante conhecida. Considerando-se dois vetores u e v do $\mathfrak{R}^2$ ou do $\mathfrak{R}^3$, sabe-se que, geometricamente, a soma $u + v$ desses dois vetores, é o vetor com origem na origem do vetor u e extremidade na extremidade do vetor v , ou seja,

Figura 10.1



Sabe-se que: $\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$.

10.2.2. Métrica

Definição: Dado um espaço vetorial euclidiano V , uma métrica sobre V é uma aplicação $d: V \times V \rightarrow \mathfrak{R}$ tal que $d(u, v) = \|u - v\|$, $\forall u, v \in V$.

Propriedades da métrica: dados os vetores u, v e w em V , tem-se:

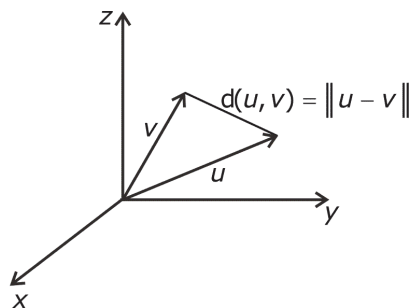
$$(P_1) \quad d(u, v) \geq 0 \text{ e } d(u, v) = 0 \Leftrightarrow u = v$$

$$(P_2) \quad d(u, v) = d(v, u)$$

$$(P_3) \quad d(u, v) \leq d(u, w) + d(v, w)$$

O número real $d(u, v)$ é usualmente chamado de *distância* entre os vetores u e v , nos espaços vetoriais nos quais este conceito pode ser interpretado geometricamente. Por exemplo, no $\mathfrak{R}^3$, tem-se:

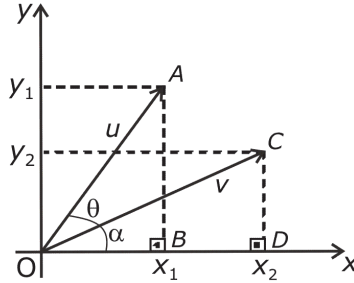
Figura 10.2



10.2.3. Ângulo

Seja V o espaço euclidiano $\mathfrak{R}^2$ com o produto interno usual. Considere-se os vetores $u = (x_1, y_1)$ e $v = (x_2, y_2)$ não nulos e não paralelos desse espaço e seja θ o ângulo entre eles. Considere-se, ainda, o ângulo α mostrado na Figura 10.3:

Figura 10.3



Do triângulo OAB , tem-se:

$$\cos(\theta + \alpha) = \frac{x_1}{\|u\|} \text{ e } \sin(\theta + \alpha) = \frac{y_1}{\|u\|}.$$

Então, vem:

$$\cos(\theta + \alpha) = \cos \theta \cos \alpha - \sin \theta \sin \alpha = \frac{x_1}{\|u\|},$$

de onde se segue que:

$$\cos \theta = \frac{\frac{x_1}{\|u\|} + \sin \theta \sin \alpha}{\cos \alpha} \quad (1)$$

e

$$\sin(\theta + \alpha) = \sin \theta \cos \alpha + \sin \alpha \cos \theta = \frac{y_1}{\|u\|},$$

ou seja,

$$\sin \theta = \frac{\frac{y_1}{\|u\|} - \sin \alpha \cos \theta}{\cos \alpha}. \quad (2)$$

Substituindo-se em (2) em (1), obtém-se:

$$\cos \theta = \frac{\frac{x_1}{\|u\|} + \frac{\frac{y_1}{\|u\|} - \operatorname{sen} \alpha \cos \theta}{\cos \alpha} \operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha},$$

isto é,

$$\cos \theta = \frac{\frac{x_1}{\|u\|} \cos \alpha + \frac{y_1}{\|u\|} \operatorname{sen} \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha \cos \theta}{\cos^2 \alpha},$$

ou, ainda,

$$\cos \theta \cos^2 \alpha + \cos \theta \operatorname{sen}^2 \alpha = \frac{x_1}{\|u\|} \cos \alpha + \frac{y_1}{\|u\|} \operatorname{sen} \alpha.$$

Do triângulo OCD , tem-se:

$$\cos(\alpha) = \frac{x_2}{\|v\|} \quad \text{e} \quad \operatorname{sen}(\alpha) = \frac{y_2}{\|v\|}.$$

Assim, vem:

$$\cos \theta (\cos^2 \alpha + \operatorname{sen}^2 \alpha) = \frac{x_1}{\|u\|} \frac{x_2}{\|v\|} + \frac{y_1}{\|u\|} \frac{y_2}{\|v\|},$$

de onde se obtém:

$$\cos \theta = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{\|u\| \|v\|}.$$

Uma vez que se está considerando o produto interno usual, obtém-se, finalmente, que:

$$\cos \theta = \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \|v\|}.$$

Dessa forma, pode-se calcular o cosseno do ângulo θ ($0 \leq \theta \leq \pi$) entre os vetores u e v . Observe-se que essa expressão está bem definida, pois, da desigualdade de Cauchy-Schwarz, tem-se que:

$$|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \|v\|$$

ou seja,

$$-\|u\|\|v\| \leq \langle u, v \rangle \leq \|u\|\|v\|.$$

Se os vetores u e v são não nulos, pode-se dividir os membros dessa desigualdade pelo número real $\|u\|\|v\|$, obtendo-se:

$$-1 \leq \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\|\|v\|} \leq 1.$$

O número real θ é chamado de ângulo entre os vetores u e v .

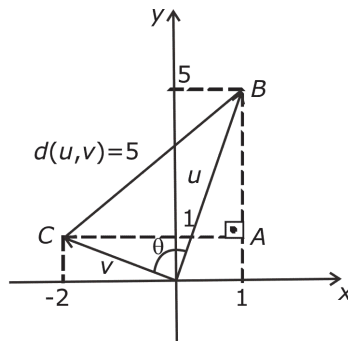
Exemplos:

- 1) Considerem-se os vetores $u = (1, 5)$ e $v = (-2, 1)$ do espaço $\mathbb{R}^2$. Tem-se:

$$d(u, v) = \|u - v\| = \|(1, 5) - (-2, 1)\| = \|(3, 4)\| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$$

Portanto, a distância entre os vetores u e v é igual a 5 unidades de medida. De fato, é possível ver, geometricamente, que $d(u, v) = 5$, conforme mostra a Figura 10.4.

Figura 10.4



No triângulo retângulo ABC , tem-se que as medidas dos catetos AB e AC são, respectivamente, 4 e 3 unidades de medida e, portanto, a medida da hipotenusa BC é 5, ou seja, $d(u, v) = 5$.

Pode-se, assim, calcular o ângulo θ entre os vetores u e v , através de seu cosseno, como segue:

$$\cos \theta = \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \|v\|} = \frac{1 \cdot (-2) + 5 \cdot 1}{\sqrt{1^2 + 5^2} \cdot \sqrt{(-2)^2 + 1^2}} = \frac{3}{\sqrt{26} \cdot \sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{130}}{130} \cong 0,26.$$

Portanto, $\theta = \arccos(0,26) \cong 75^\circ$.

- 2) Considerem-se as matrizes $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ pertencentes ao espaço euclidiano $M_2(\mathfrak{R})$, com o produto interno definido por;

$$\langle A, B \rangle = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 a_{ij} b_{ji}, \quad \forall A, B \in M_2(\mathfrak{R}). \text{ Tem-se:}$$

$$\langle A, A \rangle = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 a_{ij} a_{ji} = a_{11}^2 + 2a_{12}a_{21} + a_{22}^2 = 2^2 + 2 \cdot (-1) \cdot 5 + 3^2 = 3,$$

e, portanto,

$$\|A\| = \sqrt{\langle A, A \rangle} = \sqrt{3}$$

e

$$\langle B, B \rangle = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 b_{ij} b_{ji} = b_{11}^2 + 2b_{12}b_{21} + b_{22}^2 = (-1)^2 + 2 \cdot 1 \cdot 4 + 2^2 = 13,$$

isto é,

$$\|B\| = \sqrt{\langle B, B \rangle} = \sqrt{13}.$$

Por outro lado, tem-se:

$$A - B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Uma vez que $d(A, B) = \|A - B\|$, vem:

$$\langle A - B, A - B \rangle = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 c_{ij} c_{ji} = c_{11}^2 + 2c_{12}c_{21} + c_{22}^2 = 3^2 + 2 \cdot (-2) \cdot 1 + 1^2 = 6$$

ou seja,

$$d(A, B) = \|A - B\| = \sqrt{\langle A - B, A - B \rangle} = \sqrt{6}.$$

Além disso, tem-se:

$$\langle A, B \rangle = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 a_{ij} b_{ji} = a_{11} b_{11} + a_{12} b_{21} + a_{21} b_{12} + a_{22} b_{22} = 2 \cdot (-1) + (-1) \cdot 4 + 5 \cdot 1 + 3 \cdot 2 = 5$$

e, portanto,

$$\cos \theta = \frac{\langle A, B \rangle}{\|A\| \|B\|} = \frac{5}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{13}} = \frac{5\sqrt{39}}{39}.$$

Apesar de ser possível determinar $d(A, B) = \sqrt{6}$ e $\cos \theta = \frac{5\sqrt{39}}{39}$ para as matrizes A e B , esses valores não têm um significado geométrico como no Exemplo 1.

10.3. ORTOGONALIDADE

Definição: Seja V um espaço euclidiano. Dois vetores $u, v \in V$ são ortogonais se, e somente se, $\langle u, v \rangle = 0$.

Exemplo: Considerem-se os vetores $u = (-1, 3, 2)$, $v = (5, 1, 1)$ e $w = (1, 1, -1)$ do espaço euclidiano $\mathbb{R}^3$. Verificar-se-á quais desses vetores são ortogonais entre si.

Para isso, basta calcular o produto interno entre eles. Considerando-se o produto interno usual do $\mathbb{R}^3$, tem-se:

$$\langle u, v \rangle = -1 \cdot 5 + 3 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = -5 + 5 = 0$$

$$\langle u, w \rangle = -1 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) = -3 + 3 = 0$$

$$\langle w, v \rangle = 1 \cdot 5 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) = -1 + 6 = 5$$

Conclui-se, assim, que u e v são ortogonais, u e w são ortogonais e v e w não são ortogonais.

Definição: Seja V um espaço euclidiano. Um conjunto $S = \{v_1, v_2, \dots, v_k\} \subset V$ é ortogonal se $\langle v_i, v_j \rangle = 0$, para $i \neq j$, ou seja, dois vetores quaisquer distintos de S são ortogonais.

Exemplo: Considerem-se os vetores $u = (-1, 3, 2)$, $v = (5, 1, 1)$ e $w = (-1, -11, 16)$ do espaço euclidiano $\mathbb{R}^3$. Mostrar-se-á que o conjunto $S = \{u, v, w\} \subset \mathbb{R}^3$ é ortogonal.

De fato, considerando-se o produto interno usual do $\mathbb{R}^3$, tem-se:

$$\langle u, v \rangle = -1 \cdot 5 + 3 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = -5 + 5 = 0.$$

$$\langle u, w \rangle = (-1) \cdot (-1) + 3 \cdot (-11) + 2 \cdot 16 = -33 + 33 = 0.$$

$$\langle v, w \rangle = 5 \cdot (-1) + 1 \cdot (-11) + 1 \cdot 16 = -16 + 16 = 0.$$

Uma vez que os vetores de S são dois a dois ortogonais, conclui-se que S é um conjunto ortogonal.

Definição: Seja V um espaço euclidiano. Um conjunto $S = \{u_1, u_2, \dots, u_k\} \subset V$ é ortonormal se, e somente se:

- (i) $\|u_i\| = 1$, $\forall i = 1, 2, \dots, k$, isto é, todo vetor de S é unitário;
- (ii) $\langle u_i, u_j \rangle = 0$, para $i \neq j$, isto é, dois vetores quaisquer distintos de S são ortogonais.

Observações:

- 1) Uma definição alternativa para conjuntos ortonormais é dada pela introdução do símbolo de Kronecker:

$$\delta_{ij} = \langle u_i, u_j \rangle \Rightarrow \begin{cases} \delta_{ij} = 1, & \text{se } i = j \\ \delta_{ij} = 0, & \text{se } i \neq j \end{cases}, \quad \forall i, j = 1, 2, \dots, k.$$

- 2) Todo conjunto ortonormal é um conjunto ortogonal, mas a recíproca não é verdadeira.

Exemplos:

- 1) Considerando-se o espaço euclidiano $\mathbb{R}^3$ com o produto interno usual, sua base canônica $B = \{i, j, k\} = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ é um conjunto ortonormal, pois:

$$\|i\| = \|j\| = \|k\| = 1 \text{ e } \langle i, j \rangle = \langle i, k \rangle = \langle k, j \rangle = 0.$$

- 2) Generalizando, no espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$), com o produto interno usual, a base canônica $B = \{(1, 0, 0, \dots, 0), (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, (0, 0, \dots, 0, 1)\}$ é um conjunto ortonormal.
- 3) No espaço euclidiano $\mathbb{R}^2$, verificar quais dos conjuntos abaixo são ortonormais:

a) $S_1 = \{u_1 = (1, 2), u_2 = (-2, 1)\}$

Tem-se:

$$\langle u_1, u_2 \rangle = 1 \cdot (-2) + 2 \cdot 1 = 0;$$

portanto, os vetores são ortogonais. Por outro lado, tem-se que

$$\|u_1\| = \|u_2\| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5},$$

ou seja, os vetores não são unitários. Conclui-se, assim, que o conjunto S_1 é ortogonal, mas não é ortonormal.

b) $S_2 = \left\{ v_1 = \left(\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{2\sqrt{5}}{5} \right), v_2 = \left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{5} \right) \right\}$

Tem-se:

$$\langle v_1, v_2 \rangle = \frac{\sqrt{5}}{5} \cdot \left(-\frac{2\sqrt{5}}{5} \right) + \frac{2\sqrt{5}}{5} \cdot \frac{\sqrt{5}}{5} = -\frac{2}{5} + \frac{2}{5} = 0,$$

ou seja, os vetores são ortogonais. Por outro lado, tem-se:

$$\|v_1\| = \|v_2\| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{5}}{5} \right)^2 + \left(\frac{2\sqrt{5}}{5} \right)^2} = \sqrt{\frac{5}{25} + \frac{20}{25}} = 1,$$

isto é, os vetores são unitários. Logo, o conjunto S_2 é ortonormal.

Demonstram-se, a seguir, alguns resultados a respeito de conjuntos ortonormais.

Proposição 1: Todo subconjunto ortonormal $S = \{u_1, u_2, \dots, u_k\}$ de um espaço euclidiano V é necessariamente LI.

Demonstração:

Hipótese: $S = \{u_1, u_2, \dots, u_k\}$ é um subconjunto ortonormal de um espaço euclidiano V

Tese: S é um conjunto LI

De fato, supondo-se que $a_1u_1 + a_2u_2 + \dots + a_ku_k = 0$, sendo $a_i \in \mathbb{R}, \forall i = 1, 2, \dots, k$, vem:

$$\begin{aligned} 0 &= \langle 0, u_1 \rangle = \langle a_1u_1 + a_2u_2 + \dots + a_ku_k, u_1 \rangle = \\ &= \langle a_1u_1, u_1 \rangle + \langle a_2u_2, u_1 \rangle + \dots + \langle a_ku_k, u_1 \rangle = \\ &= a_1\langle u_1, u_1 \rangle + a_2\langle u_2, u_1 \rangle + \dots + a_k\langle u_k, u_1 \rangle = \\ &= a_1\|u_1\|^2 + a_2 \cdot 0 + \dots + a_k \cdot 0 = a_1 \cdot 1 = a_1 \end{aligned}$$

Logo, $a_1 = 0$. De modo análogo, prova-se que $a_2 = a_3 = \dots = a_k = 0$, de onde se conclui que o conjunto $S = \{u_1, u_2, \dots, u_k\}$ é LI.

Proposição 2: Seja $S = \{u_1, u_2, \dots, u_k\}$ um subconjunto de um espaço euclidiano V . Se $v \in V$ é ortogonal a todo vetor de S , então v é ortogonal a qualquer vetor do subespaço gerado por S .

Demonstração:

Hipóteses: $S = \{u_1, u_2, \dots, u_k\}$ é um subconjunto de um espaço euclidiano V ; $v \in V$ é ortogonal a todo vetor de S

Tese: v é ortogonal a todo vetor do subespaço gerado por S

Sejam $[S]$ o subespaço gerado por S e $m \in [S]$. Então, existem escalares $a_1, a_2, \dots, a_k \in \mathbb{R}$ tais que $m = a_1u_1 + a_2u_2 + \dots + a_ku_k$.

Deve-se mostrar que v é ortogonal a m , isto é, $\langle v, m \rangle = 0$. De fato, tem-se:

$$\langle v, m \rangle = \langle v, a_1u_1 + a_2u_2 + \dots + a_ku_k \rangle = a_1\langle v, u_1 \rangle + a_2\langle v, u_2 \rangle + \dots + a_k\langle v, u_k \rangle.$$

Uma vez que v é ortogonal a todo vetor de S , segue-se que $\langle v, u_i \rangle = 0, \forall i = 1, 2, \dots, k$. Conclui-se, portanto, que $\langle v, m \rangle = 0$, isto é, v é ortogonal aos vetores do subespaço gerado por S .

Proposição 3: Seja $S = \{u_1, u_2, \dots, u_k\}$ um subconjunto ortonormal de um espaço euclidiano V . Então, para todo elemento $v \in V$, o vetor

$$w = v - \langle v, u_1 \rangle u_1 - \langle v, u_2 \rangle u_2 - \dots - \langle v, u_k \rangle u_k$$

é ortogonal a todo vetor do subespaço gerado por S .

Demonstração:

Hipótese: $S = \{u_1, u_2, \dots, u_k\}$ é um subconjunto ortonormal de um espaço euclidiano V

Tese: para todo $v \in V$, o vetor $w = v - \langle v, u_1 \rangle u_1 - \langle v, u_2 \rangle u_2 - \dots - \langle v, u_k \rangle u_k$ é ortogonal a todo vetor do subespaço gerado por S .

Pela Proposição 2, basta mostrar que o vetor w é ortogonal a todo vetor de S .

Mostrar-se-á, primeiramente, que w é ortogonal a $u_1 \in S$. De fato, tem-se:

$$\begin{aligned} \langle w, u_1 \rangle &= \langle v - \langle v, u_1 \rangle u_1 - \langle v, u_2 \rangle u_2 - \dots - \langle v, u_k \rangle u_k, u_1 \rangle = \\ &= \langle v, u_1 \rangle - \langle v, u_1 \rangle \langle u_1, u_1 \rangle - \langle v, u_2 \rangle \langle u_2, u_1 \rangle - \dots - \langle v, u_k \rangle \langle u_k, u_1 \rangle = \\ &= \langle v, u_1 \rangle - \langle v, u_1 \rangle \|u_1\|^2 - \langle v, u_2 \rangle \cdot 0 - \dots - \langle v, u_k \rangle \cdot 0 = \langle v, u_1 \rangle - \langle v, u_1 \rangle = 0. \end{aligned}$$

ou seja,

$$\langle w, u_1 \rangle = 0.$$

Analogamente, prova-se que: $\langle w, u_2 \rangle = \dots = \langle w, u_k \rangle = 0$, isto é, w é ortogonal aos vetores do subespaço gerado por S .

Definição: Seja V um espaço euclidiano de dimensão finita. Uma base B de V é dita ortogonal se B for um conjunto ortogonal.

Definição: Seja V um espaço euclidiano de dimensão finita. Uma base B de V é dita ortonormal se B for um conjunto ortonormal.

Exemplo: Os conjuntos seguintes são bases ortonormais dos referidos espaços euclidianos:

a) $B = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ é uma base ortonormal do $\mathbb{R}^3$.

b) $B = \{1, t, t^2\}$ é uma base ortonormal do espaço euclidiano $P_2(\mathbb{R})$.

c) A base $B = \{u = (1, 1, 2), v = (-3, 1, 1), w = (-1, -7, 4)\}$ é uma base ortogonal do $\mathfrak{R}^3$, mas não é uma base ortonormal.

De fato, os vetores da base são ortogonais entre si, pois:

$$\langle u, v \rangle = 1 \cdot (-3) + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 0$$

$$\langle u, w \rangle = 1 \cdot (-1) + 1 \cdot (-7) + 2 \cdot 4 = 0$$

$$\langle v, w \rangle = (-3) \cdot (-1) + 1 \cdot (-7) + 1 \cdot 4 = 0.$$

Entretanto, os vetores da base não são unitários, como se mostra a seguir:

$$\|u\| = \sqrt{6}, \quad \|v\| = \sqrt{11}, \quad \|w\| = \sqrt{66},$$

ou seja, a base é ortogonal, mas não é ortonormal.

No teorema que se segue, demonstra-se o processo de ortonormalizar uma base de um espaço vetorial de dimensão finita.

Teorema 1 – Processo de Ortonormalização de Gram-Schmidt: Todo espaço euclidiano V de dimensão finita, com $\dim(V) \neq 0$, admite uma base ortonormal.

Demonstração:

Hipótese: V é um espaço euclidiano de dimensão finita, com $\dim(V) \neq 0$

Tese: V admite uma base ortonormal

Suponha-se que $\dim(V) = 1$ e que $\{u\}$ seja uma base de V ; então, o vetor $v = \frac{u}{\|u\|}$ é LI e $\|v\| = 1$. Portanto, $\{v\}$ é base ortonormal de V .

Supondo-se que $\dim(V) = 2$ e que $\{u_1, u_2\}$ seja uma base de V , considere-se o vetor

$$v_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|}.$$

Pela Proposição 3, o vetor $w_1 = u_2 - \langle u_2, v_1 \rangle v_1$ é ortogonal a v_1 .

Fazendo $v_2 = \frac{w_1}{\|w_1\|}$, segue-se que $\{v_1, v_2\}$ é base ortonormal de V .

Supondo-se, agora, que $\dim(V) = n$ e que $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ seja uma base de V , considere-se o vetor:

$$v_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|}.$$

Pela Proposição 3, o vetor $w_1 = u_2 - \langle u_2, v_1 \rangle v_1$ é ortogonal a v_1 .

Considere-se, agora, o vetor:

$$v_2 = \frac{w_1}{\|w_1\|}.$$

Pela Proposição 3, o vetor $w_2 = u_3 - \langle u_3, v_2 \rangle v_2 - \langle u_3, v_1 \rangle v_1$ é ortogonal aos vetores v_1 e v_2 .

Tomando-se o vetor:

$$v_3 = \frac{w_2}{\|w_2\|},$$

tem-se que o vetor $w_3 = u_4 - \langle u_4, v_3 \rangle v_3 - \langle u_4, v_2 \rangle v_2 - \langle u_4, v_1 \rangle v_1$ é ortogonal aos vetores v_1, v_2 e v_3 .

Continuando com esse processo, considere-se o vetor:

$$v_{n-1} = \frac{w_{n-2}}{\|w_{n-2}\|};$$

o vetor

$$w_{n-1} = u_n - \langle u_n, v_{n-1} \rangle v_{n-1} - \langle u_n, v_{n-2} \rangle v_{n-2} - \dots - \langle u_n, v_1 \rangle v_1$$

é ortogonal aos vetores $\{v_1, v_2, \dots, v_{n-1}\}$.

Considerando-se, finalmente, o vetor $v_n = \frac{w_{n-1}}{\|w_{n-1}\|}$, obtém-se a base $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ de V , a qual é ortonormal.

Exemplo: Considerando-se o produto interno usual do espaço euclidiano $\mathfrak{R}^3$, utilizar o processo de Gram-Schmidt para ortonormalizar a base $B = \{(1, 0, 0), (1, 2, 1), (1, -1, 2)\}$.

Sejam $u_1 = (1, 0, 0), u_2 = (1, 2, 1), u_3 = (1, -1, 2)$.

Uma vez que o vetor $u_1 = (1, 0, 0)$ é unitário, considera-se $v_1 = u_1 = (1, 0, 0)$.

Seja

$$w_1 = u_2 - \langle u_2, v_1 \rangle v_1,$$

isto é:

$$w_1 = (1, 2, 1) - (1 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 0 \cdot 1)(1, 0, 0) = (0, 2, 1).$$

Toma-se

$$v_2 = \frac{w_1}{\|w_1\|},$$

ou seja:

$$v_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(0, 2, 1) = \left(0, \frac{2\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{5}\right)$$

Considera-se, agora,

$$w_2 = u_3 - \langle u_3, v_2 \rangle v_2 - \langle u_3, v_1 \rangle v_1,$$

isto é,

$$\begin{aligned} w_2 &= (1, -1, 2) - \left(1 \cdot 0 + (-1) \cdot \frac{2\sqrt{5}}{5} + 2 \cdot \frac{\sqrt{5}}{5}\right) \left(0, \frac{2\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{5}\right) - (1 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 + 2 \cdot 0)(1, 0, 0) = \\ &= (1, -1, 2) - (1, 0, 0) = (0, -1, 2). \end{aligned}$$

Tomando-se, finalmente, $v_3 = \frac{w_2}{\|w_2\|}$, isto é.

$$v_3 = \frac{1}{\sqrt{5}}(0, -1, 2) = \left(0, -\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{2\sqrt{5}}{5}\right),$$

obtem-se a base ortonormal procurada:

$$B' = \left\{ (1, 0, 0), \left(0, \frac{2\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{5}\right), \left(0, -\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{2\sqrt{5}}{5}\right) \right\}.$$

Definição: Sejam: V um espaço vetorial euclidiano e W um subespaço de V . O complemento ortogonal de W é o subconjunto de V definido por:

$$W^\perp = \{v \in V / \langle v, w \rangle = 0, \forall w \in W\}.$$

Exemplos:

- 1) Seja $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / z = 0\}$ um subespaço do $\mathbb{R}^3$, ou seja, W é o plano coordenado Oxy . Determinar o complemento ortogonal de W .

Considerando-se a base $B = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0)\}$ de W , todo vetor desse espaço pode ser escrito na forma:

$$w = (x, y, 0) = x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0),$$

Por definição, o complemento ortogonal de W é:

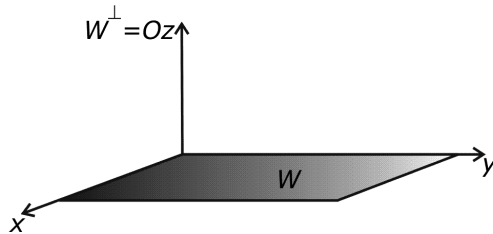
$$W^\perp = \{v = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 / \langle v, w \rangle = 0, \forall w \in W\}.$$

Considerando-se o produto interno usual do $\mathbb{R}^3$, particularmente para os vetores da base B , tem-se:

$$\langle v, w \rangle = 0 \Rightarrow \begin{cases} (a, b, c) \bullet (1, 0, 0) = 0 \Rightarrow a = 0 \\ (a, b, c) \bullet (0, 1, 0) = 0 \Rightarrow b = 0 \end{cases}.$$

Assim, todo vetor de $W^\perp$ é da forma $v = (0, 0, c)$, $\forall c \in \mathbb{R}$. Portanto, o complemento ortogonal de W é $W^\perp = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 / a = b = 0\}$, ou seja, $W^\perp$ é o eixo coordenado Oz (Figura 10.5).

Figura 10.5



- 2) Seja $W = \{p(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 \in P_2(\mathbb{R}) / a_0 + 2a_1 - 3a_2 = 0\}$ um subespaço de $P_2(\mathbb{R})$. Determinar o complemento ortogonal de W .

Por definição, o complemento ortogonal de W será:

$$W^\perp = \{q(t) = b_0 + b_1t + b_2t^2 \in P_2(\mathbb{R}) / \langle q(t), p(t) \rangle = 0, \forall p(t) \in W\}.$$

Da definição de W , tem-se que o coeficiente a_0 pode ser escrito na forma:

$$a_0 = -2a_1 + 3a_2$$

e, portanto, os vetores de W são da forma:

$$p(t) = (-2a_1 + 3a_2) + a_1t + a_2t^2, \forall a_1 \text{ e } a_2 \in \mathbb{R},$$

ou, equivalentemente,

$$p(t) = a_1(-2+t) + a_2(3+t^2).$$

O conjunto $B = \{-2+t, 3+t^2\}$ é uma base de W . Pelo produto interno usual do espaço $P_2(\mathbb{R})$, segue-se que $\langle q(t), p(t) \rangle = 0$, isto é:

$$\begin{cases} \langle b_0 + b_1t + b_2t^2, -2+t \rangle = 0 \Rightarrow -2b_0 + b_1 = 0 \Rightarrow b_1 = 2b_0 \\ \langle b_0 + b_1t + b_2t^2, 3+t^2 \rangle = 0 \Rightarrow 3b_0 + b_2 = 0 \Rightarrow b_2 = -3b_0 \end{cases}.$$

Assim, todo vetor de $W^\perp$ é da forma

$$q(t) = b_0 + 2b_0t - 3b_0t^2, \forall b_0 \in \mathbb{R}.$$

Portanto, o complemento ortogonal de W é o conjunto

$$W^\perp = \{q(t) = b_0 + b_1t + b_2t^2 \in P_2(\mathbb{R}) / b_1 = 2b_0 \text{ e } b_2 = -3b_0, \forall b_0 \in \mathbb{R}\},$$

ou seja,

$$W^\perp = \{q(t) = b_0 + 2b_0t - 3b_0t^2 \in P_2(\mathbb{R}), \forall b_0 \in \mathbb{R}\}.$$

Demonstram-se, a seguir, resultados envolvendo o complemento ortogonal $W^\perp$ de um subespaço W de um espaço euclidiano V .

Proposição 4: Sejam: V um espaço euclidiano e W um subespaço de V . Então, o complemento ortogonal $W^\perp$ é um subespaço vetorial de V .

Demonstração:

Hipótese: W é um subespaço de um espaço vetorial euclidiano V

Tese: $W^\perp$ é subespaço vetorial de V

Seja $W^\perp = \{v \in V / \langle v, w \rangle = 0, \forall w \in W\}$ o complemento ortogonal de W . Para provar que este é um subespaço vetorial de W , deve-se mostrar que:

a) $\mathbf{0} \in W^\perp$

De fato, uma vez que $\langle \mathbf{0}, w \rangle = 0$, $\forall w \in W$, segue-se que $\mathbf{0} \in W^\perp$.

b) para quaisquer elementos v_1 e v_2 em $W^\perp$, tem-se que $v_1 + v_2 \in W^\perp$

Sejam $v_1, v_2 \in W^\perp$. Então, $\langle v_1, w \rangle = 0$ e $\langle v_2, w \rangle = 0$, $\forall w \in W$. Assim, vem:

$$\langle v_1 + v_2, w \rangle = \langle v_1, w \rangle + \langle v_2, w \rangle = 0 + 0 = 0$$

e, portanto,

$$v_1 + v_2 \in W^\perp.$$

c) para qualquer v em $W^\perp$ e para qualquer número real α , tem-se que $\alpha v \in W^\perp$

Com efeito, sejam $v \in W^\perp$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Então, $\langle v, w \rangle = 0$, $\forall w \in W$. Logo,

$$\langle \alpha v, w \rangle = \alpha \langle v, w \rangle = \alpha \cdot 0 = 0, \text{ isto é, } \alpha v \in W^\perp.$$

Conclui-se, assim, que $W^\perp$ é um subespaço de V .

Proposição 5: Sejam V um espaço vetorial euclidiano, W um subespaço de V e $W^\perp$ seu complemento ortogonal. Então, $V = W \oplus W^\perp$.

Demonstração:

Hipótese: V é um espaço vetorial euclidiano e W e $W^\perp$ são subespaços vetoriais de V

Tese: $V = W \oplus W^\perp$

Para mostrar que V é soma direta de W e $W^\perp$, deve-se mostrar que são satisfeitas as seguintes condições:

a) $V = W + W^\perp$

Para mostrar essa condição, considere-se uma base ortonormal $B = \{w_1, w_2, \dots, w_k\}$ de W . Pela Proposição 3, para todo vetor $v \in V$, tem-se que o vetor

$$u = v - \langle v, w_1 \rangle w_1 - \langle v, w_2 \rangle w_2 - \dots - \langle v, w_k \rangle w_k$$

é ortogonal a todo vetor de W , ou seja, $u \in W^\perp$. Logo, o vetor

$$v = u + \langle v, w_1 \rangle w_1 + \langle v, w_2 \rangle w_2 + \dots + \langle v, w_k \rangle w_k$$

pertence ao subespaço $W + W^\perp$, o que prova que $V \subset W + W^\perp$ e, portanto, $V = W + W^\perp$.

b) $W \cap W^\perp = \{\mathbf{0}\}$

De fato, seja $w \in W \cap W^\perp$. Então, $w \in W$ e $w \in W^\perp$, ou seja,

$$\langle w, w \rangle = 0,$$

de onde se conclui que $w = \mathbf{0}$.

Portanto, $W \cap W^\perp = \{\mathbf{0}\}$.

De (a) e (b), conclui-se que $V = W \oplus W^\perp$.

Observação: na demonstração desta proposição, mostrou-se que se $B = \{w_1, w_2, \dots, w_k\}$ é uma base ortonormal de um subespaço W de um espaço vetorial euclidiano V , então todo vetor $v \in V$ pode ser escrito na forma:

$$v = u + \langle v, w_1 \rangle w_1 + \langle v, w_2 \rangle w_2 + \dots + \langle v, w_k \rangle w_k,$$

onde $u \in W^\perp$.

Ou seja, todo vetor $v \in V$ se decompõe em duas parcelas: a primeira delas é o vetor $u \in W^\perp$ e a segunda é a combinação linear dos vetores da base B , isto é, $\langle v, w_1 \rangle w_1 + \langle v, w_2 \rangle w_2 + \dots + \langle v, w_k \rangle w_k$, que pertence a W .

Essas duas parcelas são ortogonais entre si e essa decomposição é única. Esta segunda parcela é chamada *projeção ortogonal* do vetor v sobre o subespaço W e denotada por $proj_W^v$, isto é:

$$proj_W^v = \langle v, w_1 \rangle w_1 + \langle v, w_2 \rangle w_2 + \dots + \langle v, w_k \rangle w_k.$$

Exemplo: Seja $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x - z = 0\}$. Determinar a projeção ortogonal do vetor $v = (1, 1, 2)$ sobre o subespaço $W \subset \mathbb{R}^3$.

Determinar-se-á, inicialmente, uma base ortonormal de W . Observando-se que os vetores de W são da forma (x, y, x) , pode-se escrever:

$$(x, y, x) = x(1, 0, 1) + y(0, 1, 0).$$

Assim, os vetores $w_1 = (1, 0, 1)$ e $w_2 = (0, 1, 0)$ formam uma base de W , a qual será ortonormalizada utilizando-se processo de Gram-Schmidt.

Como $\|w_1\|=1$, $\|w_2\|=\sqrt{2}$ e $w_1 \perp w_2$, basta normalizar o vetor w_2 , fazendo-se:

$$\frac{w_2}{\|w_2\|} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2} \right).$$

Então, $B = \left\{ v_1 = (0, 1, 0), v_2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right\}$ é uma base ortonormal de W .

Pela observação anterior, a projeção ortogonal do vetor v sobre o subespaço W é dada por:

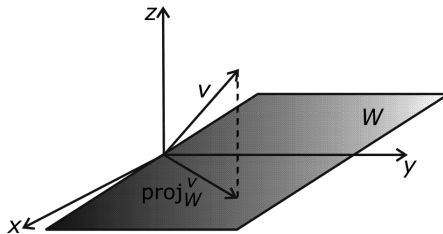
$$\text{proj}_W^v = \langle v, v_1 \rangle v_1 + \langle v, v_2 \rangle v_2,$$

isto é.

$$\begin{aligned} \text{proj}_W^v &= (1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0)(0, 1, 0) + \left(1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 \cdot 0 + 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \\ &= 1(0, 1, 0) + \frac{3\sqrt{2}}{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = (0, 1, 0) + \left(\frac{3}{2}, 0, \frac{3}{2} \right) = \left(\frac{3}{2}, 1, \frac{3}{2} \right). \end{aligned}$$

Geometricamente, o subespaço $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x - z = 0\}$ é o plano de equação $x - z = 0$. Observe-se que o vetor projeção que foi obtido pertence a esse plano, pois tem a primeira e a terceira coordenadas iguais (Figura 10.6).

Figura 10.6



Proposição 6: Sejam V um espaço vetorial euclidiano, W um subespaço de V e $W^\perp$ seu complemento ortogonal. Então, $W = (W^\perp)^\perp$.

Demonstração:

Hipótese: V é um espaço vetorial euclidiano e W e $W^\perp$ são subespaços vetoriais de V

Tese: $W = (W^\perp)^\perp$

Seja $w \in W$. Para todo $v \in W^\perp$, tem-se que $\langle w, v \rangle = 0$ e, portanto, w pertence ao complemento ortogonal de $W^\perp$, denotado por $(W^\perp)^\perp$. Conclui-se, então, que $W \subset (W^\perp)^\perp$.

Pela Proposição 5, tem-se que todo espaço euclidiano é soma direta de um subespaço com seu complemento ortogonal. Portanto, tem-se:

$$\dim(V) = \dim(W) + \dim(W^\perp) \text{ e } \dim(V) = \dim(W^\perp) + \dim(W^\perp)^\perp.$$

Logo,

$$\dim(W) + \dim(W^\perp) = \dim(W^\perp) + \dim(W^\perp)^\perp,$$

ou seja,

$$\dim(W) = \dim(W^\perp)^\perp.$$

Como $W \subset (W^\perp)^\perp$, conclui-se que $W = (W^\perp)^\perp$.

Proposição 7: Sejam V um espaço euclidiano e U e W subespaços de V . Então:

a) $(U + W)^\perp = U^\perp \cap W^\perp$.

b) $(U \cap W)^\perp = U^\perp + W^\perp$.

Demonstração:

a) **Hipótese:** U , $U^\perp$, W e $W^\perp$ são subespaços vetoriais de V

Tese: $(U + W)^\perp = U^\perp \cap W^\perp$

(i) Seja $v \in (U + W)^\perp$. Então, v é ortogonal a todo vetor $u + w \in U + W$.

Como $U \subset U + W$ e $W \subset U + W$, então v é ortogonal a todo vetor $u \in U$ e a todo vetor $w \in W$, ou seja, $v \in U^\perp$ e $v \in W^\perp$. Logo, $v \in U^\perp \cap W^\perp$, isto é, $(U + W)^\perp \subset U^\perp \cap W^\perp$.

- (ii) Por outro lado, seja $v \in U^\perp \cap W^\perp$; então, v é ortogonal a todo vetor de U e de W . Tomando-se o vetor $u + w \in U + W$, segue que:

$$\langle v, u + w \rangle = \langle v, u \rangle + \langle v, w \rangle = 0 + 0 = 0.$$

Portanto, $v \in (U + W)^\perp$, ou seja, $U^\perp \cap W^\perp \subset (U + W)^\perp$.

De (i) e (ii), conclui-se que $(U + W)^\perp = U^\perp \cap W^\perp$.

- b) A demonstração deste item será deixada para o leitor.

(Sugestão: supor que o item (a) é verdadeiro e provar o item (b).)

10.4. EXERCÍCIOS PROPOSTOS

- 1) Seja V um espaço vetorial sobre $\mathfrak{R}$. Definindo-se $\langle u, v \rangle = 0, \forall u, v \in V$, verificar se é um produto interno sobre V . R.: Sim

- 2) Considere-se um espaço vetorial euclidiano V e a aplicação definida por:

$$u \otimes v = a \langle u, v \rangle, \forall u, v \in V \text{ e } \forall a \in \mathfrak{R}_+^*.$$

Verificar se $u \otimes v$ define um produto interno sobre V .

R.: Sim

- 3) Sejam u e v vetores de um espaço vetorial euclidiano, tais que $\|u\| = \|v\| = 1$ e $\|u - v\| = 2$. Determinar $\langle u, v \rangle$. R.: $\langle u, v \rangle = -1$

- 4) Sejam $e_1, e_2, \dots, e_r$ vetores unitários de um espaço euclidiano, tais que $\|e_i - e_j\| = 1, \forall i \neq j$. Calcular o ângulo entre dois vetores e_i e e_j .

$$\text{R.: } \theta = \frac{\pi}{3} \text{ rad}$$

- 5) Seja $T(x, y, z, t) = (x + y, y + z + t, x + 2y + z + t, x - z - t)$ uma transformação linear. Determinar uma base ortonormal para $\text{Ker}(T)$.

$$\text{R.: } B = \left\{ \left(0, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right), \left(-\frac{\sqrt{10}}{5}, \frac{\sqrt{10}}{5}, -\frac{\sqrt{10}}{10}, -\frac{\sqrt{10}}{10} \right) \right\}$$

- 6) Seja $W = \{a_0 + a_1t + a_2t^2 \in P_2(\mathfrak{R}) / a_0 - a_1 + a_2 = 0\}$ um subespaço de $P_2(\mathfrak{R})$. Determinar uma base ortonormal de W .

$$\text{R.: } B = \left\{ \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}t, -\frac{\sqrt{6}}{6} + \frac{\sqrt{6}}{6}t + \frac{\sqrt{6}}{3}t^2 \right\}$$

- 7) Considere-se o subespaço $W = \{(x, y, z, t) \in \mathfrak{R}^4 / x + y = 0 \text{ e } 2x + z = y\} \subset \mathfrak{R}^4$. Determinar uma base ortonormal de W e de $W^\perp$.

$$\text{R.: Base de } W: B = \left\{ (0, 0, 0, 1), \left(-\frac{\sqrt{11}}{11}, \frac{\sqrt{11}}{11}, \frac{3\sqrt{11}}{11}, 0 \right) \right\}$$

$$\text{Base de } W^\perp: B' = \left\{ \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0, 0 \right), \left(\frac{3\sqrt{22}}{22}, -\frac{3\sqrt{22}}{22}, \frac{\sqrt{22}}{11}, 0 \right) \right\}$$

- 8) Determinar a projeção ortogonal do vetor $p(t) = 1 + t - t^3 \in P_3(\mathfrak{R})$ sobre o subespaço

$$W = \{a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3 \in P_3(\mathfrak{R}) / a_0 - a_1 - a_2 = 0 \text{ e } a_2 - 2a_3 = 0\} \subset P_3(\mathfrak{R}).$$

$$\text{R.: } \text{proj}_W^v = \frac{6}{7} + \frac{8}{7}t - \frac{2}{7}t^2 - \frac{1}{7}t^3$$

11

EXERCÍCIOS GERAIS

- 1) Mostrar que, para qualquer escalar k e quaisquer vetores u e v ,
 $k(u - v) = ku - kv$.
- 2) Sejam: $X \subset \mathfrak{R}$ um conjunto não vazio e um corpo K . Mostrar que o conjunto V das funções definidas em X e tomando valores em K , munido das operações:
 - (i) $(f + g)(x) = f(x) + g(x), \forall f, g \in V, \forall x \in X$
 - (ii) $(kf)(x) = kf(x), \forall f \in V, \forall k \in K, \forall x \in X$
 é um espaço vetorial sobre K .
- 3) Mostrar que o conjunto $V = \{(a, b) / a, b \in \mathfrak{R}\}$ não é um espaço vetorial sobre $\mathfrak{R}$, em relação a cada uma das operações de adição e multiplicação por escalar em V , definidas a seguir:
 - a) $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$ e $k(a, b) = (ka, b)$.
 - b) $(a, b) + (c, d) = (a, b)$ e $k(a, b) = (ka, kb)$.
 - c) $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$ e $k(a, b) = (k^2a, k^2b)$.
- 4) Mostrar que W é subespaço de $\mathfrak{R}^3$, em cada um dos casos seguintes:
 - a) $W = \{(a, b, 0) / a, b \in \mathfrak{R}\}$.
 - b) $W = \{(a, b, c) / a + b + c = 0\}$.
- 5) Escrever o vetor $u = (1, -2, 5)$ como combinação linear dos vetores:
 $v_1 = (1, 1, 1); v_2 = (1, 2, 3); v_3 = (2, -1, 1)$. $R.: u = -6v_1 + 3v_2 + 2v_3$
- 6) Seja V o espaço vetorial real das funções $f : \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$.
 - a) Considerando-se $f(t) = e^{2t}$, $g(t) = t^3$ e $h(t) = t$, pergunta-se: os vetores $\{f, g, h\}$ são LI ou LD? $R.: LI$
 - b) O conjunto $\{e^t, e^{2t}\}$ é LI ou LD? $R.: LI$

- 7) Se os vetores u , v e w são LI, mostrar que são LI:
- $\{u+v, u-v, u-2v+w\}$.
 - $\{u, u+v, u+v+w\}$.
- 8) Demonstrar que: $u+v$ e $u-v$ são LI $\Leftrightarrow u$ e v são LI.
- 9) Considerando-se o espaço vetorial real $\mathfrak{R}^3$, pergunta-se: os vetores $v_1=(1,1,0)$; $v_2=(2,1,1)$ e $v_3=(4,3,1)$ são LD ou LI? R.: LD
- 10) Considerem-se o espaço vetorial complexo $\mathcal{C}$ sobre o corpo K e os vetores i e $i-1$.
- Mostrar que esses vetores são LD, quando se considera $\mathcal{C}$ como um espaço vetorial sobre o corpo $K=\mathcal{C}$.
 - Mostrar que esses vetores são LI, quando se considera $\mathcal{C}$ como um espaço vetorial sobre o corpo $K=\mathfrak{R}$.
- 11) Seja $P_3(\mathfrak{R})$ o espaço vetorial dos polinômios de grau menor ou igual a 3 com coeficientes reais. Verificar se são LI ou LD os vetores: $u=t^3-3t^2+5t+1$; $v=2t^3-4t^2+9t+5$ e $w=t^3-t^2+8t+2$. R.: LI
- 12) Sejam $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ vetores LI. Se u é combinação linear desses vetores, isto é, se $u=a_1e_1+a_2e_2+\dots+a_ne_n$, demonstrar que essa representação é única.
- 13) Escrever a matriz $A=\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ como combinação linear das seguintes matrizes:

$$M_1=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}; M_2=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}; M_3=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad \text{R.: } A=2M_1-M_2+2M_3$$

- 14) Determinar uma base e a dimensão do espaço das soluções (S^*) do sistema linear

$$(S): \begin{cases} x - y - z - t = 0 \\ 2x + y + t = 0. \\ z - t = 0 \end{cases} \quad \text{R.: base: } B=\{1, -5, 3, 3\}; \text{Dim}(S^*)=1$$

15) Verificar se os seguintes conjuntos de vetores formam uma base do $\mathfrak{R}^3$:

a) $\{(1,1,1), (1,-1,5)\}$. R.: não

b) $\{(1,2,3), (1,0,-1), (3,-1,0), (2,1,-2)\}$. R.: não

c) $\{(1,1,1), (1,2,3), (2,-1,1)\}$. R.: sim

d) $\{(1,1,2), (1,2,5), (5,3,4)\}$. R.: não

16) Seja W o subespaço do $\mathfrak{R}^4$ gerado pelos vetores $(1,-2,5,-3)$; $(2,3,1,-4)$ e $(3,8,-3,-5)$.

a) Encontrar uma base e a dimensão de W .

$$\text{R.: } \{(1,-2,5,-3), (0,7,-9,2)\}; \text{ Dim}(W) = 2$$

b) Estender a base de W para uma base do $\mathfrak{R}^4$.

$$\text{R.: } \{(1,-2,5,-3), (0,7,-9,2), (0,0,1,0), (0,0,0,1)\}$$

17) Considere-se o espaço vetorial real $P_3(\mathfrak{R})$ de todos os polinômios com coeficientes reais de grau menor ou igual a 3. Determinar as coordenadas do polinômio $p(t) = 1 + 2t - t^3$ em relação:

a) à base canônica de $P_3(\mathfrak{R})$. $\text{R.: } [p(t)]_C = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

b) à base $B = \{1, 1-t, 1-t^2, 1-t^3\}$. $\text{R.: } [p(t)]_B = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

18) Seja $\mathcal{C}$ o espaço vetorial complexo sobre o corpo $K = \mathfrak{R}$. Determinar as coordenadas do vetor $z = 1 - 2i$ em relação à base $B = \{1-i, 1+i\}$.

$$\text{R.: } [z]_B = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

- 19) A matriz de mudança de uma base B do $\mathfrak{R}^2$ para a base $\{(1,1), (0,2)\}$ deste mesmo espaço é $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$. Determinar a base B .

$$\text{R.: } B = \left\{ \left(1, -\frac{1}{3} \right), \left(0, \frac{2}{3} \right) \right\}$$

- 20) Encontrar a dimensão e uma base do espaço de soluções do sistema:

$$\begin{cases} x + 2y + 2z - s + 3t = 0 \\ x + 2y + 3z + s + t = 0 \\ 3x + 6y + 8z + s + 5t = 0 \end{cases} \quad \text{R.: } \{(-2, 1, 0, 0), (5, 0, -2, 1, 0), (-7, 0, 2, 0, 1)\}$$

- 21) Determinar quais subconjuntos de $\mathfrak{R}^n$ são subespaços:

a) $\{(x_1, x_2, \dots, x_n) / x_1 \geq 0\}$. R.: não

b) $\{(x_1, x_2, \dots, x_n) / x_1 + 2x_2 = 0\}$. R.: sim

c) $\{(x_1, x_2, \dots, x_n) / x_1 + 2x_2 = 1\}$. R.: não

- 22) Demonstrar que W não é subespaço vetorial do espaço vetorial $M_2(\mathfrak{R})$ das matrizes de ordem 2 sobre $\mathfrak{R}$, onde:

a) W consiste de todas as matrizes cujo determinante é nulo.

b) W consiste de todas as matrizes A para as quais $A^2 = A$.

- 23) Sejam $U = \{(a, b, c) / a + b + c = 0\}$, $V = \{(a, b, c) / a - c = 0\}$, $W = \{(0, 0, c) / c \in \mathfrak{R}\}$ subespaços do $\mathfrak{R}^3$. Demonstrar que são verdadeiras as somas abaixo. Quando a soma é direta?

a) $\mathfrak{R}^3 = U + V$. R.: não é soma direta

b) $\mathfrak{R}^3 = U + W$. R.: é soma direta

c) $\mathfrak{R}^3 = V + W$. R.: é soma direta

- 24) Seja $M \subset \mathfrak{R}^4$ tal que $M = [(1, 1, 1, 0), (1, 2, 3, 4)]$. Calcular a dimensão de M e determinar uma base do $\mathfrak{R}^4$ que contenha uma base de M .

$$\text{R.: } \dim(M) = 2; \text{ base: } \{(0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (1, 1, 1, 0), (1, 2, 3, 4)\}$$

25) Mostrar que: $\left[(1, 1, 0, 0), (1, 0, 1, 1) \right] = \left[(2, -1, 3, 3), (0, 1, -1, -1) \right]$.

26) Sejam $V = \left[(1, 2, 1, 3), (2, 0, 2, 0), (-4, 4, -4, 6) \right]$ e $W = \left[(1, 0, 1, 0), (0, 2, 0, 3) \right]$ subconjuntos do $\mathfrak{R}^4$. Mostrar que V e W geram o mesmo subespaço.

27) Considere-se o espaço vetorial $P_n(\mathfrak{R})$ dos polinômios de grau menor ou igual a n com coeficientes reais. Sejam:

$$W_1 = \{p(x) \in P_n(\mathfrak{R}) / p(1) = 0\} \text{ e } W_2 = \{p(x) \in P_n(\mathfrak{R}) / p(2) = 0\}.$$

Determinar $W_1 \cap W_2$ e $W_1 + W_2$.

28) Considere-se o corpo $\mathfrak{R}$ dos números reais como espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{Q}$ dos números racionais. Mostrar que os conjuntos $\{1, \sqrt{2}, \sqrt{3}\}$ e $\{2 - \sqrt{2}, 4 + \sqrt{2}, 3 - \sqrt{3}\}$ geram o mesmo subespaço de $\mathfrak{R}$.

29) Considerem-se os seguintes subespaços do $\mathfrak{R}^4$: $U = \{(a, b, c, d) / b + c + d = 0\}$ e $W = \{(a, b, c, d) / a + d = 0 \text{ e } c = 2d\}$. Calcular uma base e a dimensão dos subespaços: U , W , $U + W$ e $U \cap W$.

$$\text{R.: base de } U: \{(1, 0, 0, 0), (0, -1, 1, 0), (0, -1, 0, 1)\}; \dim(U) = 3;$$

$$\text{base de } W: \{(0, 1, 0, 0), (-1, 0, 2, 1)\}; \dim(W) = 2;$$

$$\text{base de } U + W: \{(1, 0, 0, 0), (0, -1, 1, 0), (0, 0, -1, 1), (0, 0, 0, 1)\}; \dim(U + W) = 4;$$

$$\text{base de } U \cap W: \{(-1, -3, 2, 1)\}; \dim(U \cap W) = 1.$$

30) Determinar as coordenadas do vetor $u = (2, 1, 4) \in \mathfrak{R}^3$ em relação às bases:

a) canônica.
$$\text{R.: } [u]_C = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

b) $B = \{(1, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 0, -1)\}$.
$$\text{R.: } [u]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

- 31) Determinar as coordenadas da matriz $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathfrak{R})$ em relação à base:

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \right\}. \quad \text{R.: } [p(t)]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ \frac{5}{4} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

- 32) Determinar a matriz de mudança da base $B = \{(1,1,0), (0,1,0), (0,0,3)\}$

para a base canônica do $\mathfrak{R}^3$.
$$\text{R.: } [M]_C^B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

- 33) Considerem-se as bases $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ e $C = \{g_1, g_2, g_3\}$ do $\mathfrak{R}^3$, relacionadas da seguinte forma:

$$\begin{cases} g_1 = e_1 + e_3 \\ g_2 = 2e_1 + e_2 + e_3 \\ g_3 = e_1 + 2e_2 + e_3 \end{cases}$$

Determinar a matriz de mudança da base B para C e de C para B .

$$\text{R.: } [M]_C^B = P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}; [M]_B^C = P^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 1 & 0 & -1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

- 34) Considere-se o espaço vetorial $P_2(\mathfrak{R})$ dos polinômios de grau menor ou igual a 2 com coeficientes reais. A matriz de mudança da base $B = \{1+t, 1-t^2\}$ para uma base C desse espaço é $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Determinar a base C .

$$\text{R.: } C = \{2, 1+3t\}$$

- 35) Verificar quais das aplicações abaixo são transformações lineares:

a) $T: \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}^2$, definida por $T(x, y) = (x + y, x)$. R.: sim

b) $T: \mathfrak{R}^3 \rightarrow \mathfrak{R}$, definida por $T(x, y, z) = 2x - 3y + 4z$. R.: sim

c) $T: \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}$, definida por $T(x, y) = xy$. R.: não

36) Seja $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ a transformação linear tal que $T(1,1)=3$ e $T(0,1)=2$.

Determinar a expressão de $T(x,y)$.

$$\text{R.: } T(x,y) = x + 2y$$

37) Seja $T: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ a transformação linear definida por:

$$T(x,y,z,t) = (x - y + z + t, x + 2z - t, x + y + 3z - t).$$

Encontrar uma base e a dimensão de:

a) $\text{Im}(T)$. $\text{R.: base: } B = \{(1,1,1), (0,1,2), (0,0,2)\}; \dim(\text{Im}(T)) = 3$

b) $\text{Ker}(T)$. $\text{R.: base: } B = \{(-2, -1, 1, 0)\}; \dim(\text{Ker}(T)) = 1$

38) Determinar a expressão da transformação linear $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que:

$$T(1,1,1) = (2,2), T(1,0,1) = (1,1) \text{ e } T(1,0,-1) = (1,-1).$$

$$\text{R.: } T(x,y,z) = (x+y, y+z)$$

39) Seja $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ o operador linear definido por:

$$T(x,y,z) = (x + 2y - z, y + z, x + y - 2z)$$

Encontrar uma base e a dimensão de:

a) $\text{Im}(T)$. $\text{R.: base: } B = \{(1,0,1), (0,1,-1)\}; \dim(\text{Im}(T)) = 2$

b) $\text{Ker}(T)$. $\text{R.: base: } B = \{(3, -1, 1)\}; \dim(\text{Ker}(T)) = 1$

40) Determinar uma transformação linear $T: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ cujo núcleo é gerado pelos vetores $(1,2,3,4)$ e $(0,1,1,1)$.

$$\text{R.: } T(x,y,z,t) = (0, -x - y + z, -x + y + z)$$

41) Determinar uma transformação linear $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ cuja imagem é gerada pelos vetores $(1,2,3)$ e $(4,5,6)$.

$$\text{R.: } T(x,y,z) = (x + 4y, 2x + 5y, 3x + 6y)$$

42) Sejam $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ e $G: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ transformações lineares definidas por:

$$F(x,y,z) = (2x, y+z) \text{ e } G(x,y,z) = (x-y, y)$$

Encontrar as expressões que definem as transformações:

$$\text{a) } F + G. \quad \text{R.: } (F + G)(x, y, z) = (3x - y, 2y + z)$$

$$\text{b) } 3F. \quad \text{R.: } (3F)(x, y, z) = (6x, 3y + 3z)$$

$$\text{c) } 2F - 5G. \quad \text{R.: } (2F - 5G)(x, y, z) = (-x + 5y, -3y + 2z)$$

43) Sejam $F: \mathfrak{R}^3 \rightarrow \mathfrak{R}^2$ e $G: \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}^2$ transformações lineares definidas por:

$$F(x, y, z) = (2x, y + z) \text{ e } G(x, y) = (y, x)$$

Determinar, se possível, as expressões de: $F \circ G$ e $G \circ F$.

$$\text{R.: } (G \circ F)(x, y, z) = (y + z, 2x); F \circ G \text{ não está definida}$$

44) Sejam $F: \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}^2$ e $G: \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}^2$ transformações lineares definidas por:

$$F(x, y) = (x - y, x) \text{ e } G(x, y) = (x, 0)$$

Determinar, se possível, as expressões de:

$$\text{a) } 2F + 3G. \quad \text{R.: } (2F + 3G)(x, y) = (5x - 2y, 2x)$$

$$\text{b) } F \circ G. \quad \text{R.: } (F \circ G)(x, y) = (x, x)$$

$$\text{c) } G \circ F. \quad \text{R.: } (G \circ F)(x, y) = (x - y, 0)$$

$$\text{d) } F^2. \quad \text{R.: } (F^2)(x, y) = (-y, x - y)$$

$$\text{e) } G^2. \quad \text{R.: } (G^2)(x, y) = (x, 0)$$

45) Determinar a representação matricial de cada um dos seguintes operadores do $\mathfrak{R}^2$, em relação às bases indicadas:

$$\text{a) } T(x, y) = (2x, 3y - x); \text{ base canônica do } \mathfrak{R}^2.$$

$$\text{R.: } [T]_C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } T(x, y) = (3x - 4y, x + 5y); \text{ base } B = \{(1, 2), (2, 3)\}.$$

$$\text{R.: } [T]_B = \begin{pmatrix} 37 & 52 \\ -21 & -29 \end{pmatrix}$$

46) Determinar o operador linear $T: \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}^2$ cuja matriz em relação à base

$$B = \{(1, 1), (1, 2)\} \text{ é } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$\text{R.: } T(x, y) = (2x, 2x + y)$$

47) Seja T o operador linear $T: \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}^2$ cuja matriz em relação à base

$$B = \{(1,1), (1,-1)\} \text{ é } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}. \text{ Determinar a matriz de } T \text{ em relação à base canônica do } \mathfrak{R}^2.$$

$$\text{R.: } [T]_C = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

48) Sejam $F: \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}^3$ e $G: \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}^3$ transformações lineares tais que $F(x, y) = (x, x - y, 2y)$ e que a matriz de $F + G$ em relação às bases canônicas do $\mathfrak{R}^2$ e $\mathfrak{R}^3$ é

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}. \text{ Determinar a matriz de } G \text{ em relação a essas bases e a expressão da } G(x, y).$$

$$\text{R.: } [G] = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}; G(x, y) = (x + y, -x + 2y, 3x + y)$$

49) Considere-se o espaço vetorial $M_2(\mathfrak{R})$ das matrizes de ordem 2 sobre $\mathfrak{R}$.

Sejam: $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ um elemento desse espaço e $T: M_2(\mathfrak{R}) \rightarrow M_2(\mathfrak{R})$

a transformação linear definida por $T(A) = MA$, $\forall A \in M_2(\mathfrak{R})$. Encontrar uma base e a dimensão de:

a) $\text{Ker}(T)$. $\text{R.: base: } B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}; \dim(\text{Ker}(T)) = 2$

b) $\text{Im}(T)$. $\text{R.: base: } B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \right\}; \dim(\text{Im}(T)) = 2$

50) Mostrar, em cada caso, que o operador linear $T: \mathfrak{R}^3 \rightarrow \mathfrak{R}^3$ é inversível e determinar uma expressão para T^{-1} :

a) $T(x, y, z) = (x - 3y - 2z, y - 4z, z)$.

$$\text{R.: } T^{-1}(x, y, z) = (x + 3y + 14z, y + 4z, z)$$

$$\text{b) } T(x, y, z) = (x + z, x - z, y).$$

$$\text{R.: } T^{-1}(x, y, z) = \left(\frac{x+y}{2}, z, \frac{x-y}{2} \right)$$

51) Determinar quais dos operadores lineares $T: \mathfrak{R}^3 \rightarrow \mathfrak{R}^3$ são automorfismos:

$$\text{a) } T(x, y, z) = (x - 3y - 2z, y - 4z, z). \quad \text{R.: sim}$$

$$\text{b) } T(x, y, z) = (x, x - y, 2x + y - z). \quad \text{R.: sim}$$

52) Considere-se o operador linear $T: \mathfrak{R}^3 \rightarrow \mathfrak{R}^3$ satisfazendo as seguintes condições:

$$T(1, 0, 0) = (1, 1, 1), \quad T(0, 1, 0) = (1, 0, 1) \quad \text{e} \quad T(0, 1, 2) = (0, 0, 4)$$

Pergunta-se: T é um isomorfismo? Caso seja, determinar o isomorfismo inverso.

$$\text{R.: sim; } T^{-1}(x, y, z) = \left(y, \frac{3x - 4y + z}{4}, \frac{-x + z}{2} \right)$$

53) Seja $T: P_2(\mathfrak{R}) \rightarrow M_2(\mathfrak{R})$ tal que $T(a_0 + a_1t + a_2t^2) = \begin{pmatrix} a_0 & a_0 + a_1 \\ a_1 & a_1 + a_2 \end{pmatrix}$. De-

terminar a matriz de T em relação à base $\{1, 1+t, 2+t^2\}$ do espaço $P_2(\mathfrak{R})$

e à base $\left\{ \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \right\}$ do espaço $M_2(\mathfrak{R})$.

$$\text{R.: } P = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 \\ \frac{3}{2} & \frac{5}{2} & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

54) Sejam $B = \{e_1, e_2\}$ uma base do espaço vetorial V e $T: V \rightarrow V$ o operador linear para o qual se têm: $T(e_1) = 3e_1 - 2e_2$ e $T(e_2) = e_1 + 4e_2$. Se $C = \{f_1, f_2\}$ é uma base de V para a qual se têm $f_1 = e_1 + e_2$ e $f_2 = 2e_1 + 3e_2$, encontrar a

$$\text{matriz de } T \text{ em relação à base } C. \quad \text{R.: } \begin{pmatrix} 8 & 11 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

55) Encontrar todos os autovalores e uma base para cada um dos autoespaços seguintes:

a) $T: \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}^2$, definido por: $T(x, y) = (3x + 3y, x + 5y)$.

R.: $\lambda_1 = 2$; base de $V(\lambda_1)$: $B_1 = \{(3, -1)\}$; $\lambda_2 = 6$; base de $V(\lambda_2)$: $B_2 = \{(1, 1)\}$

b) $T: \mathfrak{R}^3 \rightarrow \mathfrak{R}^3$, definido por: $T(x, y, z) = (x + y + z, 2y + z, 2y + 3z)$.

R.: $\lambda_1 = 1$; base de $V(\lambda_1)$: $B_1 = \{(1, 0, 0), (0, -1, 1)\}$; $\lambda_2 = 4$;

base de $V(\lambda_2)$: $B_2 = \{(1, 1, 2)\}$

56) Para cada matriz abaixo, encontrar todos os autovalores e os autovetores:

a) $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

R.: $\lambda_1 = 1$; $v_1 = (2, -1)$; $\lambda_2 = 4$; $v_2 = (1, 1)$

b) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

R.: $\lambda_1 = 2$; $v_1 = (1, -1, 0)$ e $v_2 = (1, 0, -1)$; $\lambda_2 = 6$; $v_3 = (1, 2, 1)$

57) Mostrar que o operador linear $T: \mathfrak{R}^3 \rightarrow \mathfrak{R}^3$ cuja matriz é dada por

$\begin{pmatrix} -9 & 4 & 4 \\ -8 & 3 & 4 \\ -16 & 8 & 7 \end{pmatrix}$ é diagonalizável e exibir sua matriz na forma diagonal.

R.: $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

58) Verificar quais dos operadores lineares abaixo é diagonalizável. Exibir a matriz dos que forem diagonalizáveis em relação à base de autovetores.

a) $T(x, y, z) = (2x + z, x + 2y - z, 2x + 3z)$.

R.: é diagonalizável; $[T]_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, ou $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \dots$

$$b) T(a_0 + a_1 t) = (8a_0 - 6a_1) + (9a_0 - 7a_1)t.$$

$$R.: \text{ é diagonalizável; } [T]_B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

59) Considere-se o operador linear $T: M_2(TS) \rightarrow M_2(TS)$, onde $M_2(TS)$ é o espaço vetorial das matrizes triangulares superiores de ordem 2, cuja

base canônica é $C = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$. Mostrar que o operador

linear $T \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a & 3b \\ 0 & -a + 3b + c \end{pmatrix}$ é diagonalizável e exibir sua matriz

em relação à base de autovetores.

$$R.: \text{ é diagonalizável; } [T]_B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

60) Verificar quais dos operadores lineares abaixo é diagonalizável. Exibir a matriz dos que forem diagonalizáveis em relação à base de autovetores.

$$a) T(x, y, z) = (x + y + z, x + y - z, x - y - z).$$

$$R.: \text{ é diagonalizável; } [T]_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{ ou } \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \dots$$

$$b) T(x, y) = \left(\frac{6x - y}{4}, \frac{2x + 3y}{4} \right).$$

$$R.: \text{ é diagonalizável; } T[\]_B = \begin{pmatrix} \frac{5}{4} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{5}{4} \end{pmatrix}$$

$$c) T(x, y, z) = (-2x + 5y - z, 3y - 2z, z).$$

R.: não é diagonalizável

d) $T(x, y, z) = (x + 2y + 3z, 2x + y + 2z, 3x + 3y + z).$

$$\text{R.: é diagonalizável; } [T]_B = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{ou } \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \dots$$

e) $T(a_0 + a_1t + a_2t^2) = (a_0 + a_1 + a_2) + (a_0 + a_1 - a_2)t + (-a_0 + a_1 + 3a_2)t^2.$

$$\text{R.: é diagonalizável; } [T]_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

61) Em um espaço vetorial euclidiano, provar que:

a) $\|u\| = \|v\| \Leftrightarrow \langle u + v, u - v \rangle = 0.$

b) $\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 \Leftrightarrow \langle u, v \rangle = 0.$

c) $\langle u, v \rangle = \frac{1}{4}(\|u + v\|^2 - \|u - v\|^2).$

62) Sejam u e v vetores de um espaço vetorial euclidiano. Mostrar que $\{u, v\}$ é LD se, e somente se, $|\langle u, v \rangle| = \|u\|\|v\|.$

63) Sejam u e v vetores de um espaço vetorial euclidiano. Provar que $\langle u, v \rangle = 0$ se, e somente se, $\|u + \alpha v\| \geq \|u\|, \forall \alpha \in \mathbb{R}.$

64) Usar a desigualdade de Cauchy-Schwarz no espaço euclidiano $\mathbb{R}^2$, com o produto interno usual, para mostrar que, para quaisquer números reais estritamente positivos x e y , é verdadeira a desigualdade: $(x + y)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) \geq 4.$

65) Sejam u e v dois vetores LI do $\mathbb{R}^3$. Mostrar que existem dois, e apenas dois, vetores de norma igual a 1 que são ortogonais simultaneamente a u e a v .

- 66) Seja W um subespaço de um espaço euclidiano de dimensão finita V . Considere-se um vetor $v \in V$, o qual pode ser escrito na forma $v = w + w'$, com $w \in W$ e $w' \in W^\perp$. Mostrar que a aplicação $T: V \rightarrow V$, definida por $T(v) = w - w'$ é um operador linear que satisfaz a seguinte propriedade $\langle u, T(v) \rangle = \langle T(v), u \rangle$, $\forall u, v \in V$.
- 67) Seja V um espaço euclidiano de dimensão finita e T a projeção ortogonal de V sobre o subespaço W de V . Mostrar que o operador linear T satisfaz a seguinte propriedade $\langle T(u), v \rangle = \langle u, T(v) \rangle$, $\forall u, v \in V$.

BIBLIOGRAFIA

ALENCAR FILHO, E. *Iniciação à lógica matemática*. 16. ed. São Paulo: Nobel, 1988. 203 p.

———. *Teoria elementar dos números*. São Paulo: Nobel, 1981. 386 p.

ANTON, H. *Álgebra linear com aplicações*. 8. ed. Porto Alegre: Bookman, 2001. 572 p.

BIANCHINI, E.; PACCOLA, H. *Matemática*. V. 2. São Paulo: Moderna, 1995. 330 p.

CALLIOLI, C. A.; DOMINGUES, H. H.; COSTA, R. C. F. *Álgebra linear e aplicações*. 5. ed. São Paulo: Atual, 1987. 332 p.

CARVALHO, J. P. *Álgebra linear – introdução*. 2. ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 1977. 176 p.

CASTRUCCI, B. *Introdução à lógica matemática*. São Paulo: Nobel, 1975.

HOFFMAN, K.; KUNZE, R. *Álgebra linear*. 2. ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 1979. 514 p.

LANG, S. *Álgebra linear*. 4. ed. São Paulo: Edgard Blücher Ltda, 1977. 271 p.

LIARD, L. *Lógica*. 5. ed. São Paulo: Companhia Editora Nacional, 1963. 211 p.

LIPSCHUTZ, S. *Álgebra linear: teoria e problemas*. 3. ed. São Paulo: Makron Books, 1994. 647 p. (Coleção Schaum)

MONTEIRO, L. H. J. *Elementos de álgebra*. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 1974. 552 p.

———. *Álgebra linear*. 5. ed. São Paulo: Nobel, 1969. 273 p.

NOBLE, B.; DANIEL, J. W. *Álgebra linear aplicada*. 2. ed. Rio de Janeiro: Prentice-Hall do Brasil, 1986. 378 p.

SILVA, A. F.; SANTOS, C. M. *Aspectos formais da computação*. São Paulo: Pró-reitoria de Graduação da Unesp – Cultura Acadêmica, 2009. 395 p.

STEINBRUCH, A.; WINTERLE, P. *Álgebra linear*. 2. ed. São Paulo: McGraw-Hill, 1987. 583 p.

