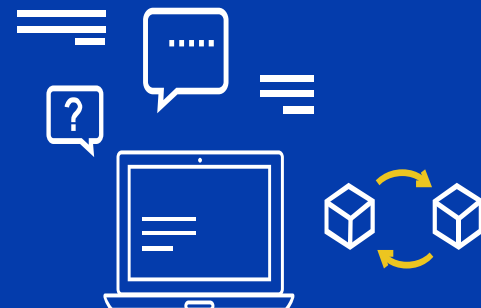




José Antonio Farias Coelho

ÁLGEBRA LINEAR

AUTOR



Graduado em Tecnologia da Construção Civil pela Universidade Estadual Vale do Acaraú (1990), cursou MBA em Comércio eletrônico na Universidade de Fortaleza (2004), Cursou especialização em Gestão de APL na Universidade de Fortaleza (2010), cursou Mestrado Acadêmico em Administração de Empresas na UECE (2013). Atualmente cursa Especialização em Metodologia do Ensino da Matemática na Estácio (2016).

Professor do Centro Universitário Estácio do Ceará em cursos de graduação nas áreas de engenharia e arquitetura e pós-graduação. Presidente da Comissão organizadora da Semana de Engenharia da Unidade Centro do Centro Universitário Estácio do Ceará. Focal responsável pelo projeto Game Center do Centro Universitário Estácio do Ceará, membro da Comissão própria de Avaliação – CPA.

PREFÁCIO



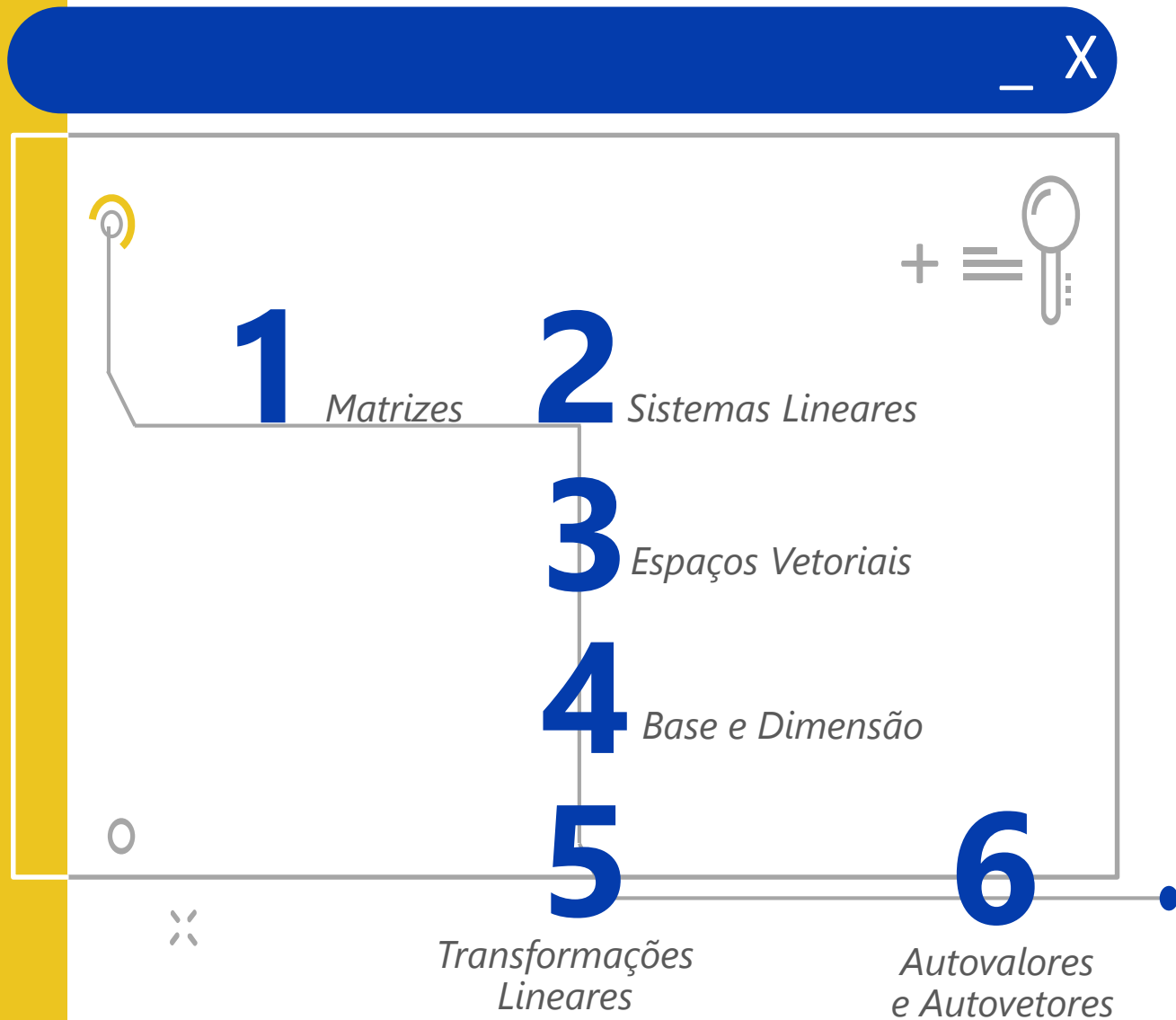
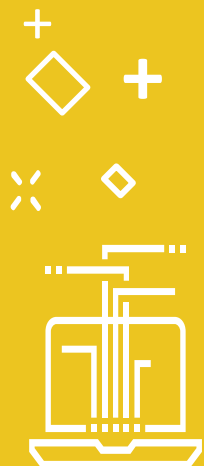
O conhecimento de Álgebra Linear possui uma importância marcante na conceituação, descrição e resolução de problemas das diversas áreas da Engenharia e Matemática.

O seu aprendizado, garante maturidade teórica, sendo utilizada como ferramenta explícita nas disciplinas mais avançadas dos cursos e na solução de problemas no mundo real, tornando-a assim, uma disciplina básica e imprescindível no ensino de qualquer área.

Com este livro buscamos propiciar ao leitor compreender os conceitos da Álgebra Linear com aplicação a espaços n -dimensionais, e soluções de problemas e sistemas matriciais com aplicações concretas em engenharia, matemática e áreas afins.

Formatamos este livro em um conteúdo resumido, mas, didaticamente apresentado, na busca de facilitar a compreensão do leitor, contudo longe de ser o recurso final do aprendizado desta disciplina, que é ao mesmo tempo bela e complexa.

SUMÁRIO



MATRIZES

The background of the slide features a stylized image of a suspension bridge tower, specifically the Christ the Redeemer tower in Rio de Janeiro. The tower is a grey, H-shaped structure. From the top of the tower, numerous white cables radiate outwards in all directions, creating a starburst effect against the dark blue background. The top of the slide has a blue header with white diagonal stripes on the right side.

AULA 1

MATRIZES; OPERAÇÕES E DETERMINANTES

MATRIZES

Uma matriz pode ser vista como uma planilha de dados da qual podemos extrair ou incluir informações relativas a problemas de natureza prática.

Veja no exemplo a seguir uma planilha com dados relativos à quantidade de material empregada na construção de três estilos de casa: moderno, mediterrâneo e colonial.

	Ferro	Madeira	Vidro	Tinta	Tijolo
Moderno	5	20	16	7	17
Mediterrâneo	7	18	12	9	21
Colonial	6	25	8	5	13

Observamos na tabela que se o construtor deseja construir uma casa com estilo mediterrâneo ele necessitará de: 7 unidades de ferro; 18 de madeira; 12 de vidro; 9 de tinta e 21 de tijolo.

MATRIZES

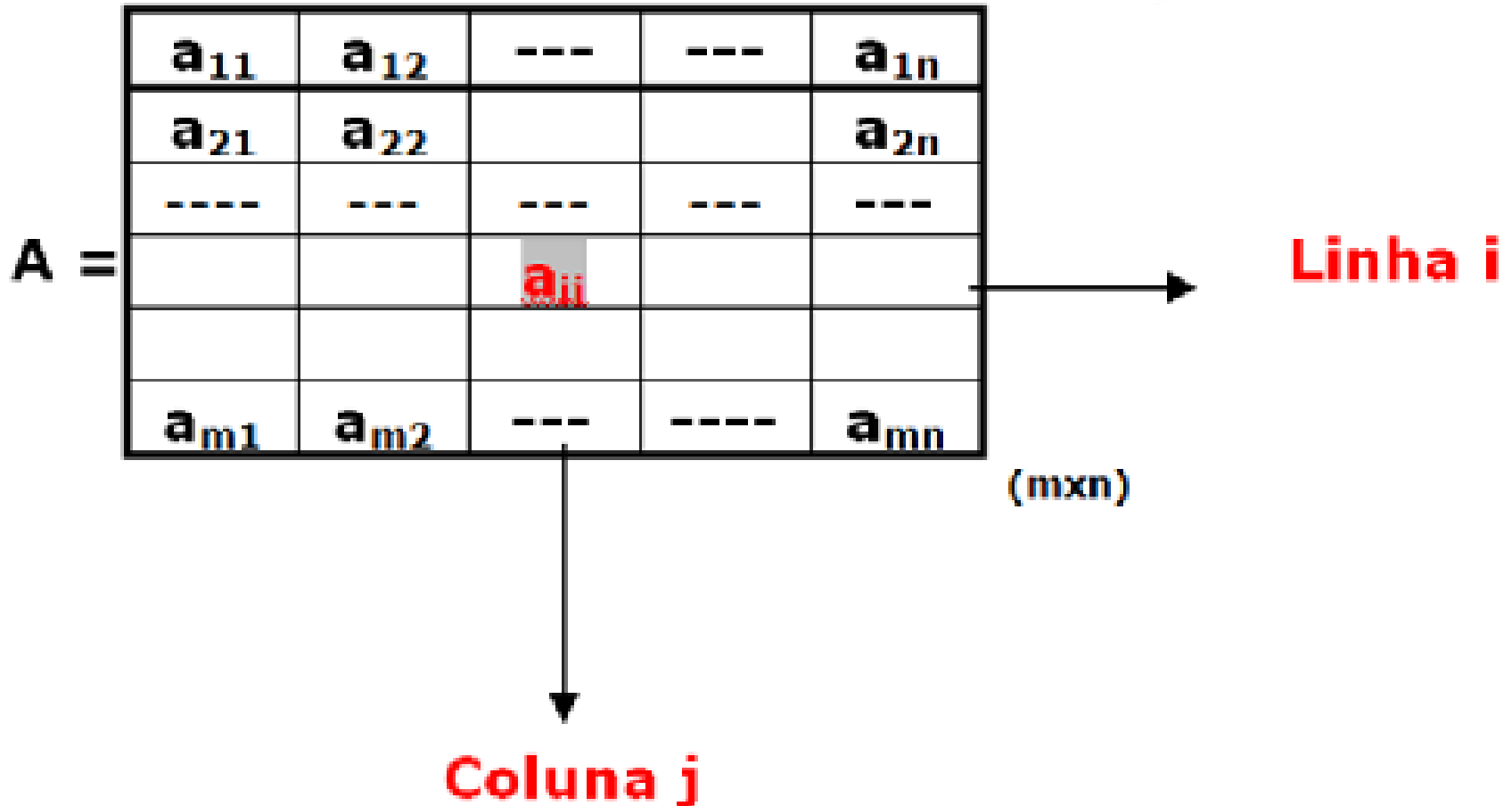
Questões dos tipos a seguir podem e devem ser respondidas utilizando-se operações matriciais:

1. Se ele vai construir 5, 7, 12 casas dos tipos modernos, mediterrâneo e colonial, respectivamente, quantas unidades de cada material serão empregadas?
2. Supondo agora que os preços por unidade de ferro, madeira, vidro, tinta e tijolo sejam, respectivamente, 15, 8, 5, 1, 10 u.p. Qual o preço unitário de cada tipo de casa?
3. Qual o custo total do material empregado?



MATRIZES

Formalmente definimos uma matriz como uma disposição retangular de números ou funções do tipo:



CONCEITOS BÁSICOS DE UMA MATRIZ

Ordem

Se A é uma matriz com m linhas e n colunas, dizemos que a ordem da matriz A é $(m \times n)$.

Matriz Quadrada

É a matriz que possui o número de linhas igual ao número de colunas ($m = n$).

Elemento a_{ij} da matriz A

É o elemento que se posiciona na linha i e coluna j .

Diagonal Principal da Matriz

Numa matriz A , é formada pelos elementos a_{ij} , tais que $i = j$.

MATRIZES

A notação para uma matriz A de ordem qualquer é da forma $A = (a_{ij})$.

A matriz numérica é indicada por seus elementos na forma $A = (a_{ij})$.

A matriz numérica do nosso exemplo possui:

- um total de 3 linhas e 5 colunas, logo é uma matriz de ordem (3×5) ;
- o elemento situado na segunda linha e terceira coluna dado por $a_{23} = 12$.

$$A = (a_{ij}) \begin{bmatrix} 1 & 5 & 8 & 2 & 6 \\ 3 & 7 & 12 & 4 & 9 \\ 1 & 15 & 5 & 8 & 3 \end{bmatrix}$$



MATRIZES

Algumas matrizes notáveis.

Matriz nula

Matriz nula: possui todos os elementos iguais a zero.

Matriz linha

Matriz triangular superior

Matriz coluna

Matriz triangular inferior

Matriz transposta da
matriz $A = (a_{ij})$

Matriz diagonal

Matriz simétrica

Matriz identidade

Matriz antissimétrica

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2 \times 3)$$

MATRIZES

Algumas matrizes notáveis.

Matriz nula

Matriz linha

Matriz triangular superior

Matriz coluna

Matriz triangular inferior

Matriz transposta da matriz $A = (a_{ij})$

Matriz diagonal

Matriz simétrica

Matriz identidade

Matriz antissimétrica

Matriz triangular superior: é uma matriz quadrada cujos elementos situados abaixo da diagonal principal são iguais a zero, ou, ainda, $a_{ij} = 0$ sempre que $i > j$. Por exemplo, a matriz (3×3) a seguir é triangular superior.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & -4 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Diagonal Principal

Observe que os elementos $a_{21} = a_{31} = a_{32} = 0$.

MATRIZES

Algumas matrizes notáveis.

Matriz nula

Matriz linha

Matriz triangular superior

Matriz coluna

Matriz triangular inferior

Matriz transposta da matriz $A = (a_{ij})$

Matriz diagonal

Matriz simétrica

Matriz identidade

Matriz antissimétrica

Matriz triangular inferior: é uma matriz quadrada cujos elementos situados acima da diagonal principal são iguais a zero, ou ainda, $a_{ij} = 0$ sempre que $i < j$.
Por exemplo, a matriz (3×3) a seguir é triangular inferior

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

MATRIZES

Algumas matrizes notáveis.

Matriz nula

Matriz diagonal: é uma matriz quadrada cujos elementos fora da diagonal principal são iguais a zero, ou, ainda, $a_{ij} = 0$ sempre $i \neq j$.

Matriz linha

Matriz triangular superior

Matriz coluna

Matriz triangular inferior

Matriz transposta da matriz $A = (a_{ij})$

Matriz diagonal

Matriz simétrica

Matriz identidade

Matriz antissimétrica

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

MATRIZES

Algumas matrizes notáveis.

Matriz nula

Matriz identidade: denotada por I_n , é uma matriz diagonal cujos elementos da diagonal principal são $a_{ij} = 1$.

Matriz linha

Matriz triangular superior

Matriz coluna

Matriz triangular inferior

Matriz transposta da matriz $A = (a_{ij})$

Matriz diagonal

Matriz simétrica

Matriz identidade

Matriz antissimétrica

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad 3 \times 3$$

MATRIZES

Algumas matrizes notáveis.

Matriz nula

Matriz linha

Matriz triangular superior

Matriz coluna

Matriz triangular inferior

Matriz transposta da
matriz $A = (a_{ij})$

Matriz diagonal

Matriz simétrica

Matriz identidade

Matriz antissimétrica

Matriz linha: é uma matriz que possui apenas uma linha.

$$A = (1 \quad 2 \quad 6 \quad -1) \quad (1 \times 4)$$

MATRIZES

Algumas matrizes notáveis.

Matriz coluna: é uma matriz que possui apenas uma coluna.

$$A = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \quad (5 \times 1)$$

Matriz nula

Matriz linha

Matriz triangular superior

Matriz coluna

Matriz triangular inferior

Matriz transposta da
matriz $A = (a_{ij})$

Matriz diagonal

Matriz simétrica

Matriz identidade

Matriz antissimétrica

MATRIZES

Algumas matrizes notáveis.

Matriz nula

Matriz linha

Matriz triangular superior

Matriz coluna

Matriz triangular inferior

Matriz transposta da
matriz $A = (a_{ij})$

Matriz diagonal

Matriz simétrica

Matriz identidade

Matriz antissimétrica

Matriz transposta da matriz $A = (a_{ij})$: denotada por A^t , é tal que o elemento situado na linha i e coluna j de A passa a ser o elemento da linha j e coluna i de A^t .

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

MATRIZES

Algumas matrizes notáveis.

Matriz nula

Matriz simétrica: é uma matriz tal que $A = A^t$.

Matriz linha

Matriz triangular superior

Matriz coluna

Matriz triangular inferior

Matriz transposta da
matriz $A = (a_{ij})$

Matriz diagonal

Matriz simétrica

Matriz identidade

Matriz antissimétrica

$$A = A^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

MATRIZES

Algumas matrizes notáveis.

Matriz nula

Matriz antissimétrica: é uma matriz tal que $A = -A^t$.

Matriz linha

Matriz triangular superior

Matriz coluna

Matriz triangular inferior

Matriz transposta da
matriz $A = (a_{ij})$

Matriz diagonal

Matriz simétrica

Matriz identidade

Matriz antissimétrica

$$A = -A^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

Observe que na matriz antissimétrica todos os elementos da diagonal principal são necessariamente iguais a zero.

MATRIZES

OPERAÇÕES COM MATRIZES

As operações de soma entre duas matrizes e de multiplicação de um escalar (número real) por uma matriz são definidas de forma intuitiva, como mostramos a seguir:

Soma

Dadas as matrizes $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$ com a mesma ordem, a soma entre elas é uma $C = (c_{ij})$, de mesma ordem que A e B , tal que $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ para todo i, j . Por exemplo,

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+3 & 1+(-1) \\ 1+2 & 4+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

MATRIZES

OPERAÇÕES COM MATRIZES

Multiplicação por escalar

Dada a matriz $A = (a_{ij})$ e o escalar k , a matriz $(k.A)$ é obtida multiplicando-se todos os seus elementos por k

$k.A = (k.a_{ij})$, para todo i, j .

Por exemplo,

$$4 \cdot \begin{pmatrix} 3 & 5 & 0 \\ -1 & 7 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 20 & 0 \\ -4 & 28 & 8 \end{pmatrix}$$



PRODUTO DE
MATRIZES

→ **A**TENÇÃO!!!

PRODUTO DE UMA MATRIZ

1

x

O produto entre duas matrizes não é definido de forma intuitiva como ocorre nos casos das operações de soma e da multiplicação por escalar

2

x

Inicialmente, para que esta operação seja definida entre as matrizes A e B é necessário que o número de colunas da matriz A seja igual ao número de linhas da matriz B .

3

x

Seja $A = (a_{ij})$ uma matriz de ordem $(m \times p)$ e $B = (b_{ij})$ uma matriz de ordem $(p \times n)$. Seja $C = (A.B) = (c_{ij})$ a matriz produto de A por B .

MATRIZES

PRODUTO DE MATRIZES

Cada elemento (c_{ij}) da matriz C será obtido da seguinte forma:

- Selecionar a linha i da matriz A dada por:
($a_{i1} \ a_{i2} \ \dots \ a_{ip}$)

- Selecionar a coluna j da matriz B dada por:

$$B = \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \dots \\ b_{pj} \end{pmatrix}$$

- Efetuar as somas dos produtos dos elementos da linha i pelos da coluna j na forma a seguir:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj}, \text{ para todo } i, j.$$

- A matriz resultante $C = AB$ terá ordem $(m \times n)$.

MATRIZES

PRODUTO DE MATRIZES

Veja o cálculo da operação de produto no exemplo a seguir:

Sejam as matrizes A e B:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Observe que a matriz $C = A B$ possui ordem (2×2) (JUSTIFIQUE), onde:

$$c_{11} = 2 \cdot 3 + 1 \cdot 1 + (-2) \cdot (-1) = 9$$

(soma dos produtos dos elementos da linha 1 de A pela coluna 1 de B)

$$c_{12} = 2 \cdot (-2) + 1 \cdot 2 + (-2) \cdot 3 = -8$$

(soma dos produtos dos elementos da linha 1 de A pela coluna 2 de B)

$$c_{21} = 3 \cdot 3 + (-1) \cdot 1 + 4 \cdot (-1) = 4$$

(soma dos produtos dos elementos da linha 2 de A pela coluna 1 de B)

$$c_{22} = 3 \cdot (-2) + (-1) \cdot 2 + 4 \cdot 3 = 4$$

(soma dos produtos dos elementos da linha 2 de A pela coluna 2 de B).

MATRIZES

PRODUTO DE MATRIZES

Ou, ainda,

$$C = \begin{bmatrix} 9 & -8 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$$

Será possível o cálculo do produto de B por A? Verifique?

É possível, BA é uma matriz de ordem (3, 3).

$$BA = \begin{bmatrix} 0 & 5 & -14 \\ 8 & -1 & 6 \\ 7 & -4 & 14 \end{bmatrix}$$

CUIDADO!!!

Nem sempre a **propriedade comutativa** está presente no produto de matrizes.

MATRIZES

PRODUTO DE MATRIZES

PROPRIEDADES:

Sejam A, B e C matrizes cujas operações abaixo estão definidas:

- 1) $(A.B).C = A.(B.C)$; (associativa)
- 2) $A.(B + C) = AB + AC$; (distributiva à direita)
- 3) $(A + B).C = AC + BC$; (distributiva à esquerda)
- 4) $(A^t)^t = A$;
- 5) $(k.A)^t = k.A^t$; $k = \text{número real}$
- 6) $(A + B)^t = A^t + B^t$;
- 7) $(A.B)^t = B^t.A^t$.

MATRIZES *PROPRIEDADES*

Seja A uma matriz quadrada de ordem $(n \times n)$,
definimos as potências da matriz A da forma a seguir:

$$A^2 = A.A$$

$$A^3 = A.A.A$$

MATRIZES *PROPRIEDADES*

$$A^n = A.A.....A \text{ (n vezes)}$$

Por convenção $A^0 = I_n$ (matriz identidade de mesma ordem de A)

Por exemplo,

$$\text{Seja } A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -4 \end{bmatrix}. \text{ Então, } A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -6 \\ 2 & 13 \end{bmatrix}.$$

MATRIZES *ATIVIDADES*

Sejam as matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix},$$
$$D = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 5 \\ 0 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } F = \begin{bmatrix} -4 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Calcule se possível:

(a) $C + E$, $A + B$, $2C - 3E$.

(b) $(A^t)^t$, $(C + E)^t$, $(C^t + E^t)$, $(2D + 3F)^t$, $(-A)^t$, $-A^t$ e $(3A - 5B^t)$.

(c) $(AB)^t$, $(BA)^t$, DD^t , $D^t D$.

MATRIZES *ATIVIDADES*

2) Se L é um número real, calcule $LI_3 - A$ para:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & -2 & 3 \\ 5 & 2 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3) Seja $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, mostre que $A^2 = I_2$.

4) Seja D a matriz dada no exercício (1), calcule $3D^3 - 2D^2 + 5D - 4I_2$.

5) Encontre um escalar r tal que $Ax = rx$ para $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ e $X = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

MATRIZES *ATIVIDADES*

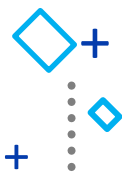
6) Encontre uma constante k tal que $(kA)^t (kA) = 1$, onde $A = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

7) Sejam A , B e C matrizes onde as operações abaixo estão definidas. Verdadeiro ou Falso? Justifique.

- (a) $(-A)^t = -(A^t)$;
- (b) Se A e B são matrizes tais que $AB = O$, então $A = O$ ou $B = O$ (O aqui é a matriz nula).
- (c) Se $AB = AC$, então $B = C$.
- (d) $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$
- (e) $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$
- (f) Se A e B são matrizes simétricas, então $AB = BA$.
- (g) Se $AB = O$, então $BA = O$.

8) Seja $A = \begin{bmatrix} 2 & x^2 \\ 2x-1 & 0 \end{bmatrix}$. Se $A^t = A$, determine x .

9) Seja $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$. Ache B de modo que $B^2 = A$.



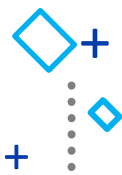
DETERMINANTE
DE UMA

MATRIZ

Formalmente,

“Determinante é a somatória de todos os produtos possíveis dos n elementos de uma matriz quadrada, de maneira que em cada parcela - formada por um produto - não haja dois elementos pertencentes a uma mesma linha e/ou coluna” (SOARES, 1979).





DETERMINANTE DE UMA

MATRIZ

De forma prática, o determinante de uma matriz quadrada A de ordem $(n \times n)$, denotado por $\det(A)$ ou $|A|$, é um número que está associado a esta matriz que será calculado segundo as regras que se seguem:

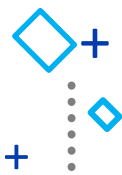
- Caso $n = 1$ $A = (a)$ $\det(A) = a$;

- Caso $n = 2$ $A = \begin{pmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} \\ \mathbf{c} & \mathbf{d} \end{pmatrix}$ $\det(A) = ad - bc$;

- Caso $n = 3$ adotaremos a regra prática de Sarrus descrita a seguir:

Dada a matriz $A =$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} & \mathbf{c} \\ \mathbf{d} & \mathbf{e} & \mathbf{f} \\ \mathbf{g} & \mathbf{h} & \mathbf{i} \end{pmatrix}$$



DETERMINANTE DE UMA

MATRIZ

•Repetimos as duas primeiras colunas após a terceira coluna, de forma a montar uma matriz com 3 linhas e com 5 colunas. Traçamos as 3 diagonais rosas e as 3 azuis conforme a figura a seguir. Os produtos dos elementos envolvidos nas diagonais rosas devem ter o sinal negativo e nas azuis positivo.

$$\begin{pmatrix} a & b & c & a & b \\ d & e & f & d & e \\ g & h & i & g & h \end{pmatrix}$$

-ceg -afh -bdi + aei + bfg + cdh

O $\det(A)$ será o somatório dos produtos indicados, ou, ainda, $\det(A) = aei + bfg + cdh - ceg - afh - bdi$



DETERMINANTE DE UMA

MATRIZ

Por exemplo,

Calcule o determinante da matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

Pela regra de Sarrus, formamos a matriz e traçamos as diagonais indicadas:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

-0 -0 -0 +8 +12 +0

$$\text{Det}(A) = -0 - 0 - 0 + 8 + 12 = 20$$

COFATOR

Cofator

Denotado por Δ_{ij} , o cofator do elemento “ a_{ij} ” da matriz quadrada A é definido por

$$\Delta_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \det(A_{ij})$$

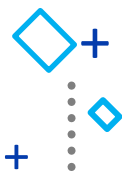
onde A_{ij} denota a matriz obtida da matriz A suprimindo-se a linha i e a coluna j .

COFATOR

Por exemplo,
Seja $A = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 4 & -8 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$, vamos calcular o cofator do elemento a_{32} de A .

$$\Delta_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Determinante da matriz obtida de A
retirando-se a linha 3 e coluna 2



+

+

+



DETERMINANTE
DE UMA

MATRIZ



Regra de
Laplace



DETERMINANTE DE UMA

MATRIZ

A regra de Laplace reduz o cálculo do determinante de uma matriz de ordem n a uma soma de n determinantes de ordem $(n - 1)$. O procedimento adotado deve ser o seguinte:

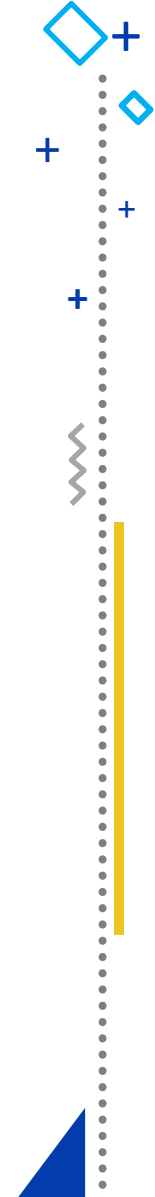
- Escolher uma linha ou uma coluna da matriz que se deseja calcular o determinante, sendo preferencialmente uma linha ou coluna que contenha o maior número de zeros possível.

- Se a linha i da matriz foi a escolhida,

$$\det(A) = a_{i1}\Delta_{i1} + a_{i2}\Delta_{i2} + \dots + a_{in}\Delta_{in}$$

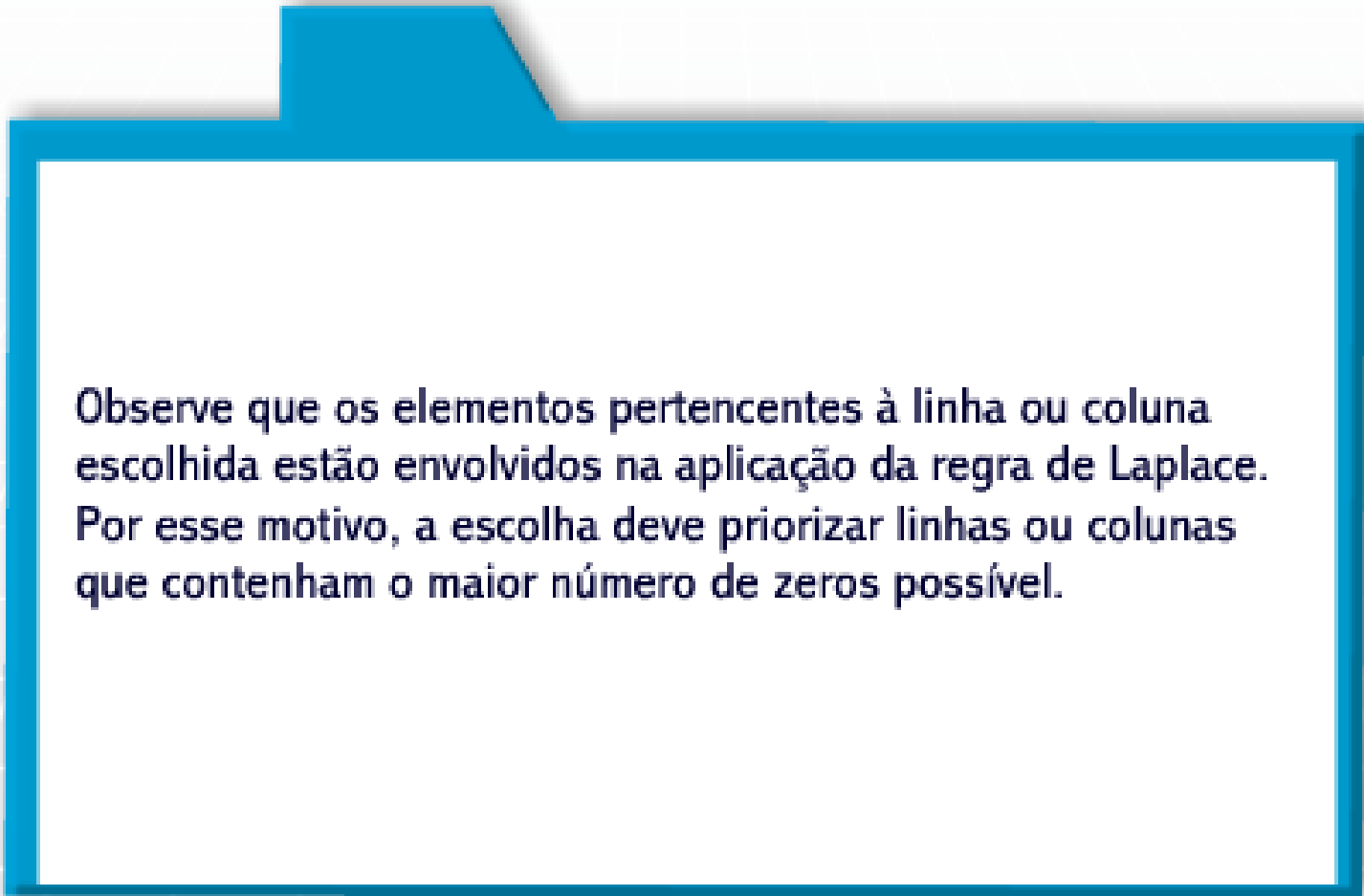
Se a coluna j da matriz foi a escolhida,

$$\det(A) = a_{1j}\Delta_{1j} + a_{2j}\Delta_{2j} + \dots + a_{nj}\Delta_{nj}$$



DETERMINANTE
DE UMA

MATRIZ



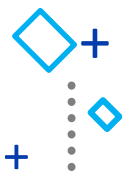
Observe que os elementos pertencentes à linha ou coluna escolhida estão envolvidos na aplicação da regra de Laplace. Por esse motivo, a escolha deve priorizar linhas ou colunas que contenham o maior número de zeros possível.



DETERMINANTE
DE UMA

MATRIZ

Exemplo



DETERMINANTE DE UMA

MATRIZ

Por exemplo, vamos aplicar a regra de Laplace para calcular o determinante da matriz $A =$

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 4 & -8 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

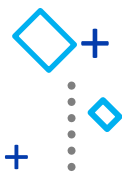
A expansão do determinante será feita fixando a segunda coluna da matriz (é a fila – linha ou coluna - com o maior número de zeros). Logo,

$$\det(A) = a_{12} \Delta_{12} + a_{22} \Delta_{22} + a_{32} \Delta_{32} + a_{42} \Delta_{42}$$

$$\Rightarrow \det(A) = 4 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & -8 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & -8 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} + 3 \cdot (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{4+2} \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & -8 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det(A) &= (-4) \cdot (8 + 0 - 16 - 24 + 32 - 0) + (-3) \cdot (2 + 4 + 12 - 2 - 12 - 4) \\ &= (-4) \cdot 0 + (-3) \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

Logo, $\det(A) = 0$.

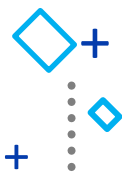


DETERMINANTE
DE UMA

MATRIZ

O cálculo do determinante de matrizes com ordem superior a três é bastante trabalhoso. Por exemplo, para calcular o determinante de uma matriz de ordem (5×5) seria necessário que calculássemos 5 determinantes de matrizes (4×4) .

Desta forma, algumas propriedades que apresentaremos a seguir poderão nos auxiliar na simplificação dos cálculos.



DETERMINANTE DE UMA

MATRIZ

Propriedades de determinante

Sejam A e B matrizes quadradas de ordem n.

1) $\det(A^t) = \det(A)$

2) $\det(k.A) = k^n . \det(A)$, $k = n^\circ$ real

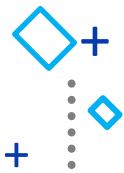
3) $\det(A.B) = \det(A) . \det(B)$

4) Se A possui linhas (colunas) iguais ou proporcionais, então $\det(A) = 0$.

5) Se trocarmos as posições de duas linhas (colunas) de A, o seu determinante fica multiplicado por (-1).

6) Se A é uma matriz triangular o seu determinante é o produto dos elementos da diagonal principal.

7) Se somarmos a uma linha (ou coluna) de A um múltiplo de outra linha (ou coluna), o determinante da nova matriz é igual ao de A.



DETERMINANTE
DE UMA

MATRIZ



Atividades



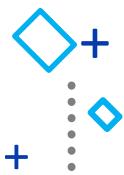
DETERMINANTE
DE UMA

MATRIZ

Use as propriedades para calcular o determinante de cada uma das seguintes matrizes:

$$(1) A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 19 & 18 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & \pi & -5 & 0 & 0 \\ 4 & \sqrt{2} & \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 8 & 3 & 5 & 6 & -1 \end{bmatrix}$$

$$(2) A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$



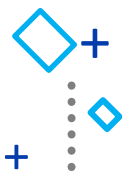
DETERMINANTE
DE UMA

MATRIZ

Calcule o determinante das seguintes matrizes:

$$(1) A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (2) A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & x \\ 1 & 1 & x^2 \\ 2 & 2 & x^2 \end{bmatrix}$$

$$(3) A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 2 & -2 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (4) A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}$$



DETERMINANTE DE UMA

MATRIZ

Determine (V) Verdadeiro ou (F) Falso, justifique em ambos os casos.

(1) $\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$;

(2) $\det(A^2) = [\det(A)]^2$;

(3) Se A é uma matriz de ordem n e A^t é a matriz transposta de A , então $\det(A^t A) \geq 0$.

(4) Seja A uma matriz triangular. Então, se os elementos fora da diagonal principal são todos negativos, $\det(A)$ é positivo.

(5) Seja A uma matriz simétrica, então $\det(A^t A) > \det(A)$.

(6) Se $\det A = 1$, então A é a matriz identidade.

(7) Se A é uma matriz triangular, então $\det A = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}$.

(8) Se A é uma matriz de ordem 10×10 , então $\det(2A) = 2^{10} \det(A)$.



DETERMINANTE
DE UMA

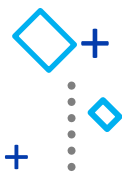
MATRIZ

Traço de uma matriz.

Seja A uma matriz quadrada. Definimos o traço da matriz A como sendo a soma dos elementos da diagonal principal da matriz. $\text{Tr}(A) = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}$.

Por exemplo, para $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, temos que: $\text{Tr}(A) = 2 + 2 + 2 = 6$.

*Assim como o determinante, o traço de uma matriz é um número associado a esta matriz.



DETERMINANTE
DE UMA

MATRIZ

Propriedades do traço de uma matriz.

Propriedades do traço

Sejam A e B matrizes quadradas de ordem n:

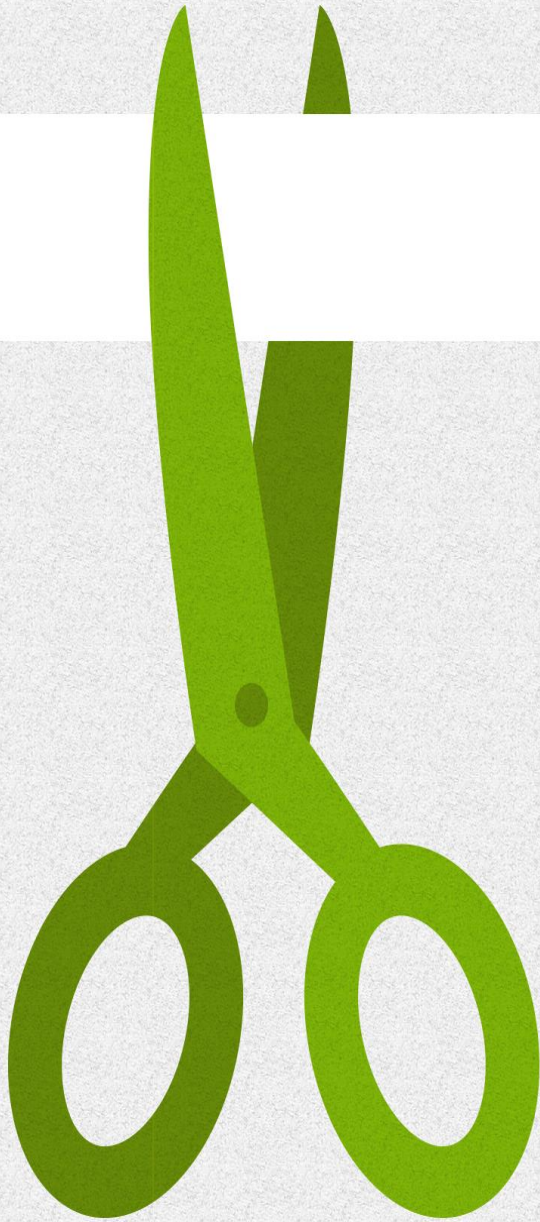
$$1) \text{tr}(A^t) = \text{tr}(A)$$

$$2) \text{tr}(k.A) = k \text{tr}(A), k = \text{n}^\circ \text{ real}$$

$$3) \text{tr}(A + B) = \text{tr}(A) + \text{tr}(B)$$

$$4) \text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$$

GABARITO



GABARITO

(1) Observe que a matriz A é triangular inferior, logo, pela propriedade (6), seu determinante é o produto dos elementos da sua diagonal principal.

$$\text{Então, } \det(A) = 3 \cdot 18 \cdot (-5) \cdot 0 \cdot (-1) = 0$$

(2) Observe que a coluna 4 da matriz A é igual à coluna 3 multiplicada por 2, logo, pela propriedade (4), o determinante de A é igual a zero.

(1) 20

(2) $-x^2$

(3) 1

(4) 400

GABARITO

(1) Falso, sejam $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, então $A + B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Observe que $\det(A) + \det(B) = 0 \neq 1 = \det(A + B)$.

(2) Verdadeiro, $\det(A^2) = \det(A.A) = \det(A).\det(A) = [\det(A)]^2$.

(3) Verdadeiro, $\det(A^t A) = \det(A^t).\det(A) = \det(A).\det(A) = [\det(A)]^2 \geq 0$.

(4) Falso, como A é uma matriz triangular, o seu determinante é o produto dos elementos da diagonal principal, isto é, depende dos elementos fora da diagonal principal.

(5) Falso, seja $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, então $\det(A^t A) = 0 = \det(A)$.

(6) Falso, seja $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, então $\det(A) = 1$ e A não é a matriz identidade.

(7) Falso, $\det(A) = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \dots \cdot a_{nn}$.

(8) Verdadeiro, usar a propriedade $\det(kA) = k^n \det(A)$.



SÍNTESE DA AULA

Nessa aula você:

- Aprendeu a operar matrizes.
- Identificou matrizes especiais e suas propriedades.
- Calculou determinante e traço de uma matriz e aprendeu as principais propriedades.



O QUE VEM NA PRÓXIMA AULA

Na próxima aula, abordaremos os seguintes assuntos:

- Inversa de uma matriz.
- O posto de uma matriz.
- Introdução a sistemas de equações algébricas lineares.

INVERSA E CÁLCULO
DE POSTO DE UMA
MATRIZ

INVERSA E CÁLCULO
DE POSTO DE UMA

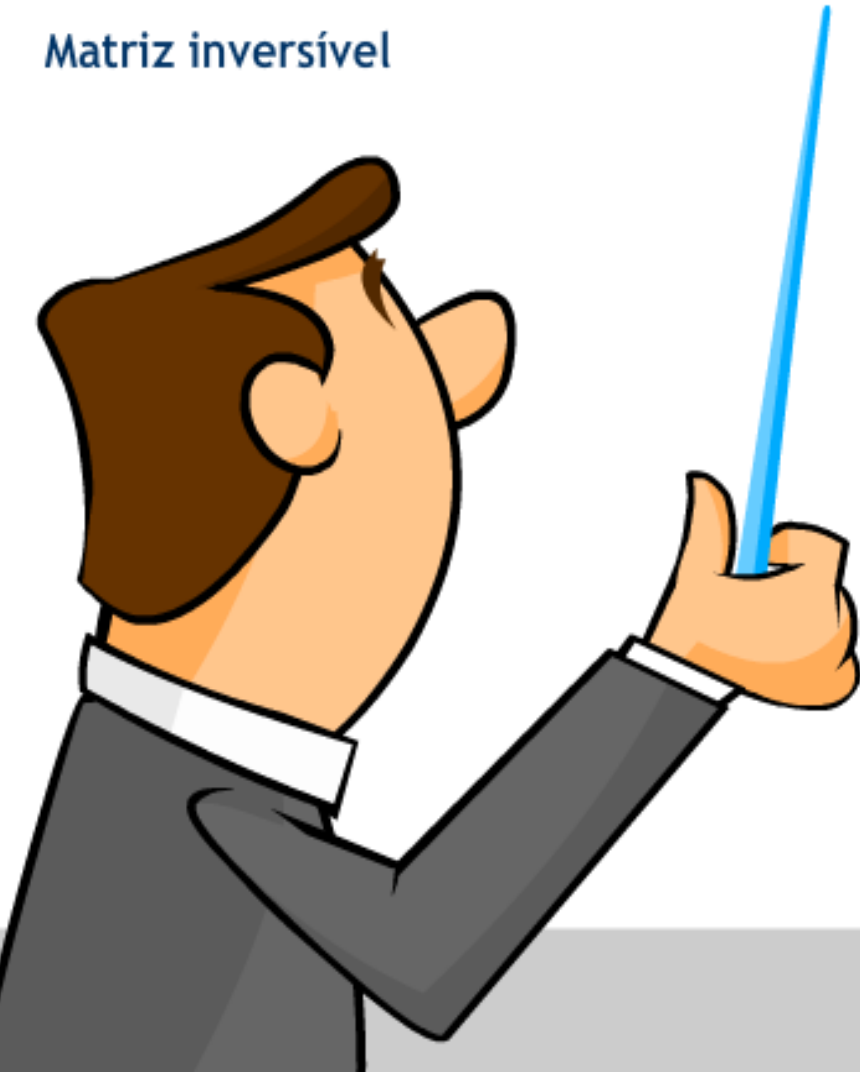
MATRIZ



AULA 2

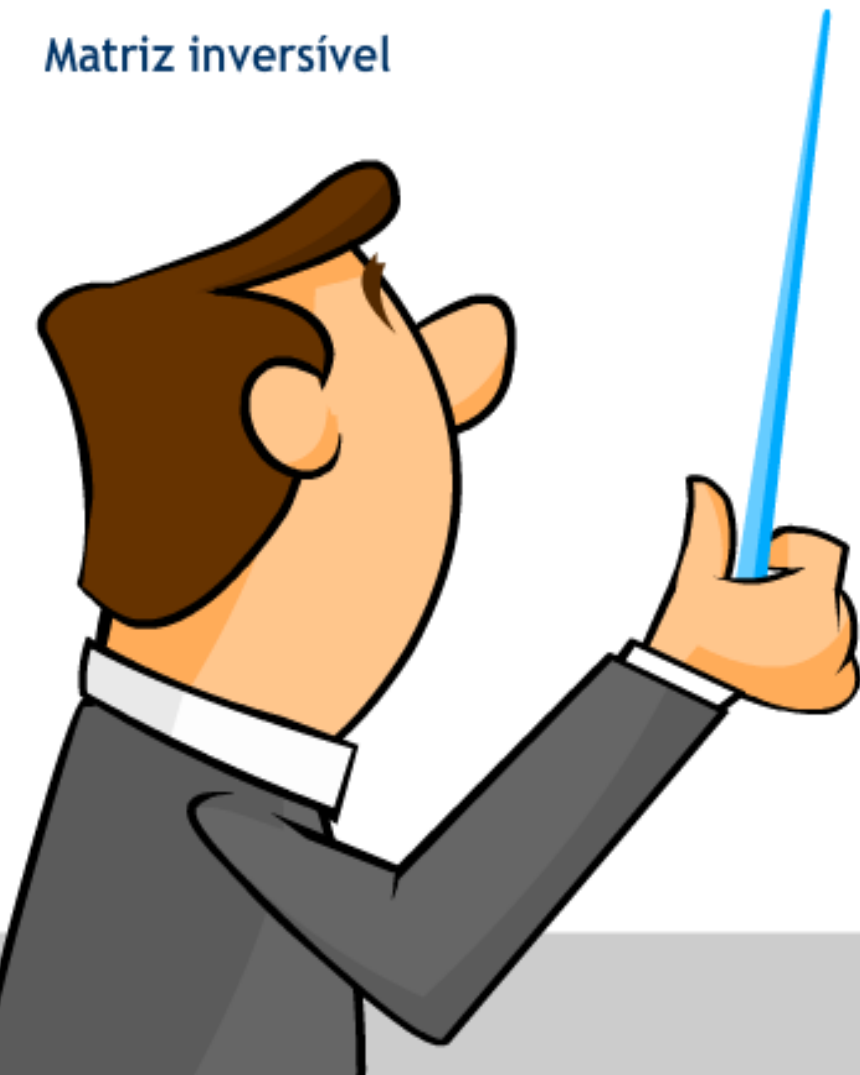
INVERSA E CÁLCULO DE POSTO DE UMA MATRIZ

Matriz inversível



A inversa de uma matriz possui grande aplicabilidade na simplificação de equações matriciais. Em nossos estudos futuros veremos a sua influência nos processos de discussão e resolução de sistemas de equações lineares.

Matriz inversível

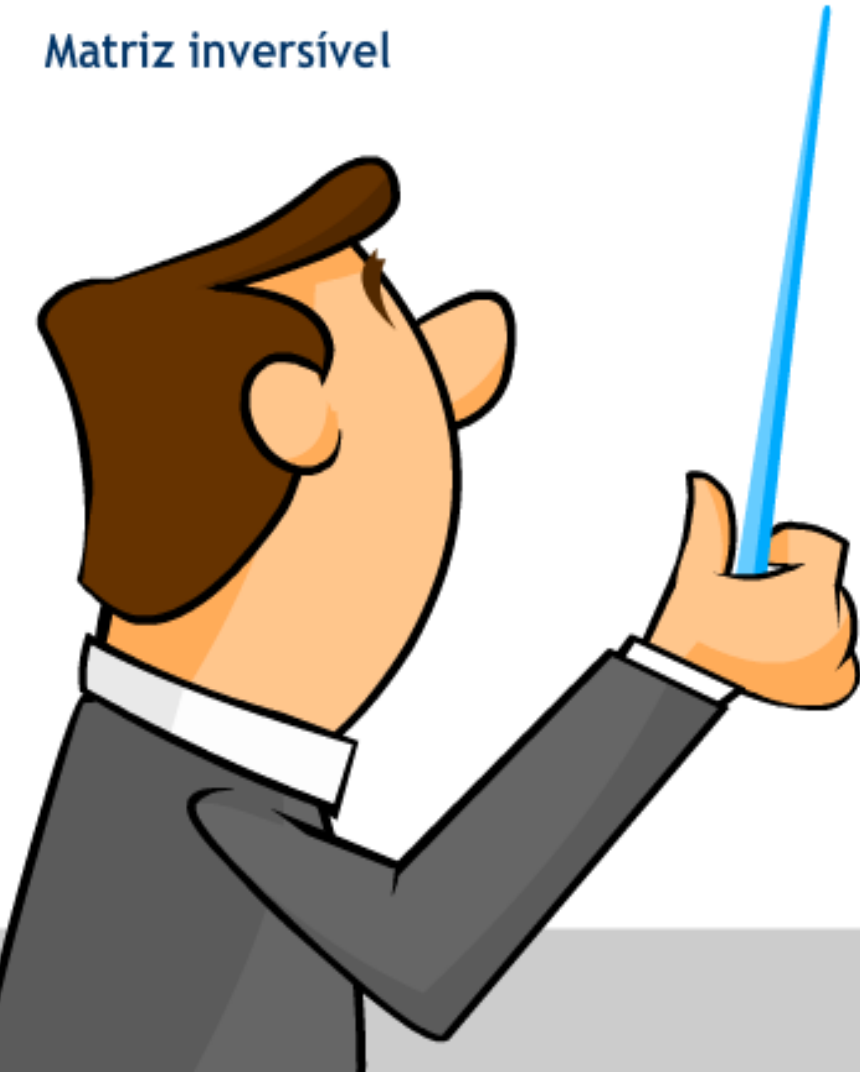


Diz-se que uma matriz quadrada A de ordem n é inversível se podemos encontrar uma matriz B também de ordem n , de tal modo que:

$$AB = BA = I_n$$

Onde, I_n é a matriz identidade de ordem n .

Matriz inversível



Neste caso, a matriz B é dita a inversa da matriz A e, em geral, é denotada por $B = A^{-1}$. É importante ressaltar que se a matriz B é a inversa de A , então a matriz A será a inversa de B .

$$B = A^{-1} \Leftrightarrow A = B^{-1}$$

Matriz inversível

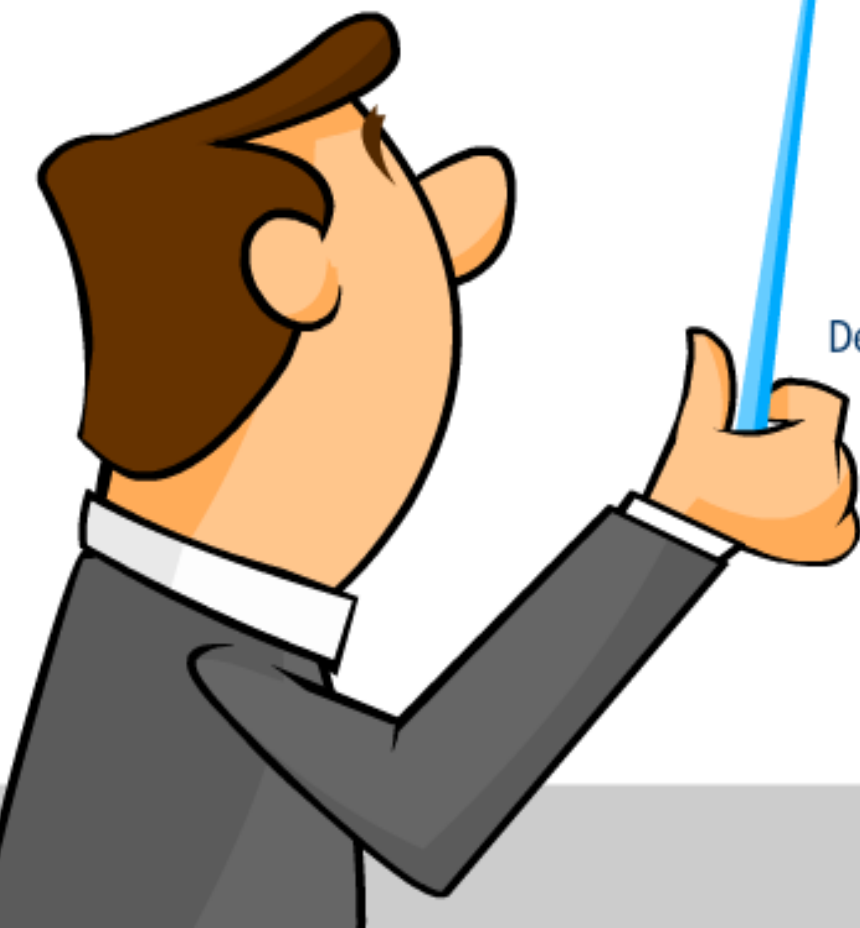
A seguir, vamos usar a definição para calcular a inversa de uma matriz A genérica de ordem (2×2) .

$$\text{Seja a matriz } A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Desejamos encontrar uma matriz $B = \begin{pmatrix} x & z \\ y & w \end{pmatrix}$ tal que:

$$AB = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} ax + bz & ay + bw \\ cx + dz & cy + dw \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$



Matriz inversível

Veja os dois sistemas nas variáveis x , z , y e w que precisamos resolver:

$$(I) \begin{cases} ax + bz = 1 \\ cx + dz = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad (II) \begin{cases} cx + dz = 0 \\ by + cw = 1 \end{cases}$$

Resolvendo (I) por substituição de variável, temos

$$z = \frac{-c}{d}x \Rightarrow ax + b\left(\frac{-c}{d}x\right) = 1 \Rightarrow adx - bcx = d \Rightarrow$$

$$(ad - bc)x = d \Rightarrow x = \frac{d}{ad - bc} \Rightarrow$$

$$x = \frac{d}{\det A}$$

$$\text{Logo, } z = \frac{-c}{d} \frac{d}{\det A} \Rightarrow z = \frac{-c}{\det A}$$

Matriz inversível

Resolvendo o sistema (II), de forma análoga obtemos:

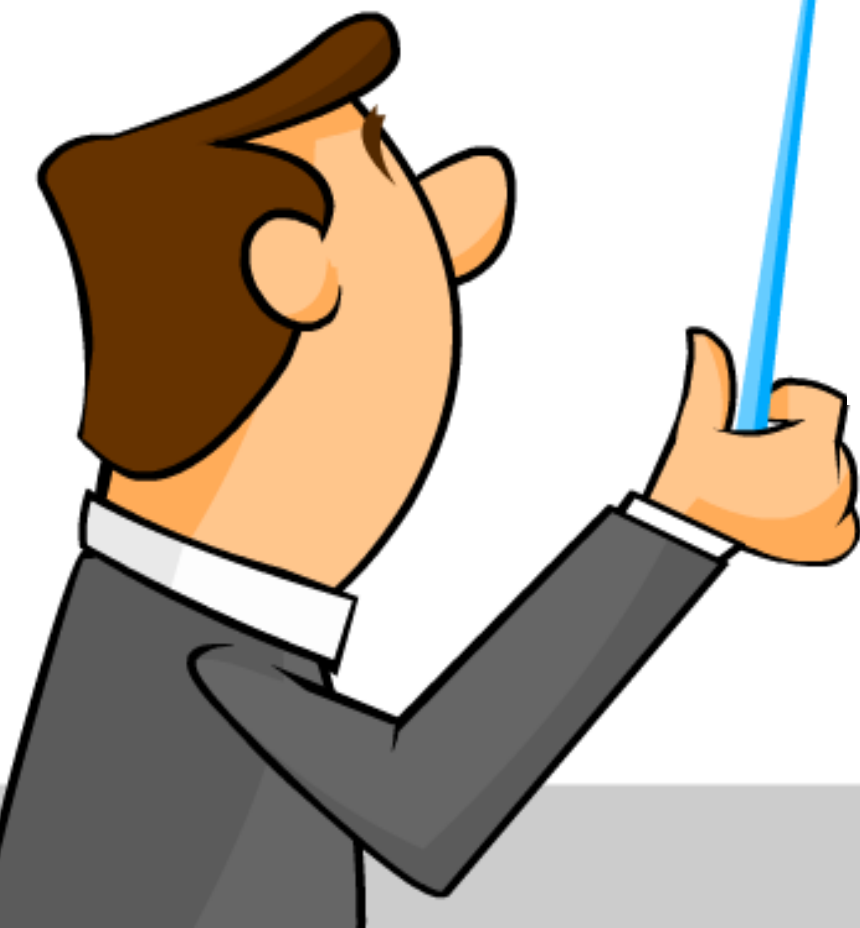
$$y = \frac{-b}{\det A}$$

e

$$w = \frac{a}{\det A}$$

Por fim,

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

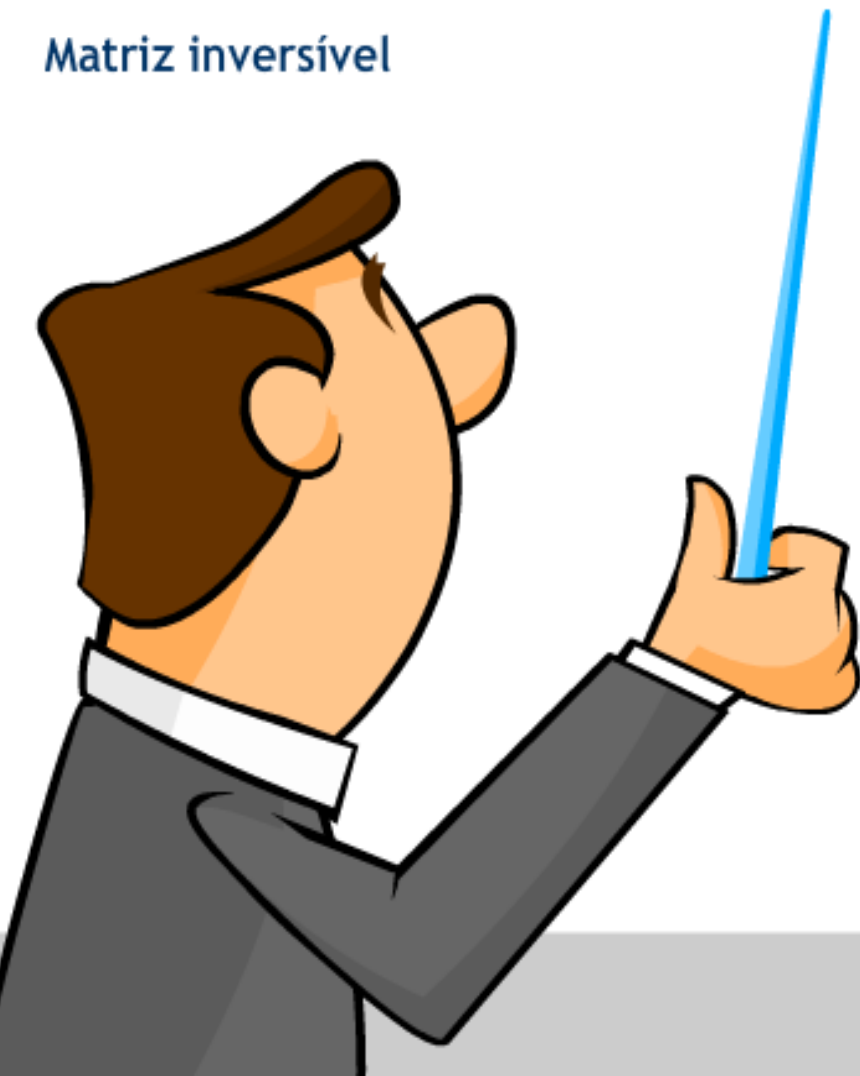


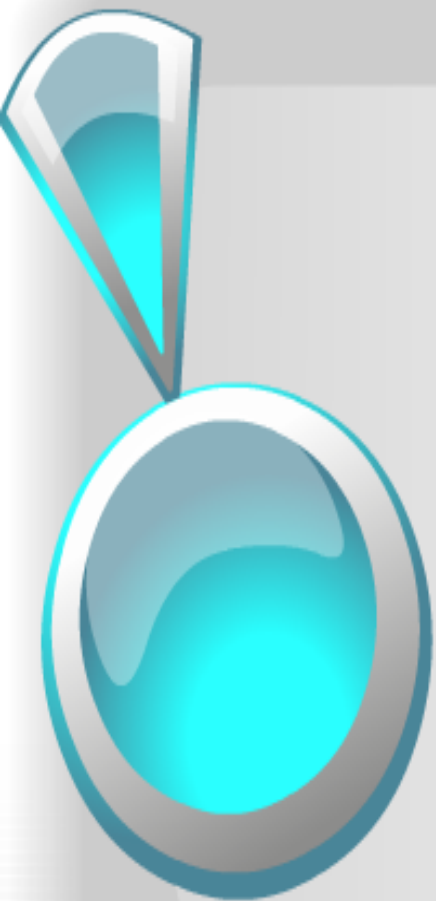
Matriz inversível

Observe a relação existente entre os elementos da matriz A e sua inversa A^{-1} . Sem efetuar muitos cálculos escreva a inversa da matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 8 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$





Em geral, a determinação da inversa de uma matriz de ordem n requer muitos cálculos. É importante ressaltar que somente podemos calcular inversas de matrizes quadradas com determinantes não nulos.

Para estabelecermos a fórmula geral para cálculo da inversa de uma matriz de ordem n precisamos das definições a seguir.

Matriz dos cofatores

Seja A uma matriz quadrada de ordem n .
Lembramos que o cofator do elemento genérico a_{ij} da matriz A é definido pelo número

$$\Delta_{ij} = (-1)^{i+j} \det(A_{ij})$$

onde: A_{ij} é a submatriz obtida de A , retirando-se a linha i e a coluna j .
A matriz dos cofatores de A , denotada por $\overline{A}$, é formada calculando-se todos os cofatores de A , isto é,

$$\overline{A} = \left(\Delta_{ij} \right)$$

Matriz dos cofatores

Por exemplo, para $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 4 \\ 1 & 6 & 5 \end{pmatrix}$ os cofatores são dados por:

$$\Delta_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} = -19; \quad \Delta_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 19;$$

$$\Delta_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} = -19; \quad \Delta_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} = -5;$$

$$\Delta_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 10; \quad \Delta_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} = 11;$$

$$\Delta_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 4; \quad \Delta_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = -8;$$

$$\Delta_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 5;$$

Logo: $\bar{A} = \begin{pmatrix} -19 & 19 & -19 \\ -5 & 10 & -11 \\ 4 & -8 & 5 \end{pmatrix}$

Matriz adjunta de A

Denotada por $\text{Adj}(A)$, é definida como a transposta da matriz dos cofatores de A, isto é,

$$\text{Adj} (A) = (\overline{A})^t$$

No exemplo:

$$\text{Adj} = \begin{pmatrix} -19 & -5 & 4 \\ 19 & 10 & -8 \\ -19 & -11 & 5 \end{pmatrix}$$

Matriz inversa de A

Após a determinação da matriz adjunta da matriz A, podemos encontrar a inversa de A, usando o seguinte resultado:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \text{adj}(A)$$

Por fim, a inversa da matriz A do exemplo será dada por:

$$A^{-1} = -\frac{1}{19} \begin{bmatrix} -19 & -5 & 4 \\ 19 & 10 & -8 \\ -19 & -11 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{5}{19} & -\frac{4}{19} \\ -1 & -\frac{10}{19} & \frac{8}{19} \\ 1 & \frac{11}{19} & -\frac{5}{19} \end{bmatrix}$$

SEM
TREINO,
SEM
CHANCE

EXERCÍCIO PROPOSTO

Ache se possível a matriz inversa das seguintes matrizes:

$$(1) A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$(2) A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$(3) A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & x \\ 1 & 1 & x^2 \\ 2 & 2 & x^2 \end{bmatrix}$$

$$(4) A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 2 & -2 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(5) A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 19 & 18 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & \pi & -5 & 0 & 0 \\ 4 & \sqrt{2} & \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 8 & 3 & 5 & 6 & -1 \end{bmatrix}$$

EXERCÍCIO PROPOSTO

Ache se possível a matriz inversa das seguintes matrizes:

Gabarito (1)

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{3}{20} & \frac{1}{5} & -\frac{1}{10} \\ -\frac{3}{10} & \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

Gabarito (2)
A não é inversível, pois $\det(A) = 0$

Gabarito (3)
Para $x \neq 0$,

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{2}{x} & \frac{1}{x} \\ -1 & \frac{x-2}{x} & \frac{x-1}{x} \\ 0 & \frac{2}{x^2} & -\frac{1}{x^2} \end{bmatrix}$$

Gabarito (4)

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & 4 & -2 \\ -3 & -4 & 12 & -6 \\ 11 & 14 & -43 & 22 \\ 10 & 14 & -41 & 21 \end{bmatrix}$$

Gabarito (5)
A não é inversível, pois $\det(A) = 0$.

INVERSA PROPRIEDADES

Sejam A e B matrizes quadradas de ordem n inversíveis.

(1) A inversa da matriz identidade é a matriz identidade

$$(2) \quad (A^{-1})^{-1} = A$$

$$(3) \quad (k.A)^{-1} = \frac{1}{k} A^{-1}$$

$$(4) \quad (A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$$

$$(5) \quad (A.B)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$$

$$(6) \quad \det (A^{-1}) = \frac{1}{\det (A)}$$

EXERCÍCIO PROPOSTO

Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$, use as propriedades para calcular:

(1) $(3A)^{-1}$

(2) $\det(A^{-1})$

(3) $(B^t)^{-1}$

(4) $(B^{-1})^{-1}$

(5) $(AB)^{-1}$

EXERCÍCIO GABARITO

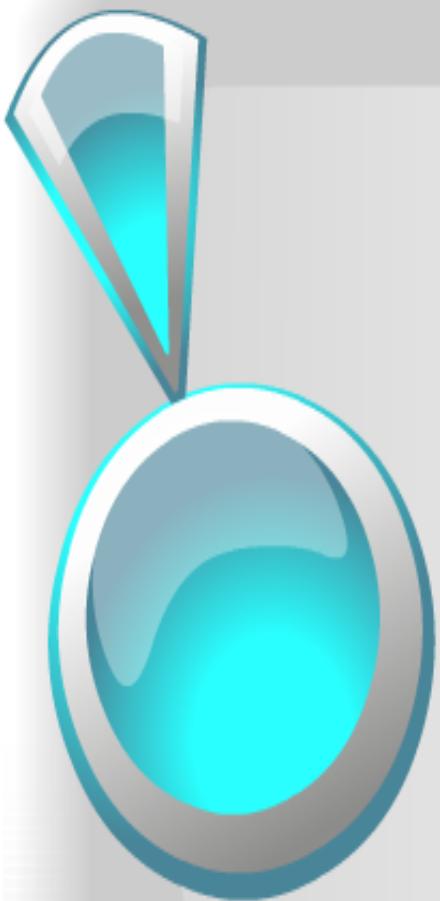
$$(1) (3A)^{-1} = \frac{1}{3} A^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$(2) \det(A)^{-1} = 1/\det(A) = -1$$

$$(3) (B^t)^{-1} = (B^{-1})^t = \begin{bmatrix} 1/2 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(4) B$$

$$(5) (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} = \begin{bmatrix} -1/2 & 3/2 \\ 3 & -8 \end{bmatrix}$$



Os conceitos que apresentaremos a seguir não só viabilizarão o estudo de um novo processo para o cálculo da inversa de uma matriz como também estarão amplamente presentes nos processos de discussão e resolução de sistemas de equações lineares.

Operações elementares com as linhas de uma matriz

São três as operações elementares possíveis com as linhas de uma matriz.



Troca de linhas



Multiplicação de
uma linha por um
escalar não nulo



Substituição de uma
linha por ela própria
adicionada a uma outra
linha multiplicada por
um escalar

Troca de linhas

É descrita por uma permuta de duas linhas da matriz, isto é, a linha i troca com a linha j ($L_i \longleftrightarrow L_j$).

Exemplo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad (L_1 \longleftrightarrow L_2) \quad \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$



Matrizes linhas equivalentes

Uma matriz B é linha equivalente a uma matriz A se B for obtida de A por um número finito de operações elementares.

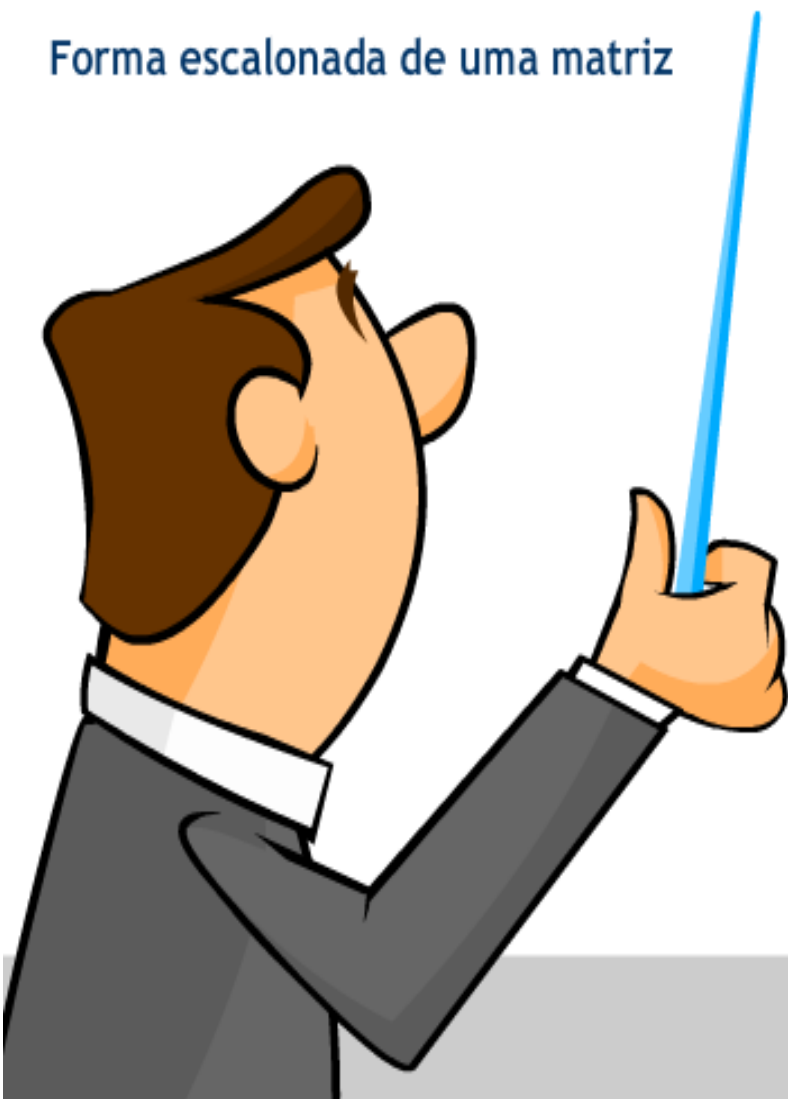
Exemplo:

$$\text{A matriz } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix} \text{ é linha equivalente à matriz } B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

De fato, aplicando-se as operações elementares descritas a seguir à matriz A, obtemos B.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 \rightarrow L_2 - L_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -4 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 \rightarrow -(1/4)L_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

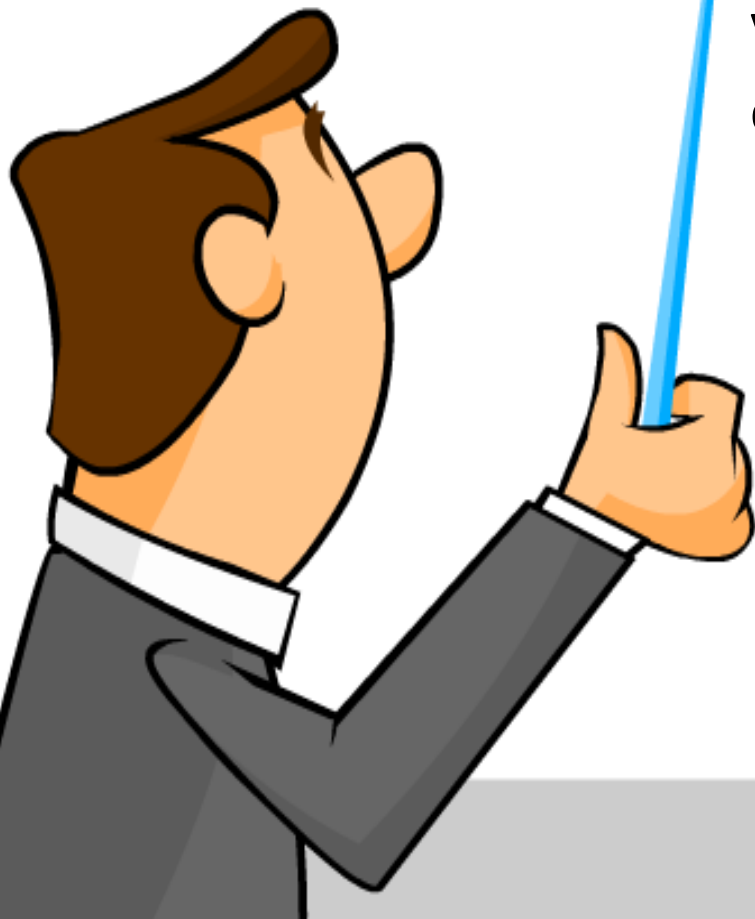
Forma escalonada de uma matriz



Diz-se que uma matriz A de ordem qualquer está na forma escalonada se as seguintes condições forem atendidas simultaneamente:

- I) O primeiro elemento não nulo de uma linha não nula for igual a um.
- II) Cada coluna que contiver o primeiro elemento não nulo de uma linha deve ter todos os outros elementos iguais a zero.
- III) O número de zeros que precede o primeiro elemento não nulo de cada linha deve crescer linha após linha.
- IV) Toda linha nula deve vir abaixo de todas as linhas não nulas.

Forma escalonada de uma matriz



Observe os exemplos a seguir de três matrizes que estão na forma escalonada. Verifique para cada uma delas as quatro condições exigidas pela definição.

$$(1) A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(2) A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$(3) I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Forma escalonada de uma matriz

Justifique por que a matriz a seguir não está na forma escalonada.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

O primeiro elemento não nulo da terceira linha não é igual a um. Além disso, a terceira coluna, que contém o primeiro elemento não nulo da terceira linha, possui outros elementos não nulos.

Forma escalonada de uma matriz

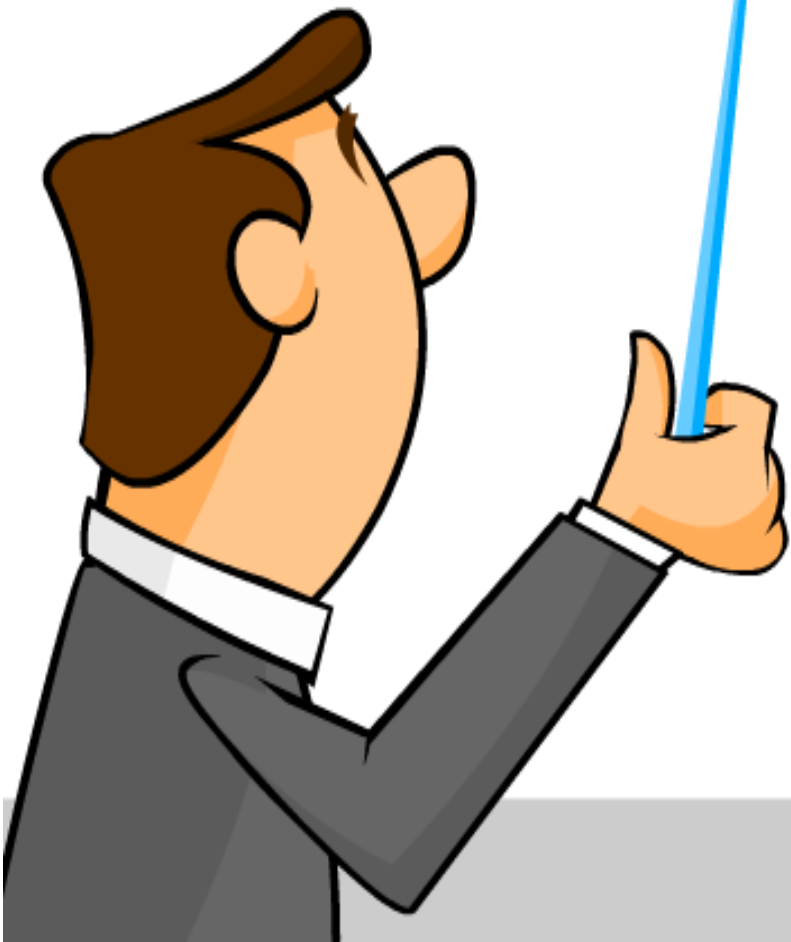
Atenção!

Toda matriz A é linha equivalente a uma única matriz B reduzida à forma escalonada. Isto é, a matriz B é a matriz obtida de A após o escalonamento.

Exemplo:

Vamos encontrar a matriz B reduzida à forma escalonada da matriz A.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 5 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$



Observe atentamente a sequência de operações elementares que iremos utilizar:

$$\begin{aligned}
 A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 5 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} & \xrightarrow[\substack{L_2 \rightarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \rightarrow L_3 - L_1}]{} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 5 \\ 0 & -4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 \rightarrow (-1/2) L_2} \\
 \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -\frac{5}{2} \\ 0 & -4 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \xrightarrow[\substack{L_1 \rightarrow L_1 - 2L_2 \\ L_3 \rightarrow L_3 + 4L_2}]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & -4 & -9 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3 \rightarrow (-1/4) L_3} \\
 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{9}{4} \end{bmatrix} & \xrightarrow[\substack{L_1 \rightarrow L_1 - 3L_3 \\ L_2 \rightarrow L_2 + L_3}]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{7}{4} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{9}{4} \end{bmatrix} = B
 \end{aligned}$$

Posto de uma Matriz

Seja B a matriz escalonada da matriz A .
Definimos o posto de A como sendo o número de linhas não nulas da matriz B .
No exemplo anterior, como o número de linhas não nulas da matriz B é igual a três, então o posto da matriz A é a três.

Posto de uma Matriz

Exercícios propostos

Calcule o posto das seguintes matrizes:

$$(1)A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2)A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$(3)A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

(1) Posto de $A = 2$, forma escalonada de $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(2) Posto de $A = 3$, forma escalonada de $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

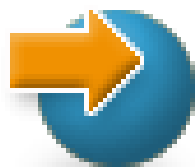
(3) Posto de A , forma escalonada de $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$



SÍNTESE DA AULA

Nessa aula você:

- Entendeu por que devemos determinar a inversa de uma matriz;
- Determinou a inversa de uma matriz;
- Conheceu as propriedades da inversa;
- Aprendeu a escalonar uma matriz e determinou o seu posto.



O QUE VEM NA PRÓXIMA AULA

Na próxima aula, abordaremos os seguintes assuntos:

- Sistemas de equações lineares.
 - Identificação;
 - Discussão e resolução;
 - Sistemas homogêneos.

SISTEMAS
DE EQUAÇÕES
LINEARES

SISTEMAS DE EQUAÇÕES

LINEARES

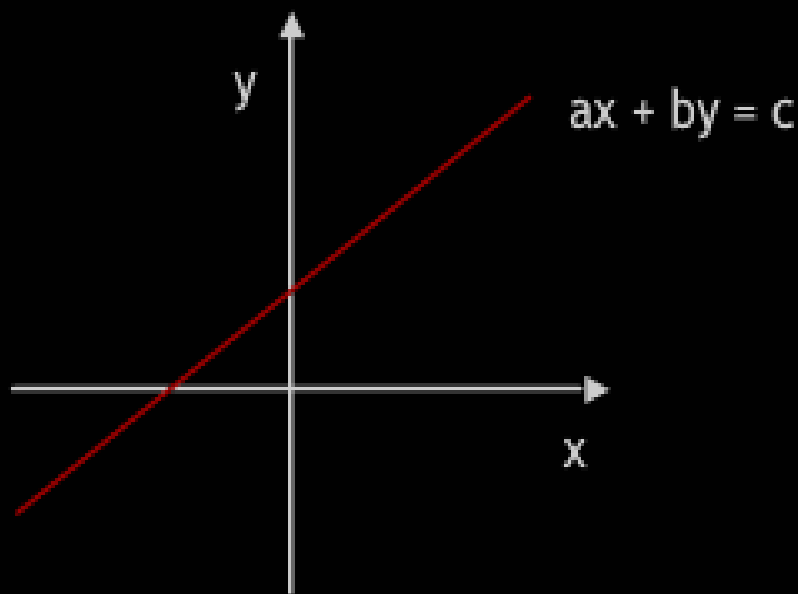
AULA 3

SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES

LINEARES

Equações lineares

Toda equação linear nas variáveis x e y no plano cartesiano é da forma: $ax + by = c$, para a , b e c constantes. Sabemos que geometricamente esta equação é representada por uma reta.

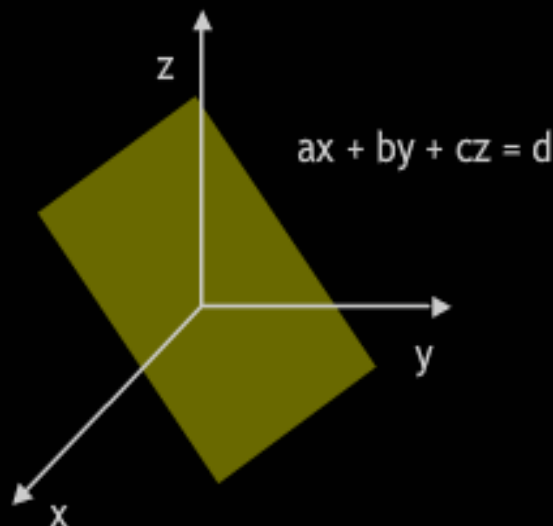


LINEARES

No espaço uma equação linear nas variáveis ou incógnitas x , y e z é da forma:

$ax + by + cz = d$, com a , b , c , e d números reais

Geometricamente esta equação é representada por um plano no espaço R^3 .



$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + \dots + a_n x_n = b,$$

Um Sistema Linear com m equações e n incógnitas é um conjunto de m equações lineares com n variáveis, representado por:

[illegible]

LINEARES

Por exemplo,

$$\begin{cases} 3x + 2y - w = 1 \\ -x + 2z + 4w = 3 \end{cases}$$

é um sistema linear nas variáveis x , y , z e w com duas equações e quatro incógnitas.

Resolver o sistema é determinar os valores das variáveis envolvidas que atendam simultaneamente a todas as equações.

LINEARES

Forma Matricial do Sistema

Todo sistema linear está associado a uma equação matricial conforme a descrição a seguir:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_X = \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}}_b$$

A matriz A é denominada de **matriz dos coeficientes**, X é o vetor das incógnitas e B é o vetor dos termos independentes.

Assim, um sistema linear com m equações e n incógnitas fica representado pela equação matricial $AX = b$.

LINEARES

Matriz Ampliada do Sistema

É obtida acrescentando-se a matriz dos coeficientes uma coluna com os termos independentes.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

Observe no exemplo anterior, a matriz ampliada do sistema

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

LINEARES

Forma Matricial do Sistema

Classifica-se um sistema linear de acordo com o tipo de solução. De forma geral, um sistema de equações lineares pode ser classificado como:

- Sistema Possível e Determinado (SPD): possui apenas uma única solução
- Sistema Possível e Indeterminado (SPI): possui infinitas soluções
- Sistema Impossível (SI): não possui solução.

LINEARES

Teorema de Rouché-Capelli

A seguir apresentaremos o Teorema de Rouché-Capelli que nos fala sobre o tipo de solução (SPD, SPI ou SI) que um dado sistema linear possui:

“Um Sistema Linear com m equações e n incógnitas possui solução se e somente o posto da matriz ampliada (p_a) for igual ao posto da matriz dos coeficientes (p_c), isto é,

$$p_a = p_c = p$$

I. Se $p = n$ então, o sistema terá solução única (SPD).

II. Se $p < n$ então, o sistema terá infinitas soluções (SPI). Neste caso, para resolvê-lo, basta escolher $(n - p)$ variáveis e obter as outras p variáveis em função destas.”



ATENÇÃO

Se $p_a \neq p_c$ o sistema linear não possui solução(SI).

LINEARES

Seja o sistema com três equações e três incógnitas

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x - y + 3z = 0 \\ -x + y - 5z = 2 \end{cases}$$

A matriz ampliada é

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & -5 & 2 \end{bmatrix}$$

LINEARES

Para discutir e resolver este sistema, vamos escalonar esta matriz.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & -5 & 2 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ L_2 \rightarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \rightarrow L_3 + L_1 \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -4 & 3 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ L_2 \rightarrow -\frac{1}{3}L_2 \\ L_3 \rightarrow \frac{1}{2}L_3 \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & -2 & \frac{3}{2} \end{bmatrix} L_3 \rightarrow L_3 - L_2$$

LINEARES

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{5}{3} & \frac{5}{6} \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3 \rightarrow -\frac{3}{5}L_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} L_1 \rightarrow L_1 - L_3 \\ L_2 \rightarrow L_2 + \frac{1}{3}L_3 \end{matrix}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 \rightarrow L_1 - L_2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 \end{bmatrix} \rightarrow \text{FORMA ESCALONADA DA MATRIZ}$$

Observe que o posto da matriz é igual a três, $P_a = 3$

Para determinarmos o posto da matriz dos coeficientes devemos retirar a última coluna da matriz ampliada e contar o número de linhas não nulas da matriz obtida.

LINEARES

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



MATRIZ DOS COEFICIENTES

Logo $p_c = 3$.

Por fim, como $p_a = p_c = n = 3$ o sistema é possível e determinado (SPD).

Assim, a solução do sistema está pronta e pode ser obtida a partir do sistema equivalente

$$\begin{cases} x & = 1 \\ y & = \frac{1}{2} \\ z & = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Ou ainda, o vetor solução do sistema é

$$(x, y, z) = \left(1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

LINEARES

Método de Eliminação de Gauss

Este método é um dos mais adotados devido ao menor número de operações elementares que envolve. Ele consiste em reduzir a matriz ampliada do sistema, por operações elementares, a uma matriz que só difere da forma escalonada na seguinte condição:

“Toda coluna que contiver o primeiro elemento não nulo de uma linha deve ter todos abaixo deste iguais a zero”

Após a redução da matriz ampliada a esta forma, a solução final do sistema é obtida por substituição.

LINEARES

Método de Eliminação de Gauss

Observe como fica a resolução do sistema do exemplo se adotarmos o método de eliminação gaussiana:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & -5 & 2 \end{pmatrix} \text{ operações elementares } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -(1/3) & 2/3 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 \end{pmatrix}$$

O sistema equivalente é $\longrightarrow$
$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ y - \frac{1}{3}z = \frac{2}{3} \\ z = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

LINEARES

Seja o sistema linear:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 4 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = -4 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2 \end{cases}$$

A matriz ampliada é

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & -4 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right]$$

Após a utilização do método de Gauss, realizando as operações:

- 1) Na segunda Linha o resultado de 2ª.Linha menos a 1ª. Linha
- 2) Na terceira Linha o resultado de 3ª.Linha menos a 1ª. Linha
- 3) Na quarta Linha o resultado de 4ª.Linha menos a 1ª. Linha
- 4) Troca-se a segunda Linha com a quarta Linha
- 5) Multiplica-se a 2ª. Linha por - 0,5
- 6) Multiplica-se a 3ª. Linha por - 0,5
- 7) Multiplica-se a 4ª. Linha por - 0,5

LINEARES

A matriz ampliada ficou reduzida a:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{array} \right]$$

Usando o teorema de Roché-Capelli para discutir o sistema temos:

$$p_a = p_c = n = 4 \Rightarrow \text{SPD}$$

Logo, usando a substituição de variáveis, temos que o vetor solução do sistema é dado por:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1, -1, 2, -2)$$

LINEARES

Seja o sistema linear: A matriz ampliada é

$$\begin{cases} x + y - w = 0 \\ x - z + w = 2 \\ y + z - w = -3 \\ x + y - 2w = 1 \end{cases} \quad \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & 0 & -2 & 1 \end{array} \right]$$

Após a utilização do método de Gauss, a matriz ampliada ficou reduzida à matriz

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Então, $p_a = p_c = p = 3 < 4 = n \Rightarrow$ SPI com $n - p = 4 - 3 = 1$ variável livre.

LINEARES

O sistema equivalente associado é dado por

$$\begin{cases} x + y - w = 0 \\ y + z - 2w = -2 \\ w = -1 \end{cases}$$

Escolhendo a variável z como sendo a variável livre, temos:
 $w = -1$; $y = -4 - z$ e $x = 3 + z$

Para $z = a \in \mathbb{R}$ o vetor solução do sistema é
 $(x, y, z, w) = (3 + a, -4 - a, a, -1)$

LINEARES

Seja o sistema linear:

$$\begin{cases} x + y + z = -10 \\ 2x + y + z = 20 \\ y + z = 30 \end{cases}$$

A matriz ampliada é

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -10 \\ 2 & 1 & 1 & 20 \\ 0 & 1 & 1 & 30 \end{bmatrix}$$

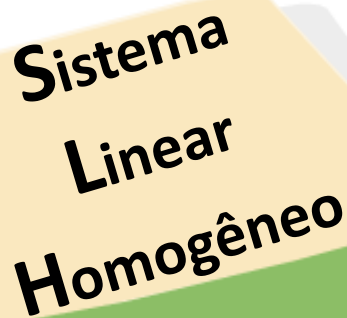
Após a utilização do método de Gauss-Jordan, a matriz ampliada ficou reduzida à matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Observe que $p_a = 3 \neq 3 = p_c \Rightarrow$ O sistema é SI.

A última equação do sistema informa que:

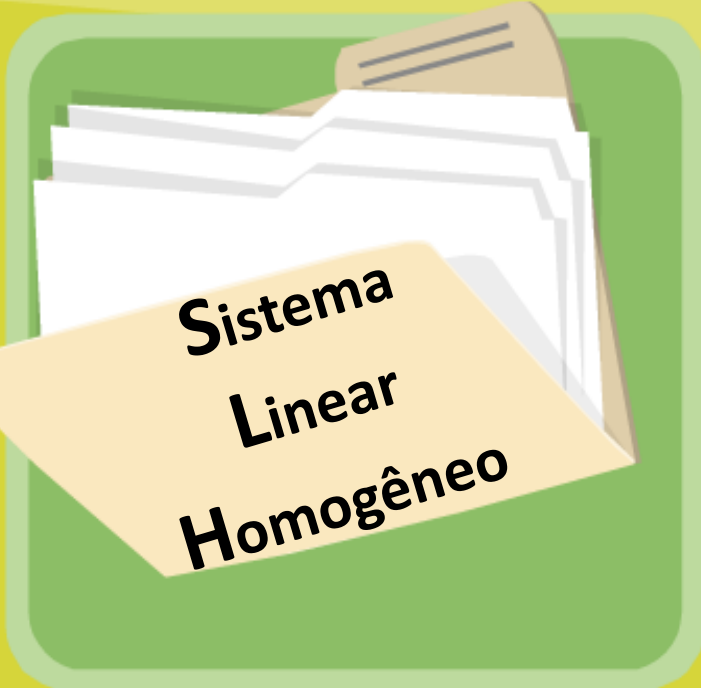
$$0x + 0y + 0z = 1$$



O vetor dos termos independentes $\mathbf{b}$ é o vetor nulo, isto é, o sistema é da forma:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}.x_1 + a_{12}.x_2 + \dots + a_{1n}.x_n = 0 \\ a_{21}.x_1 + a_{22}.x_2 + \dots + a_{2n}.x_n = 0 \\ \\ a_{m1}.x_1 + a_{m2}.x_2 + \dots + a_{mn}.x_n = 0 \end{array} \right.$$

LINEARES



**Sistema
Linear
Homogêneo**

Matricialmente, descrevemos um sistema homogêneo por:

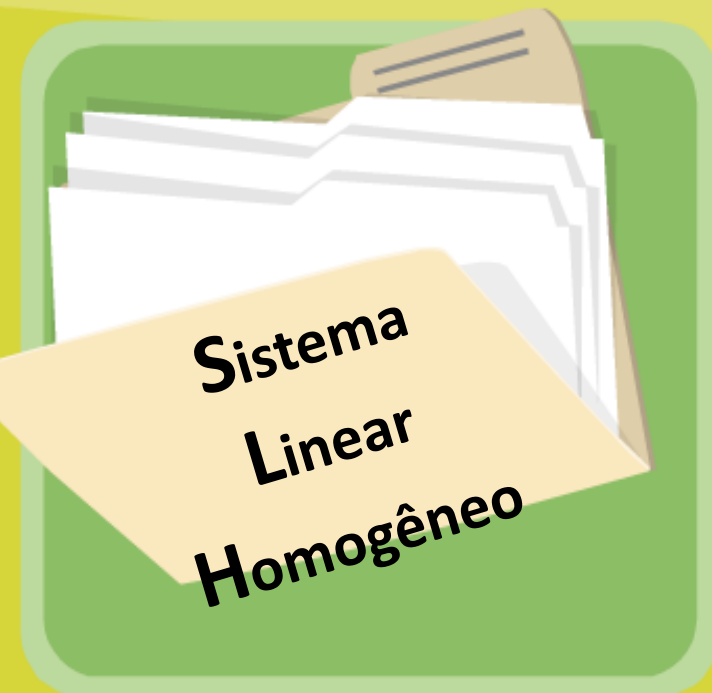
$$\mathbf{AX} = \mathbf{0}$$

Onde: A é a matriz dos coeficientes, X é o vetor das incógnitas e b é o vetor nulo.

Observe que como $p_a = p_c$ sempre (justifique!), um sistema homogêneo nunca será impossível pois sempre admitirá a solução trivial:

$$(X_1, X_2, \dots, X_n) = (0, 0, \dots, 0)$$

LINEARES



**Sistema
Linear
Homogêneo**

No entanto, um sistema homogêneo pode ainda ser SPI ($p_a = p_c, n$), isto é, pode admitir outras soluções além da solução trivial.

Neste caso, deveremos estabelecer $(n - p)$ variáveis livres e obter as outras p em função destas

LINEARES

Seja o sistema

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x - y + z = 0 \\ x + 2y - z = 0 \end{cases}$$

A matriz ampliada é da forma

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

LINEARES

Após o método de eliminação gaussiana, a matriz ampliada fica na forma

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Como, $p_a = p_c = n = 3$: Sistema Possível Determinado (SPD). Este sistema só admite solução trivial. Assim, $(x, y, z) = (0, 0, 0)$.

LINEARES

Resolução de sistemas utilizando inversão de matrizes

Um sistema de equações lineares com m equações e n incógnitas, com $m = n$, pode ser representado pela equação matricial $A X = b$, sendo A a matriz dos coeficientes (quadrada de ordem n).

Se a matriz A for inversível, isto é, se existir a matriz inversa A^{-1} , significa que o sistema é possível e determinado.

$$A X = b$$

$$\Rightarrow A^{-1}(AX) = A^{-1} b$$

$$\Rightarrow (A^{-1} A) X = A^{-1} b$$

$$\Rightarrow I_n X = A^{-1} b$$

$$\Rightarrow X = A^{-1} b$$

LINEARES

Seja o sistema

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x - y + 3z = 0 \\ -x + y - 5z = 2 \end{cases}$$

Logo, o vetor solução $x = A^{-1}b$

Ou ainda,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{7}{10} & -\frac{2}{5} & -\frac{1}{10} \\ \frac{1}{10} & -\frac{1}{5} & -\frac{3}{10} \end{pmatrix}}_{A^{-1}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}}_b = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

A forma matricial do sistema é

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

A solução do sistema é: $(x, y, z) = (1, 1/2, -1/2)$.

LINEARES

SÍNTESE DA AULA

Nessa aula você:

- Identificou, discutiu e resolveu um sistema de equações lineares;
- Aprendeu o método de Eliminação de Gauss;
- Identificou um sistema homogêneo e determinou a sua solução.

LINEARES



O QUE VEM NA PRÓXIMA AULA

Na próxima aula, abordaremos os seguintes assuntos:

- Interpretação geométrica das soluções de um Sistema Linear;
- Regra de Cramer.

SISTEMAS
DE EQUAÇÕES
LINEARES

SISTEMAS DE EQUAÇÕES

LINEARES



AULA 4

VISÃO GEOMÉTRICA DAS SOLUÇÕES DE UM SISTEMA
LINEAR E REGRA DE CRAMER

LINEARES

Interpretação geométrica da solução de um sistema linear no plano cartesiano ($\mathbb{R}^2$)

O conjunto de todos os pares ordenados de números reais é denotado por

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \text{Reais}\}$$

O plano $\mathbb{R}^2$ é representado geometricamente por dois eixos (X e Y) perpendiculares entre si no ponto (0,0) denominado origem dos eixos.

LINEARES

Exemplo 1

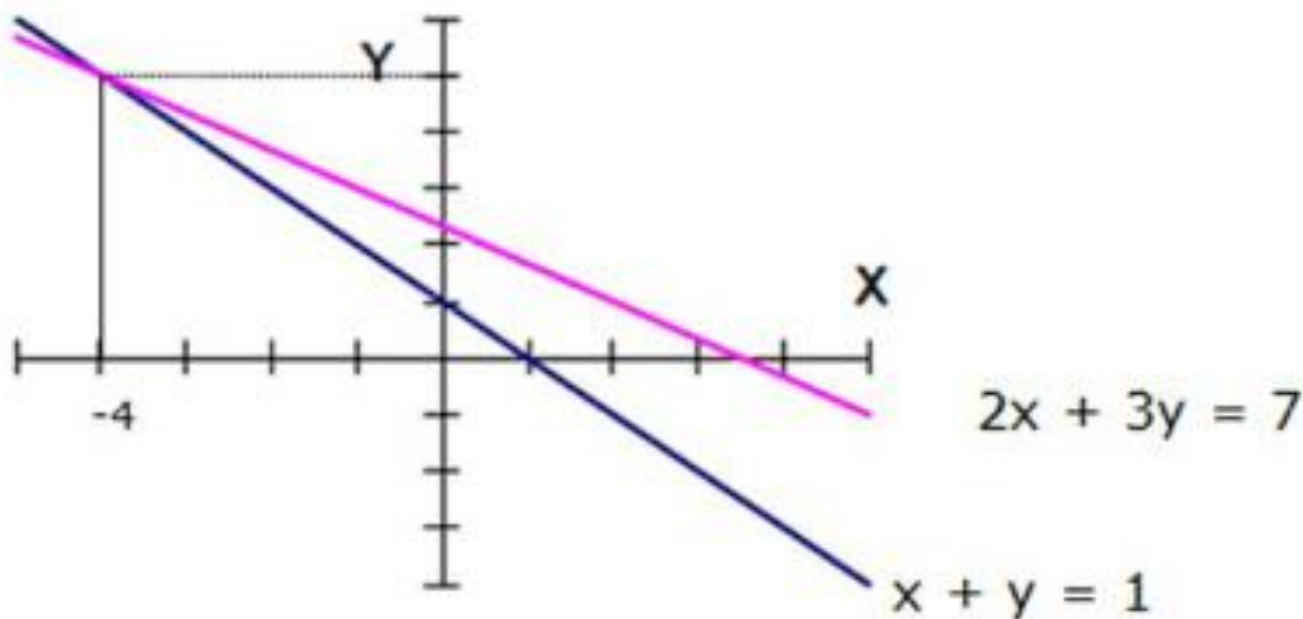
Considere, então, o sistema linear em duas variáveis x e y dado por

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + 3y = 7 \end{cases}$$

Cada equação deste sistema representa uma reta no plano $\mathbb{R}^2$

LINEARES

Exemplo 1



Observe que estas retas interceptam-se em um único ponto P cujas coordenadas correspondem à solução do sistema.

LINEARES

Exemplo 1

Aplicando o método de eliminação de Gauss para determinar a solução do problema temos:

- Matriz Ampliada
- Forma escalonada da Matriz Ampliada

$$\left(\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 7 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{array} \right)$$

Como $p_a = p_c = 2 = n \Rightarrow$ Sistema possível e determinado (SPD) admitindo uma única solução.

LINEARES

Exemplo 1

- Sistema equivalente à matriz escalonada

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ y = 5 \end{cases}$$

cuja a única solução é o ponto $(x, y) = (-4, 5)$.

LINEARES

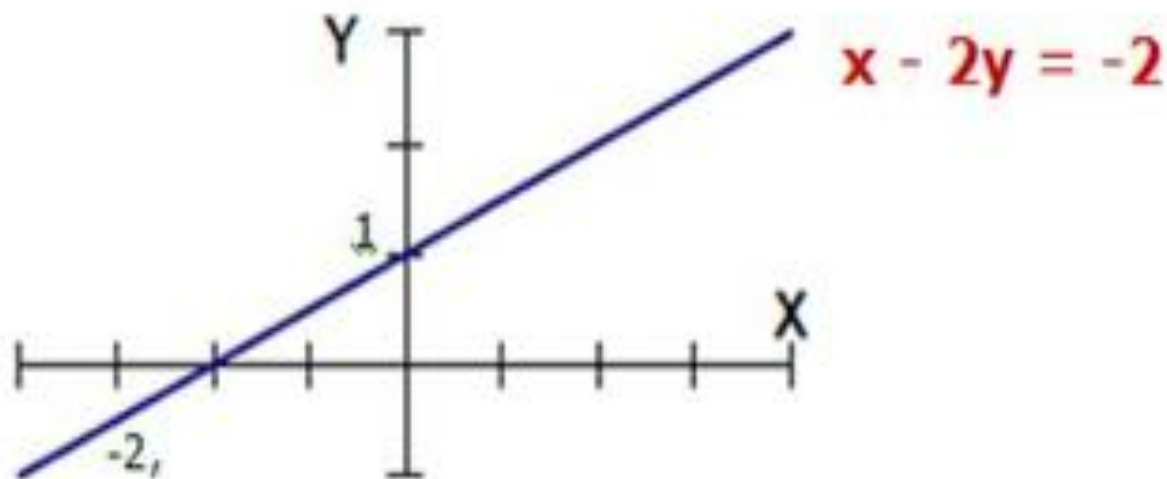
Exemplo 2

Dado o sistema linear

$$\begin{cases} x - 2y = -2 \\ 2x - 4y = -4 \end{cases}$$

LINEARES

Geometricamente, essas duas retas possuem gráficos coincidentes pelo fato de a equação $2x - 4y = -4$ ser múltipla da equação $x - 2y = -2$. Assim, diremos que as retas se interceptam em infinitos pontos.



LINEARES

Discutindo e resolvendo o sistema obtemos:

- Matriz Ampliada

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 2 & -4 & -4 \end{pmatrix}$$

- Matriz Escalonada

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Como $p_a = p_c = 1 < 2 = n \implies$ Sistema possível e indeterminado (SPI) com uma variável livre admitindo infinitas soluções.

LINEARES

- Sistema equivalente à matriz escalonada

$$\begin{cases} x - 2y = -2 \end{cases}$$

A variável livre é y podendo assumir qualquer valor real. A variável x que pode ser obtida em função de y é dada por

$$x = -2 + 2y$$

Ou ainda, para $y = a \in \mathbb{R}$ a solução do sistema é o par ordenado

$$(x, y) = (-2 + 2a, a)$$

LINEARES

Exemplo 3

1

2

3

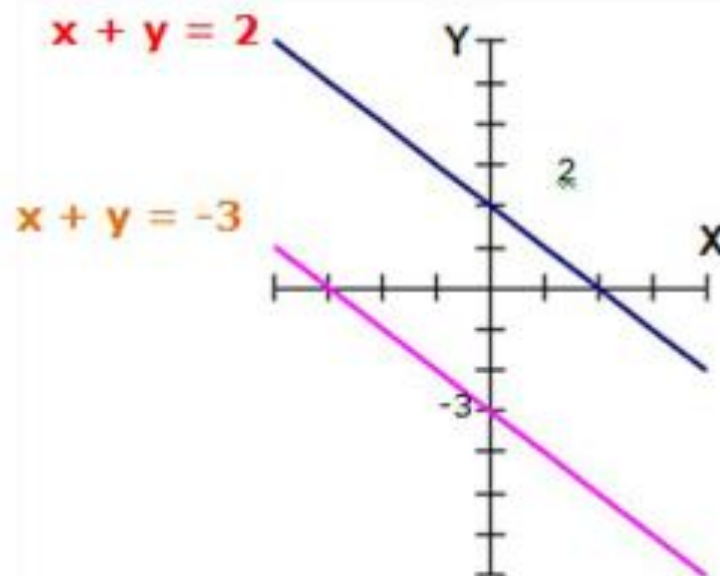
4

5

Dado o sistema linear

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ x + y = -3 \end{cases}$$

Geometricamente estas duas retas são paralelas



LINEARES

Exemplo 3

1

2

3

4

5

Discutindo e resolvendo o sistema, obtemos:

- Matriz Ampliada

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

- Matriz Escalonada

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

Como $p_a \neq p_c \Rightarrow$ O sistema não possui solução (SI). Ou ainda, não há ponto de interseção entre as retas.

LINEARES

Exemplo 3

1

2

3

4

5

Este estudo nos mostra que um sistema linear de duas incógnitas pode ser classificado por:

SPD $\Rightarrow$ Retas Concorrentes (interceptam-se em um único ponto).

SPI $\Rightarrow$ Retas Coincidentes (interceptam-se em infinitos pontos).

SI $\Rightarrow$ Retas Paralelas (não se interceptam ou interceptam-se no Infinito).

LINEARES

Interpretação geométrica da solução de um Sistema Linear no espaço (R^3)

O espaço R^3 é o conjunto de todas as triplas de números reais definido por

$$R^3 = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1, x_2 \text{ e } x_3 \in \mathbb{R}\}$$

Geometricamente o espaço R^3 é descrito por três eixos, X, Y e Z, que são perpendiculares entre si no ponto (0, 0, 0) denominado origem.

LINEARES



Considere o sistema linear

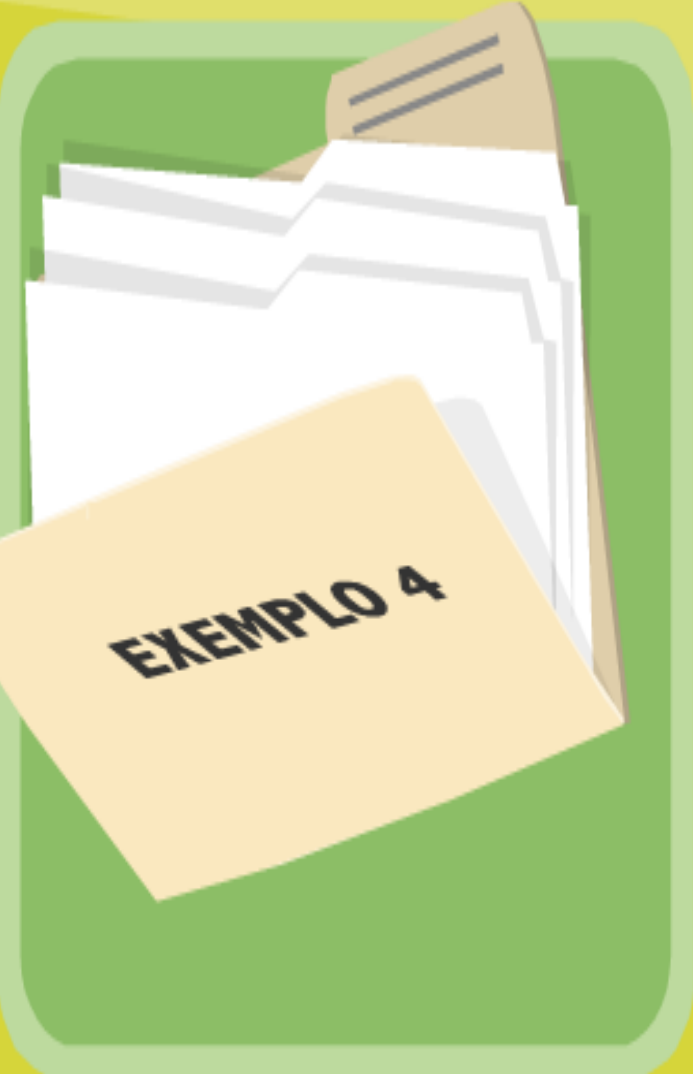
$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2y + z = 2 \\ y + 2z = 2 \end{cases}$$

Discutindo e resolvendo o sistema, obtemos:

Matriz Ampliada

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

LINEARES



EXEMPLO 4

Matriz Escalonada

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Como $P_A = P_C = n = 3$, o Sistema Possível Determinado (SPD) e a solução do sistema é o ponto

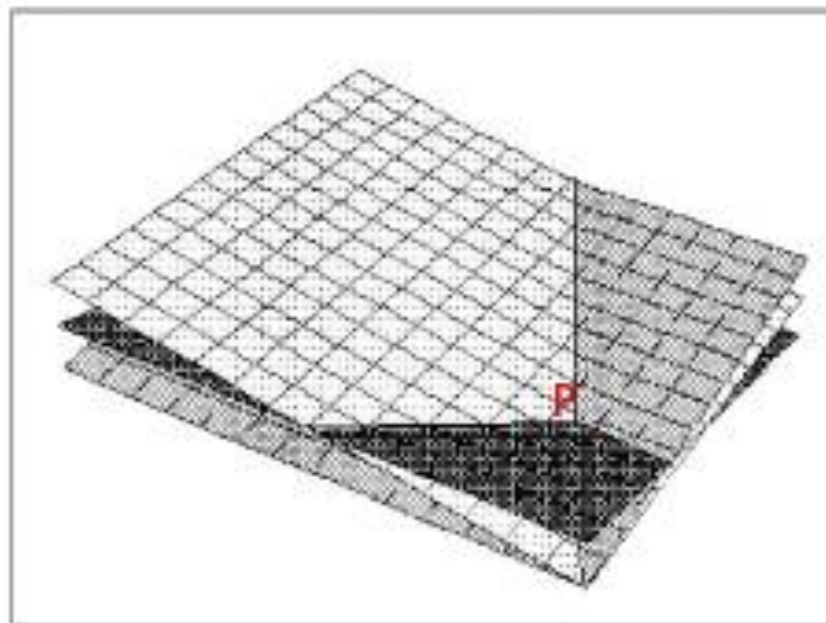
$$P(x, y, z) = (5/3, 2/3, 2/3)$$

LINEARES

An illustration of a green folder containing several white papers. The top paper is orange and has the text "EXEMPLO 4" written on it in black, bold, uppercase letters.

EXEMPLO 4

Geometricamente, cada equação linear do sistema é representada por um plano no espaço R^3 . O sistema representa três planos distintos que se interceptam no único ponto-solução dado por P .



LINEARES

Exemplo 5

Considere o sistema linear

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ y + 2z = 2 \\ x - z = 1 \end{cases}$$

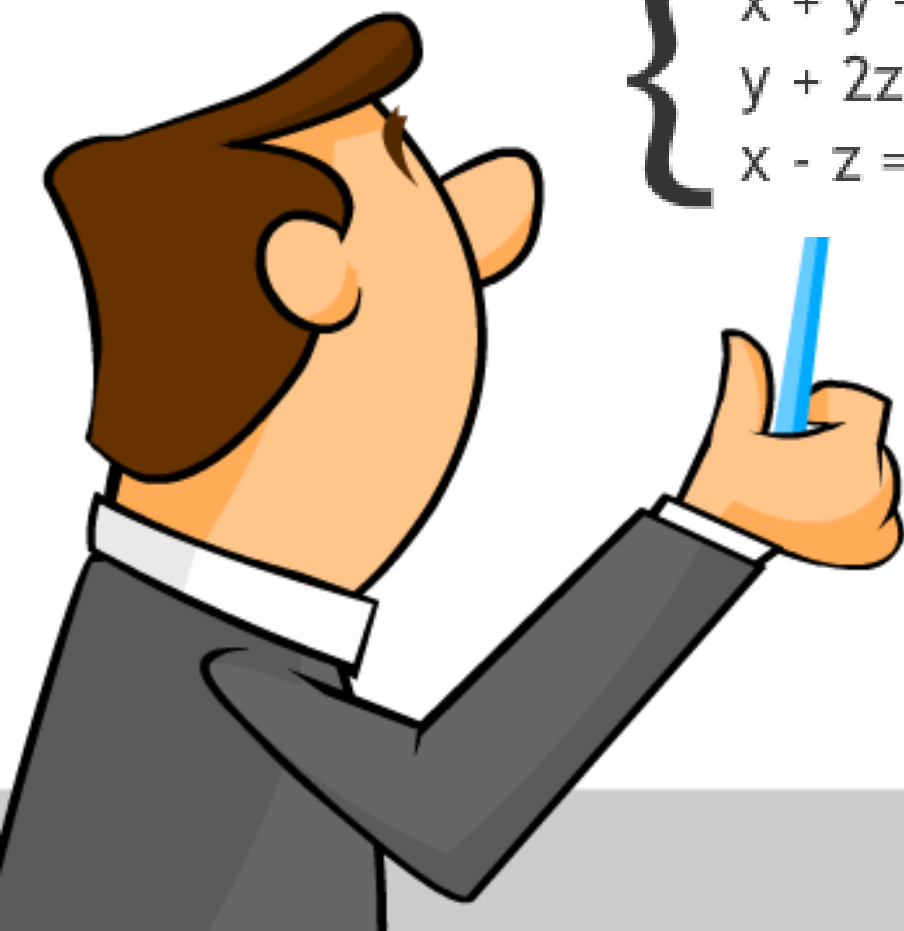
Discutindo e resolvendo o sistema, obtemos:

Matriz Ampliada

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Matriz Escalonada

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



LINEARES

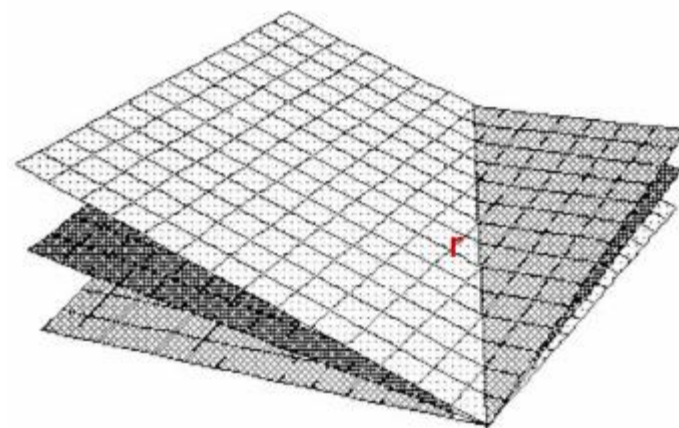
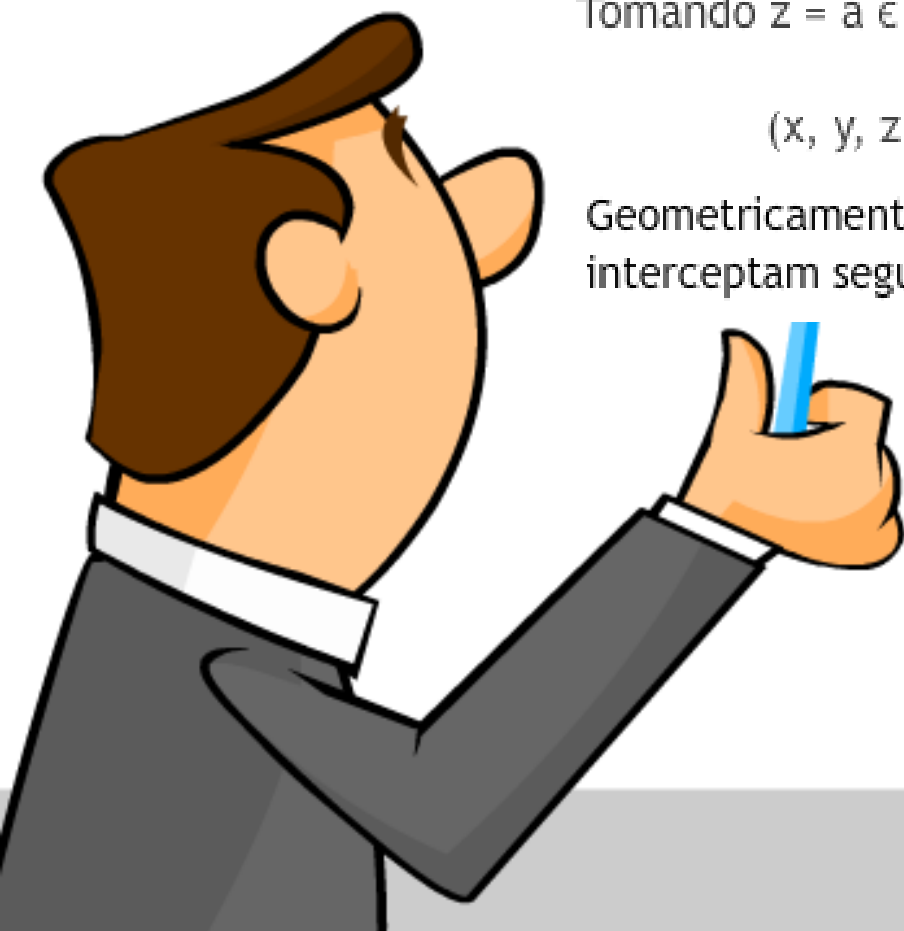
Exemplo 5

Como $P_A = P_C = 2 < 3 = n$, o Sistema Possível e Indeterminado (SPI) com uma variável livre.

Tomando $z = a \in \mathbb{R}$ como variável livre a solução do sistema é:

$$(x, y, z) = (1 + a, 2 - 2a, a)$$

Geometricamente, o sistema representa três planos distintos que se interceptam segundo uma reta (r).



LINEARES

Exemplo 6

Considere o sistema linear

$$\begin{cases} x + y + z = 10 \\ x + y + z = 20 \\ x + y + z = 30 \end{cases}$$

LINEARES

Exemplo 6

Discutindo e resolvendo o sistema, obtemos:

Matriz Ampliada

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 10 \\ 1 & 1 & 1 & 20 \\ 1 & 1 & 1 & 30 \end{pmatrix}$$

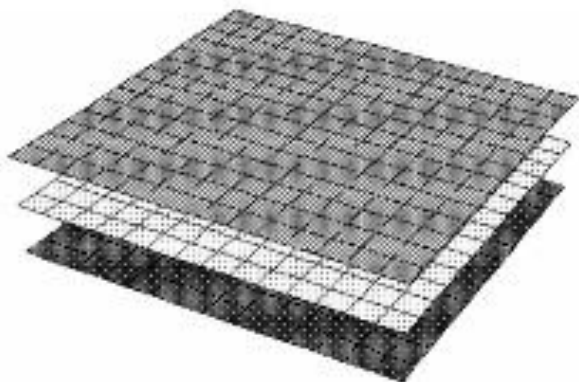
Matriz Escalonada

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

LINEARES

Exemplo 6

Como $P_A = 3 \neq P_C = 1$, o Sistema é Impossível (SI). As duas últimas equações são impossíveis.



Geometricamente, o sistema representa três planos paralelos.

LINEARES

A Regra de Cramer

É uma regra que só pode ser adotada para resolver sistemas lineares em que o número de equações é igual ao número de incógnitas. Baseia-se no cálculo da inversa da matriz A dos coeficientes do sistema implicando necessariamente em que esta matriz seja inversível, isto é,

$$\det (A) \neq 0$$

LINEARES

A Regra de Cramer

Suponha que desejamos resolver o sistema linear com n equações e n incógnitas

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{array} \right.$$

LINEARES

A Regra de Cramer

Na forma matricial, podemos escrever este sistema como: $Ax = b$ onde

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ é a matriz dos coeficientes;}$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ é a matriz das incógnitas e}$$

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \text{ é a matriz dos termos independentes.}$$

LINEARES

A Regra de Cramer

Como a matriz A deve ser necessariamente inversível, temos:

$$AX = b$$

$$A^{-1}(AX) = A^{-1}b$$

$$(A^{-1}A)X = A^{-1}b$$

$$I_n X = A^{-1}b$$

$$X = A^{-1}b$$

LINEARES

A Regra de Cramer

Por fim resolvendo-se essa equação matricial, concluímos que as variáveis $x_1, x_2, \dots, x_n$ são obtidas por meio dos seguintes cálculos:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\det(A)}$$

Observe que o numerador da fração que calcula o valor da variável x_1 é o determinante da matriz obtida da matriz A , obtida substituindo-se a primeira coluna pelo vetor dos termos independentes do sistema.

LINEARES

A Regra de Cramer

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & \mathbf{b_1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \mathbf{b_2} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & \mathbf{b_n} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\det(A)}$$

Analogamente, o numerador da fração que calcula x_2 é o determinante da matriz obtida da matriz A, obtida substituindo-se a segunda coluna pelo vetor dos termos independentes do sistema.

LINEARES

A Regra de Cramer

Prosseguimos desta forma até o cálculo da variável x^n .

$$x_n = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \dots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} \dots & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} \dots & b_n \end{vmatrix}}{\det(A)}$$

LINEARES

A Regra de Cramer

Vamos resolver o sistema linear a seguir pela regra de Cramer:

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x - y + 3z = 0 \\ -x + y - 5z = 2 \end{cases}$$

LINEARES

A Regra de Cramer

Note que o sistema possui três equações e três incógnitas e que

$\det(A) = 10 \neq 0 \Rightarrow A$ é matriz inversível

Logo,

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -5 \end{vmatrix}}{10} = \frac{10}{10} = 1$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & -5 \end{vmatrix}}{10} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{10} = \frac{-5}{10} = -\frac{1}{2}$$

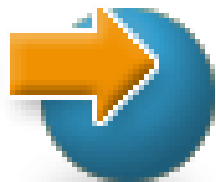
LINEARES

SÍNTESE DA AULA

Nesta aula, você:

- Analisou geometricamente as soluções de um sistema linear de duas e três variáveis;
- Aprendeu a utilizar a regra de Cramer para resolver certos tipos de sistemas lineares;
- Relacionou a inversa de uma matriz com a determinação da solução de um sistema linear.

LINEARES



O QUE VEM NA PRÓXIMA AULA

Na próxima aula, abordaremos os seguintes assuntos:

1. Vetores e operações no espaço n -dimensional;
2. Espaço Vetorial;
3. Subespaços vetoriais.



ESPAÇOS

VETORIAIS

ESPAÇOS

VETORIAIS



AULA 5

ESPAÇOS VETORIAIS

ESPAÇOS VETORIAIS

Vetores de dimensão n

São generalizações dos vetores do plano ($\mathbb{R}^2$) e do espaço ($\mathbb{R}^3$) com mais de três coordenadas. São representados por uma n -upla de números reais dispostas na forma $(u_1, u_2, \dots, u_n)$.

Por exemplo:

$u = (1, 2, -3, 4)$ é um vetor que possui quatro coordenadas.

O Espaço $\mathbb{R}^n$

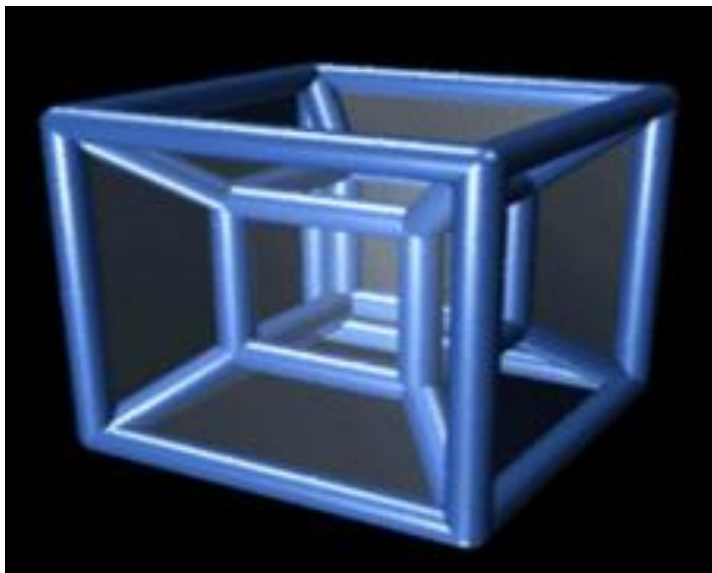


Figura 1. Projeção em 3D de um hipercubo realizando uma rotação simples em torno de um plano que corta a figura de frente para trás e de cima para baixo.

ESPAÇOS VETORIAIS

O espaço $\mathbb{R}^n$ ou o espaço real de dimensão n é definido como sendo o conjunto de todos os vetores de dimensão n . Isto é,

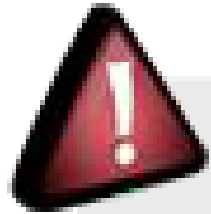
$$\mathbb{R}^n = \{ (u_1, u_2, \dots, u_n) , \text{ tal que } u_1, u_2, \dots, u_n \text{ são números reais} \}.$$

Por exemplo, o espaço real de dimensão quatro é definido a seguir por:

$$\mathbb{R}^4 = \{ (u_1, u_2, u_3, u_4) , \text{ tal que } u_1, u_2, u_3 \text{ e } u_4 \text{ são números reais} \}.$$

Observe que o vetor $u = (1, 2, -3, 4)$ pertencente ao espaço $\mathbb{R}^4$.

ESPAÇOS VETORIAIS



ATENÇÃO

No caso dos espaços $\mathbb{R}^n$, onde $n > 3$, perdemos a visão geométrica do problema. Entretanto, por generalização de conceitos, podemos trabalhar nestes espaços da mesma forma que trabalhamos em $\mathbb{R}^2$ e em $\mathbb{R}^3$.

ESPAÇOS VETORIAIS

Operações em $\mathbb{R}^n$

1

2

3

A soma de dois vetores e a multiplicação de um vetor por um número (escalar) em $\mathbb{R}^n$ são definidas da mesma forma que em $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$.

Se $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ e $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ são vetores do $\mathbb{R}^n$ e se α é um escalar real.

ESPAÇOS VETORIAIS

Operações em $\mathbb{R}^n$

1

2

3

Então,

$$u + v = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \dots, u_n + v_n) \text{ e}$$

$$\alpha u = (\alpha u_1, \alpha u_2, \dots, \alpha u_n).$$

Observe que o vetor soma $(u + v)$ e o vetor (αu) também são vetores de $\mathbb{R}^n$.

VETORIAIS

Operações em $\mathbb{R}^n$

1

2

3

Por exemplo,

Considere os vetores $u = (1, -2, 3, -1, 0)$ e $v = (9, -4, -2, 0, 3)$ de $\mathbb{R}^5$. Então, os vetores $u + v$, $3v$ e $u - 2v$ são dados respectivamente por:

$$u + v = (10, -6, 1, -1, 3)$$

$$3v = (27, -12, -6, 0, 9)$$

$$u - 2v = u + (-2v) = (-17, 6, 7, -1, -6)$$

ESPAÇOS VETORIAIS

Propriedades

As operações de soma e multiplicação por escalar no espaço R^n atendem a algumas propriedades estruturais que descreveremos a seguir:

Para u , v e w vetores quaisquer do R^n e α e β escalares reais

- (a) $(u + v) + w = u + (v + w)$ (propriedade associativa)
- (b) $u + v = v + u$ (propriedade comutativa)
- (c) O vetor nulo $0 = (0, 0, \dots, 0) \in R^n$ é tal que
 $u + 0 = 0 + u = u$ (propriedade de existência de elemento neutro)

ESPAÇOS VETORIAIS

Propriedades

(d) Para cada vetor u existe o vetor $(-u)$ de tal modo que
 $u + (-u) = 0$ (propriedade de existência do vetor simétrico de u)

$$(e) \alpha (u + v) = \alpha u + \alpha v$$

$$(f) (\alpha + \beta) u = \alpha u + \beta u$$

$$(g) (\alpha \beta) u = \alpha (\beta u)$$

$$(h) 1 \cdot u = u.$$

Observe que o vetor simétrico $(-u)$ do vetor u em $\mathbb{R}^n$ nada mais é que

$$-u = (-1) u = (-u_1, -u_2, \dots, -u_n)$$

ESPAÇOS VETORIAIS

Agora, que você já aprendeu um pouco de vetores em $\mathbb{R}^n$, procure responder as seguintes questões:

1. Se $u = (4, 2, -1, 5)$ e $v = (2, 3, -1, 4)$
então quanto vale o vetor $4u - 3v$?
2. Qual a dimensão dos vetores u e v do item 1?
3. Se $u = (1, 1, 0)$, $v = (-3, -1, 2)$, $w = (x, -1, y)$ e $r = (2, z, 3)$,
encontre os escalares x , y e z de modo que
 - (a) $w + r = v$
 - (b) $w - r = u$
4. Qual é o vetor nulo de $\mathbb{R}^7$?

ESPAÇOS VETORIAIS

Gabarito

1) $(10, -1, -1, 8)$

2) dimensão = 4

3) (a) $x = y = -1$ e $z = 0$;

(b) $x=3$, $y=3$ e $z=-2$

4) $(0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$

ESPAÇOS VETORIAIS

Espaços Vetoriais

Como vimos o espaço $\mathbb{R}^n$, com as operações usuais de soma (+) e de multiplicação por escalar ($\cdot$), satisfaz a algumas propriedades operacionais básicas. Na verdade, o que ocorre é que o esquema conjunto formado por $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ possui uma determinada estrutura matemática que se repete em outros tipos de conjuntos onde se definem operações semelhantes. Uma generalização desta idéia será definida pelo conceito a seguir:

ESPAÇOS VETORIAIS

Espaços Vetoriais

Um Espaço Vetorial Real é um conjunto qualquer V não vazio onde se definem duas operações básicas: Soma entre elementos de V e multiplicação de um elemento de V por um escalar real. Então,

- (I) Se u e v são elementos quaisquer de V ,
então $u + v$ é também um elemento de V ;
- (II) $(u + v) + w = u + (v + w)$, para quaisquer u, v e $w \in V$;

ESPAÇOS VETORIAIS

Espaços Vetoriais

(III) $u + v = v + u$, para quaisquer u e $v \in V$;

(IV) Existe um elemento nulo, denotado por 0 , em V de tal modo que $u + 0 = 0 + u = u$, para todo $u \in V$.

(V) Para cada $u \in V$, existe um elemento simétrico, denotado por $(-u)$, em V de tal modo que $u + (-u) = (-u) + u = 0$.

ESPAÇOS VETORIAIS

Espaços Vetoriais

(VI) Se u é um elemento qualquer de V e α é um escalar real então $\alpha \cdot u$ também é um elemento de V .

(III) $\alpha (u + v) = \alpha u + \alpha v$, com α escalar real, u e $v \in V$.

(IV) $(\alpha + \beta) u = \alpha u + \beta u$, com α e β escalares reais, u e $v \in V$.

(V) $(\alpha \beta) u = \alpha (\beta u)$, com α e β escalares reais, $u \in V$.

(VI) $1 u = u$, para $u \in V$.

ESPAÇOS VETORIAIS

Espaços Vetoriais

- Os elementos de um espaço vetorial V são chamados de vetores para qualquer que seja o conjunto V considerado.
- Quando os escalares envolvidos em V podem ser números complexos, obtém-se um espaço vetorial complexo.

Entretanto, os espaços vetoriais complexos não serão objeto de nosso estudo.

ESPAÇOS VETORIAIS

Espaços Vetoriais



O espaço $\mathbb{R}^n$ com as operações usuais de soma e multiplicação por escalar real constitui um espaço vetorial.



Considere o conjunto V de todas as matrizes de números reais com m linhas e n colunas, denotado por $M(m, n)$. Com as operações usuais de soma e de multiplicação por escalar real, o conjunto $V = M(m, n)$ constitui um espaço vetorial.

ESPAÇOS VETORIAIS

Espaços Vetoriais



Seja P_n o conjunto de todos os polinômios em x de grau menor ou igual a n com coeficientes reais. Isto é,

$$P_n = \{ p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n, \text{ tal que } a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R} \}.$$

Considere em P_n as operações usuais de soma e multiplicação por escalar dadas a seguir:

$$p_1(x) + p_2(x) = (a_0' + a_0'') + (a_1' + a_1'') x + (a_2' + a_2'') x^2 + \dots + (a_n' + a_n'') x^n$$

$$\alpha \cdot p_1(x) = \alpha a_0' + \alpha a_1' x + \alpha a_2' x^2 + \dots + \alpha a_n' x^n.$$

O conjunto P_n com essas operações constitui um espaço vetorial.

ESPAÇOS **V**ETORIAIS

Espaços Vetoriais



ATENÇÃO

Por fim, Espaço Vetorial nada mais é do que a estrutura algébrica em que passamos a trabalhar a partir deste momento.

ESPAÇOS VETORIAIS

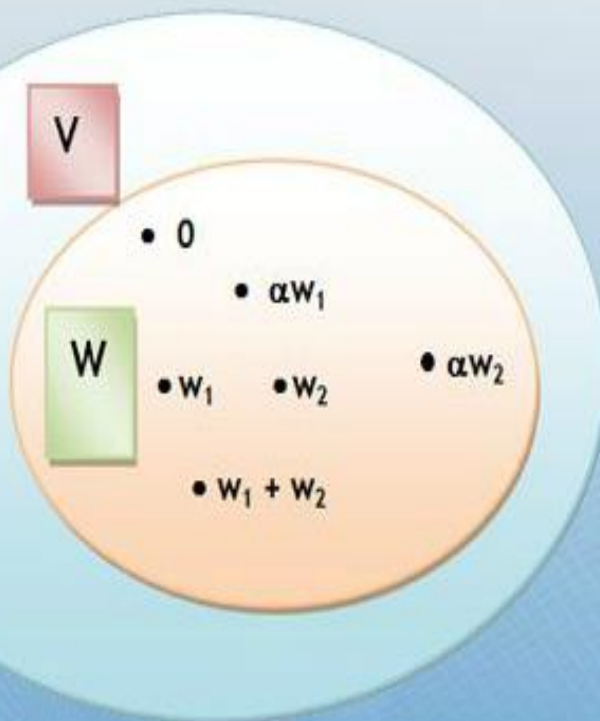
Espaços Vetoriais

Como vimos conjuntos como: espaço $\mathbb{R}^n$, Matrizes de ordem $m \times n$, polinômios de grau menor ou igual a n com coeficientes reais, com as operações de soma e multiplicação por escalar real usuais, constituem espaços vetoriais.

Num certo sentido podemos pensar que estes espaços são muito “amplos” e que, de alguma forma, pode ser interessante trabalhar em “pedaços” desses espaços que mantenham a mesma estrutura matemática de um espaço vetorial. Neste sentido, vamos definir a seguir um subespaço.

ESPAÇOS VETORIAIS

Subespaço vetorial



Seja V um espaço vetorial. Seja $W \neq \emptyset$ um subconjunto de V . Dizemos que W constitui um subespaço vetorial de V quando as duas condições abaixo forem satisfeitas:

- (a) Se w_1 e w_2 são elementos quaisquer de W então $w_1 + w_2$ também é elemento de W .
- (b) Se k é um escalar real qualquer e w_1 é um elemento qualquer de W então kw_1 também é um elemento de W .

ESPAÇOS VETORIAIS

Subespaço vetorial

- Intuitivamente um subespaço do espaço vetorial V é um espaço vetorial de tamanho “menor” dentro de V .
- As demais condições da definição de um espaço vetorial V estão automaticamente satisfeitas para os vetores de um subespaço vetorial W de V . Observe que, em particular, os vetores de W são vetores também de V .
- O próprio espaço V e o conjunto formado pelo vetor nulo de V são subespaços de V ditos subespaços triviais de V (Verifique!).
- Se W é um subespaço de V então o elemento nulo de V pertence a W obrigatoriamente (Verifique!).

ESPAÇOS VETORIAIS

Subespaço vetorial

Exemplo 1

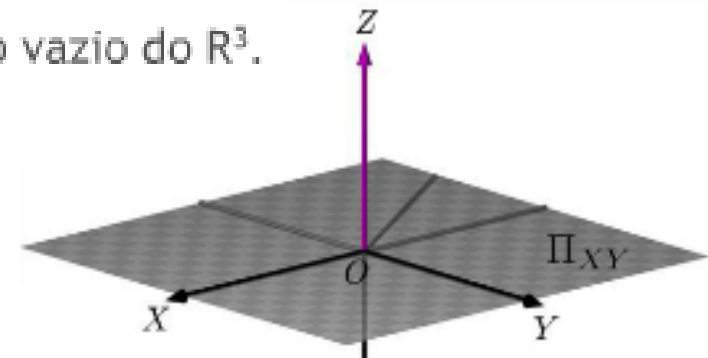
Seja V o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ com as operações usuais de soma e multiplicação por escalar. Seja W o conjunto de todos os vetores de V da forma $(x, y, 0)$ com $x, y \in \text{Reais}$. Temos que W (vide figura 1) é um subespaço vetorial de V .

De fato,

$W = \{(x, y, 0) \text{ tal que } x, y \in \mathbb{R}\}$ é um subconjunto não vazio do $\mathbb{R}^3$.

Por exemplo, o vetor nulo $(0, 0, 0)$ pertence a W .

Figura - O subespaço W do espaço $\mathbb{R}^3$ está representado na figura pela notação Π_{XY} .



(a) Sejam $w_1 = (x_1, y_1, 0)$ e $w_2 = (x_2, y_2, 0)$ vetores $\in W$, logo $w_1 + w_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, 0)$ também é pertencente a W .

(b) Seja k um escalar real qualquer e seja $w_1 = (x_1, y_1, 0)$ pertencente a W , logo $kw_1 = (kx_1, ky_1, 0) \in W$.

ESPAÇOS VETORIAIS

Subespaço vetorial

O conjunto W das matrizes de ordem 2×2 do tipo

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}, \text{ com } a \text{ e } b \text{ reais}$$



é um subespaço do espaço V das matrizes de ordem 2×2 .

De fato, $W \subset V$ e $W \neq \emptyset$ pois, por exemplo, a matriz nula $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ é um elemento de W .

(a) Sejam $w_1 = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & b_1 \end{pmatrix}$ e $w_2 = \begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix} \in W$, então

$$w_1 + w_2 = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & 0 \\ 0 & b_1 + b_2 \end{pmatrix} \in W.$$

(b) Seja $w_1 = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & b_1 \end{pmatrix} \in W$ e k um escalar real qualquer, então $kw_1 = \begin{pmatrix} ka_1 & 0 \\ 0 & kb_1 \end{pmatrix} \in W$.

ESPAÇOS VETORIAIS

Subespaço vetorial

Seja V o espaço $\mathbb{R}^2$ e seja W o conjunto dos vetores $= \{(x, x + 1) \text{ tal que } x \in \mathbb{R}\}$.
Então W não é um subespaço de V conforme mostraremos a seguir:



Observe que W é subconjunto de V ($W \subset V$) e $W \neq \emptyset$ pois, por exemplo, o vetor $(0, 1) \in W$.
Entretanto, como, por exemplo, $w_1 = (2, 3)$ e $w_2 = (-1, 0) \in W$ temos que

$$w_1 + w_2 = (1, 3) \notin W.$$

Observe que a segunda coordenada do vetor

$w_1 + w_2$ não corresponde a primeira coordenada adicionada de 1 (um).

ESPAÇOS VETORIAIS

Subespaço vetorial

Vale a pena saber que:

- Se W é um subespaço de V então o elemento nulo de V está obrigatoriamente em W .

Observe:

No Exemplo 3, poderíamos concluir de imediato que W não pode ser um subespaço de $\mathbb{R}^2$.

De fato, como o vetor nulo $0 = (0, 0)$ do espaço $\mathbb{R}^2$ não é um elemento pertencente ao subconjunto W .

ESPAÇOS VETORIAIS

Subespaço vetorial

Seja $V = \{ \text{matrizes de ordem } n \}$ e seja
 $W = \{ \text{matrizes } A \text{ de ordem } n \text{ tais que } \det A = 0 \}$.

O conjunto W não é um subespaço de V .

De fato, observe que se A e B são matrizes de determinantes nulos então a matriz $A + B$ não necessariamente terá determinante nulo, isto é, a condição (a) da definição de subespaço pode não ser verificada.

- Utilize um contra-exemplo, com matrizes simples e de ordem pequena, para verificar que quase sempre

$$\det(A + B) \neq \det A + \det B.$$



Exemplo 4

ESPAÇOS VETORIAIS

SÍNTESE DA AULA

Nesta aula, você:

- Aprendeu a generalização do conceito de vetor;
- Compreendeu como realizar operações básicas entre vetores do espaço $\mathbb{R}^n$;
- Estudou o conceito de espaço vetorial;
- Identificou subespaços de um espaço vetorial.

ESPAÇOS VETORIAIS



O QUE VEM NA PRÓXIMA AULA

Na próxima aula, você estudará os seguintes assuntos relacionados a espaços vetoriais

1. Combinação Linear de vetores.
2. Dependência e Independência Linear de vetores.
3. Introdução ao conceito de base ou referencial.

DEPENDÊNCIA E
INDEPENDÊNCIA
LINEAR

DEPENDÊNCIA E INDEPENDÊNCIA

LINEAR

AULA 6

DEPENDÊNCIA E INDEPENDÊNCIA LINEAR

LINEAR

Combinação linear

1

2

3

4

5

Uma característica fundamental de um espaço vetorial qualquer é a possibilidade de determinação de novos vetores a partir de um conjunto de vetores conhecidos.

Esta ideia simples motiva a definição que se segue:



ATENÇÃO

Sejam os n vetores $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ pertencentes ao espaço vetorial real V . Uma **combinação linear** entre estes vetores é um vetor w , também pertencente a V , tal que:

$$w = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n,$$

onde $a_1, a_2, \dots, a_n$ são escalares reais.

LINEAR

Combinação linear

1

2

3

4

5

$3\vec{u}$

$4\vec{v}$

$$\vec{w} = 3\vec{u} + 4\vec{v}$$

O vetor $\vec{w}$ é uma combinação linear dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

LINEAR

Combinação linear

1

2

3

4

5

Por exemplo,

Para o espaço vetorial $V = \mathbb{R}^2$, podemos mostrar que o vetor $w = (2, -3)$ é uma combinação linear dos vetores $v_1 = (1, 1)$ e $v_2 = (0, 1)$ de $\mathbb{R}^2$.

De fato, devemos achar escalares reais a_1 e a_2 de modo que

$$w = a_1 v_1 + a_2 v_2$$

LINEAR

Combinação linear

1

2

3

4

5

Substituindo-se w , v_1 e v_2 na igualdade acima, obtemos:

$$(2, -3) = a_1 (1, 1) + a_2 (0, 1).$$

Combinando os termos do lado direito e
igualando os vetores obtidos, temos

$$(2, -3) = (a_1, a_1) + (0, a_2)$$

$$\Rightarrow (2, -3) = (a_1, a_1 + a_2)$$

LINEAR

Combinação linear

1

2

3

4

5

Ou ainda, o sistema linear de equações abaixo deve ser resolvido

Este sistema possui solução dada por:

$$a_1 = 2$$

e

$$a_2 = -5.$$

$$\begin{cases} a_1 & = 2 \\ a_1 + a_2 & = -3 \end{cases}$$

Observe que, o vetor w é uma combinação linear dos vetores v_1 e v_2 descrita por:

$$w = 2 v_1 - 5 v_2$$

LINEAR

Vamos estabelecer a seguir o procedimento que deve ser adotado para verificar uma combinação linear dentro do espaço vetorial das matrizes de ordem (2×2) :

Considere a matriz $w = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -1 & 10 \end{pmatrix}$. É possível escrever essa matriz como combinação linear das matrizes

$v_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$? Procedendo como no exemplo anterior,

devemos encontrar os escalares reais a_1 , a_2 e a_3 de modo que

$$W = a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3$$

Ou ainda, substituindo-se as matrizes dadas na expressão, temos:

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -1 & 9 \end{pmatrix} = a_1 \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + a_3 \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

LINEAR

Operando o lado direito da expressão e comparando matrizes, obtemos o seguinte sistema linear de equações a ser resolvido:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_1 + a_2 + 2a_3 = 5 \\ -a_1 + a_2 + 2a_3 = 1 \\ -a_3 = -1 \\ 3a_1 + 2a_2 + a_3 = 9 \end{array} \right.$$

O sistema não possui solução, isto é, não existem escalares reais a_1 , a_2 e a_3 que satisfaçam simultaneamente a todas as equações do sistema. Consequentemente, a matriz w não é combinação linear das matrizes v_1 , v_2 e v_3 .

LINEAR



ATENÇÃO

A determinação de uma combinação linear entre os vetores de um espaço vetorial implicará sempre na discussão e resolução de um sistema linear de equações.

Conclusão:

Se o sistema linear gerado possuir solução, a combinação linear entre os vetores será possível. No caso do sistema linear não possuir solução, a combinação linear entre os vetores não será possível

LINEAR

Espaço vetorial gerado por um conjunto de vetores

Os vetores fixos $v_1, v_2, \dots, v_n$ em um espaço vetorial V geram V se todo vetor de V for uma combinação linear de $v_1, v_2, \dots, v_n$.

- A representação do espaço vetorial V descrita na forma

$$V = [v_1, v_2, \dots, v_n]$$

indicará que V é gerado pelos vetores $v_1, v_2, \dots, v_n$.

LINEAR

O procedimento para verificar se os vetores $v_1, v_2, \dots, v_n$ geram o espaço vetorial V é o seguinte:



Passo 1:
Escolha um vetor v qualquer em V .



Passo 2:
Verifique se v é combinação linear dos vetores dados.
Se for, então os vetores dados geram V . Se não, eles não geram V .

LINEAR

Exemplo 1

O espaço $\mathbb{R}^2$ é gerado pelos vetores $v_1 = (1, 0)$ e $v_2 = (0, 1)$.

De fato, observe a seguir que qualquer que seja o vetor $v = (x, y)$ de $\mathbb{R}^2$ pode ser expresso como uma combinação linear de v_1 e v_2 .

$$(x, y) = x(1, 0) + y(0, 1).$$

Utilizando a representação adotada,

$$\mathbb{R}^2 = [(1, 0), (0, 1)]$$

LINEAR

Exemplo 2

O espaço $\mathbb{R}^n$ é gerado pelos n vetores definidos a seguir:

$$\mathbb{R}^n = [(1, 0, \dots, 0) , (0, 1, \dots, 0), \dots, (0, 0, \dots, 1)].$$

De fato, considere o vetor genérico $v = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, então:

$$v = (x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1 (1, 0, \dots, 0) + x_2 (0, 1, \dots, 0) + \dots + x_n (0, 0, \dots, 1).$$

LINEAR

Exemplo 3

Seja o espaço vetorial descrito pelo conjunto de todas as matrizes triangulares superiores de ordem (2×2) . Ou ainda,

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}, a, b \text{ e } c \in \mathbb{R} \right\}$$

Então, V é gerado pelas matrizes

$$V = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right].$$

De fato, qualquer que seja a matriz $v \in V$ temos que

$$v = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

LINEAR

Para fixar os conceitos de combinação linear e espaço gerado por conjunto de vetores, resolva os exercícios a seguir:

1

2

3

1- Considere o subespaço S do $\mathbb{R}^4$ que é gerado pelos vetores $v_1=(1, 1, -2, 4)$, $v_2=(1, 1, -1, 2)$ e $v_3=(1, 4, -4, 8)$. Podemos afirmar que o vetor $v=(2/3, 1, -1, 2)$ pertence a S ? E o vetor $(0, 0, 1, 1)$?

LINEAR

Para fixar os conceitos de combinação linear e espaço gerado por conjunto de vetores, resolva os exercícios a seguir:

1

2

3

Tentar expressar os vetores como combinação linear dos vetores geradores.

O vetor $v = 0 \cdot v_1 + \frac{5}{9} \cdot v_2 + \frac{1}{9} \cdot v_3$, logo pertence a S .

O vetor $(0, 0, 1, 1)$ não pertence.

LINEAR

Para fixar os conceitos de combinação linear e espaço gerado por conjunto de vetores, resolva os exercícios a seguir:

1

2

3

Seja W o subespaço das matrizes de ordem (2×2) definido por

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} 2a & a+b \\ 0 & a-c \end{pmatrix} \text{ tal que } a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\text{A matriz } A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in W?$$

$$\text{E a matriz } B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \in W?$$

LINEAR

Para fixar os conceitos de combinação linear e espaço gerado por conjunto de vetores, resolva os exercícios a seguir:

1

2

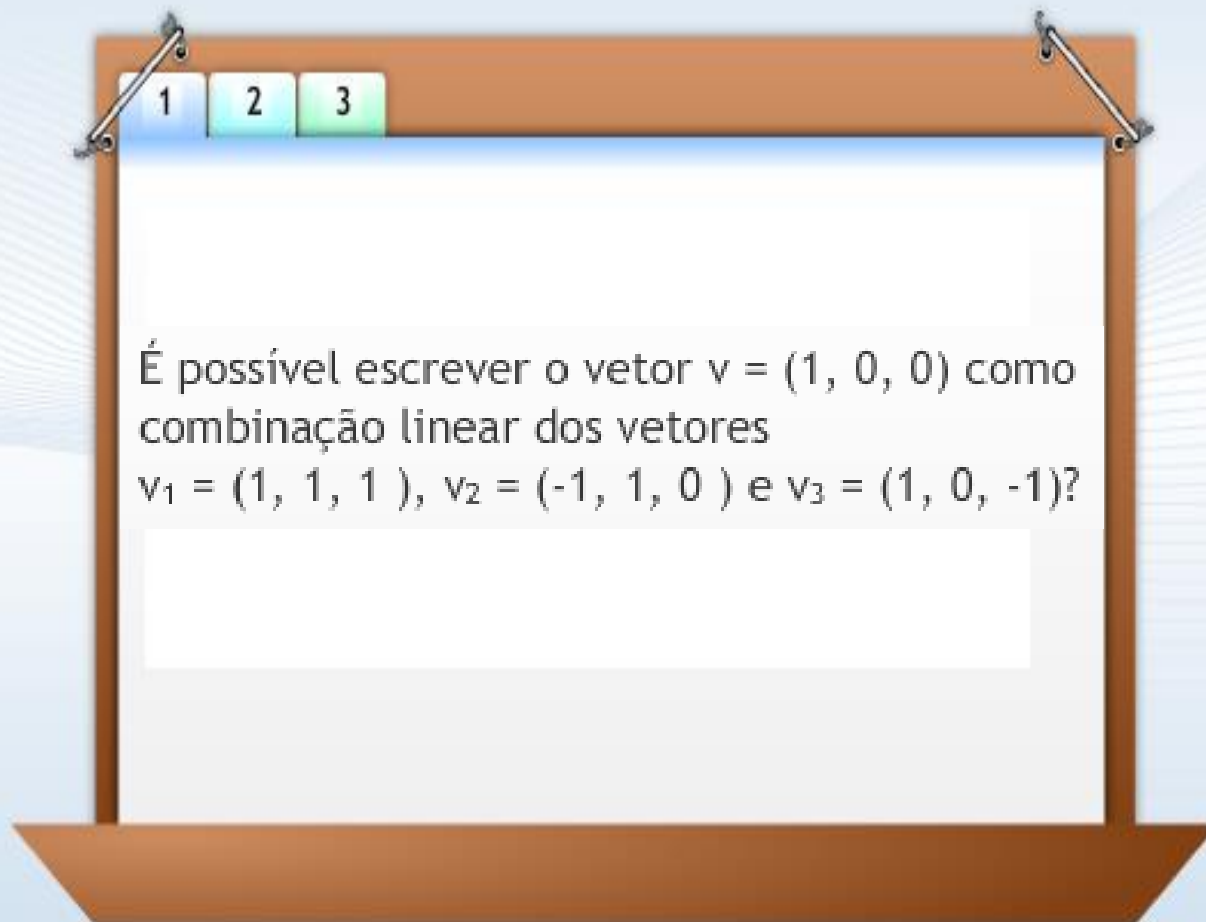
3

A matriz A pertence a W . Observe que $a=0$; $b=-2$ e $c=1$.

A matriz B não pertence a W .

LINEAR

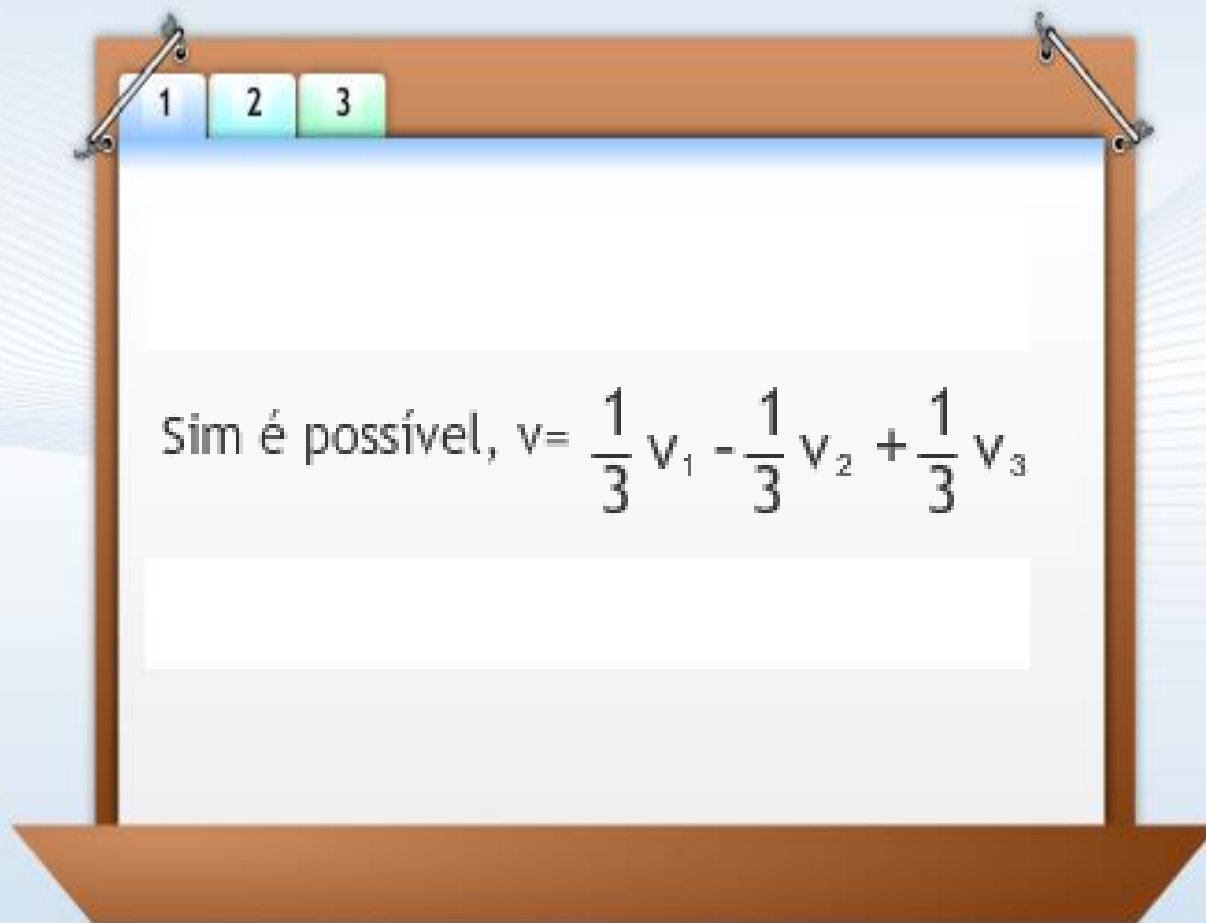
Para fixar os conceitos de combinação linear e espaço gerado por conjunto de vetores, resolva os exercícios a seguir:



DEPENDÊNCIA E INDEPENDÊNCIA

LINEAR

Para fixar os conceitos de combinação linear e espaço gerado por conjunto de vetores, resolva os exercícios a seguir:



LINEAR

Independência linear

O conceito de independência linear entre vetores aliado ao conceito de vetores geradores irá propiciar uma descrição completa de um espaço vetorial V a partir de um conjunto de vetores fixos.

Como veremos a seguir a ideia básica será a de obter um ou mais referenciais para o espaço V e, a partir daí, representar seus vetores em relação a estes referenciais.

LINEAR

Independência linear

Seja $\beta = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ um conjunto de n vetores de um espaço vetorial V .

Dizemos que o conjunto β é **linearmente independente**

(LI), ou os vetores $v_1, v_2, \dots, v_n$ são LI, se a combinação linear nula

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n = 0$$

implicar em todos os escalares $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$.

LINEAR

Independência linear

Caso na combinação linear nula exista pelo menos um escalar $a_i \neq 0$ para algum $i = 1, \dots, n$, então o conjunto é dito

linearmente dependente (LD), ou os vetores $v_1, v_2, \dots, v_n$ são LD.

Observe nos exemplos a seguir como podemos identificar se um conjunto de vetores é LI ou LD:

LINEAR

Independência linear

Exemplo 1

Os vetores $v_1 = (1, 1, 1)$, $v_2 = (0, 1, 1)$ e $v_3 = (0, 0, 1)$ do espaço $\mathbb{R}^3$ são **linearmente independentes**.

De fato, considere a combinação linear nula dos vetores v_1 , v_2 e v_3 dada por: $a_1 (1, 1, 1) + a_2 (0, 1, 1) + a_3 (0, 0, 1) = (0, 0, 0)$.

Vamos, agora operar o lado esquerdo desta igualdade e comparar os vetores obtidos, então

$$\left\{ \begin{array}{lcl} a_1 & = & 0 \\ a_1 + a_2 & = & 0 \\ a_1 + a_2 + a_3 & = & 0 \end{array} \right. ,$$

O sistema linear homogêneo de equações obtido é tal que a única solução possível é a solução trivial, dada por, $a_1 = a_2 = a_3 = 0$.

LINEAR

Independência linear

Exemplo 2

As matrizes $v_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ e $v_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ do espaço das matrizes de ordem

(2×2) são **linearmente independentes**.

De fato, considere a combinação linear nula de v_1 e v_2 , dada por:

$$a_1 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Então,

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_1 \\ a_2 & a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

implicando em , $a_1 = a_2 = 0$.

LINEAR

Independência linear

Exemplo 3

Os vetores $(1, 1)$, $(2, -1)$ e $(0, 1)$ do $\mathbb{R}^2$ são linearmente dependentes. De fato, considere a combinação linear nula dos vetores

$$a_1 (1, 1) + a_2 (2, -1) + a_3 (0, 1) = (0, 0).$$

Efetuada as operações do lado esquerdo da igualdade e comparando os vetores, temos o sistema homogêneo

$$\begin{cases} a_1 + 2 a_2 &= 0 \\ a_1 - a_2 + a_3 &= 0 \end{cases}$$

que possui infinitas soluções (outras soluções além da trivial).

Por exemplo, $a_1 = -2$, $a_2 = 1$ e $a_3 = 3$ é uma das soluções do sistema.

Em resumo, os vetores são LD, pois, por exemplo, $-2 v_1 + v_2 + 3 v_3 = 0$ é uma combinação linear nula com escalares não nulos.

LINEAR

Teorema

Seja $\beta = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ um conjunto de n vetores do espaço vetorial V . Então β é LD se, e somente pudermos escrever pelo menos um vetor v_i de β como combinação linear dos outros vetores de β .

- A demonstração deste teorema é bastante simples e pode ser encontrada nos textos recomendados.

LINEAR

A nossa questão agora é: como podemos utilizar o teorema?

No caso do Exemplo 3, podemos afirmar que v_1 , v_2 e v_3 são LD. Observe que, por exemplo,

$$v_2 = 2 v_1 - 3 v_3 ,$$

isto é, v_2 foi escrito como uma combinação linear dos vetores v_1 e v_3 . Analogamente,

$$v_1 = 1/2 \cdot v_2 + 3/2 \cdot v_3, \text{ ou ainda}$$

$$v_3 = 2/3 v_1 - 1/3 v_2$$

LINEAR

A nossa questão agora é: como podemos utilizar o teorema?

Nos Exemplos 1 e 2, podemos afirmar que os respectivos vetores são LI pois, não temos como expressar nenhum deles como combinação linear dos outros (Verifique!).

LINEAR

Atividade Proposta

Para fixar os conceitos de independência e dependência linear resolva os exercícios propostos a seguir:

I. Quais os conjuntos abaixo de vetores são LI? Quais são LD? No caso de vetores LD expresse combinação linear dos outros.

(a) $\{(1, 2, -1), (3, 2, 5)\}$.

(b) $\{(1, 2, 3), (1, 1, 1), (1, 0, 1)\}$.

(c) $\{(1, 1, 2, 1), (1, 0, 0, 2), (4, 6, 8, 6), (0, 3, 2, 1)\}$.

(d) $\{(1, -2, 3, -1), (-2, -4, -6, 2)\}$.

(e) $\{(4, 2, -1, 3), (6, 5, -5, 1), (2, -1, 3, 5)\}$.

LINEAR

Atividade Proposta

Forma prática de verificar a condição LI ou LD para um conjunto de vetores.

Disponha os vetores como linhas de uma matriz A ,

depois proceda da seguinte maneira: (a) Se a matriz A obtida for quadrada, calcule o seu determinante; caso $\det A = 0$ então, os vetores em questão são LD caso $\det A \neq 0$ os vetores são LI. (b) Se a matriz A obtida não for quadrada, calcule seu posto; se o posto de A for menor que o número de vetores envolvidos, então os vetores são LD, caso contrário, são LI.

Gabarito

- a) LI
- b) LI
- c) LD
- d) LI
- e) LD

LINEAR

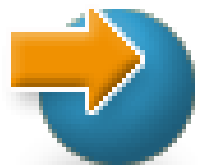
SÍNTESE DA AULA

Nesta aula, você:

- Aprendeu a estabelecer combinações lineares entre vetores;
- Identificou conjuntos geradores de espaços vetoriais;
- Verificou a condição de dependência e independência linear para um conjunto de vetores.

DEPENDÊNCIA E INDEPENDÊNCIA

LINEAR



O QUE VEM NA PRÓXIMA AULA

Na próxima aula, abordaremos os seguintes assuntos:

- A determinação de uma base e a dimensão de um espaço vetorial.
- Alguns resultados que facilitarão a identificação de uma base.
- As coordenadas de vetores em relação a uma base.

BASE E DIMENSÃO
DE UM ESPAÇO
VETORIAL

BASE E DIMENSÃO DE UM ESPAÇO **V**ETORIAL



AULA 7

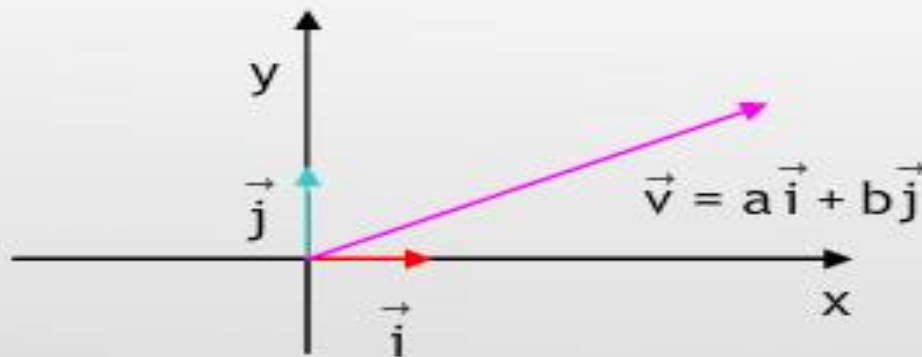
BASE E DIMENSÃO DE UM ESPAÇO VETORIAL

BASE E DIMENSÃO DE UM ESPAÇO VETORIAL

Geometria Plana

Na geometria plana, o conjunto $\beta = \{\vec{i}, \vec{j}\}$ define uma base ou referencial para a representação de todos os vetores do plano cartesiano.

Representação do vetor $\vec{v}$ na base canônica de $\mathbb{R}^2$

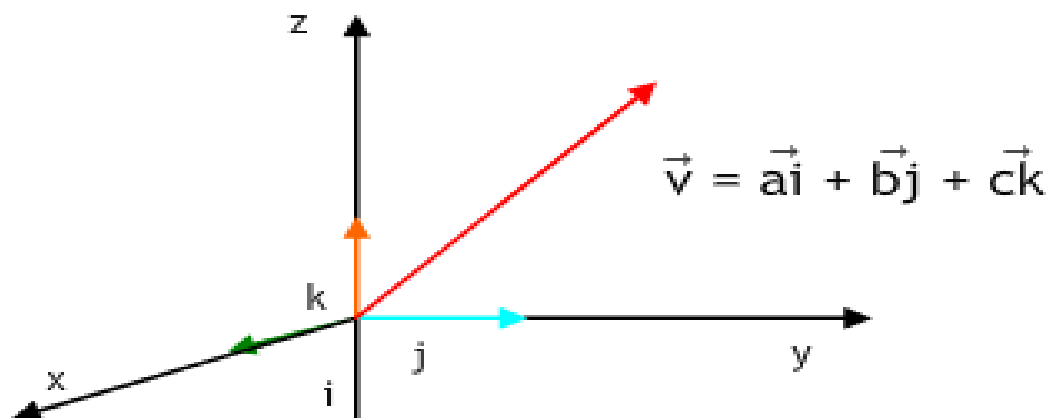


BASE E DIMENSÃO DE UM ESPAÇO VETORIAL

Geometria Espacial

Na geometria espacial, o conjunto $\beta = \{ \vec{i}, \vec{j}, \vec{k} \}$ define uma base ou referencial para a representação dos vetores no espaço.

Representação do vetor $\vec{v}$ na base canônica de $\mathbb{R}^3$



BASE E DIMENSÃO DE UM ESPAÇO VETORIAL

Conjuntos

A ideia a seguir é construir conjuntos que, com um número mínimo de vetores, possam servir como bases ou referenciais para os espaços vetoriais.



ATENÇÃO

Seja $\beta = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ um conjunto de vetores do espaço vetorial V .

Dizemos, então, que β constitui uma base para V quando:

(a) Seus vetores geram o espaço V . Isto é,

$$V = [v_1, v_2, \dots, v_n]$$

(b) Seus vetores são linearmente independentes.

BASE E DIMENSÃO DE UM ESPAÇO VETORIAL

Conjuntos

Analise os exemplos que apresentaremos a seguir e veja como devemos proceder para identificar uma base para um espaço vetorial:

BASE E DIMENSÃO DE UM ESPAÇO VETORIAL

Conjuntos

Exemplo 1

O conjunto de vetores $\beta = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ é uma base para o espaço $\mathbb{R}^3$. De fato,

(a) $\mathbb{R}^3 = [(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)]$.

Observe que todo vetor (x, y, z) do $\mathbb{R}^3$ pode ser escrito como combinação linear dos vetores de β , isto é,

$$(x, y, z) = x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) + z(0, 0, 1).$$

(b) β é LI.

Forme a matriz A cujas linhas são os vetores do conjunto β .

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Como $\det A = 1 \neq 0$, β é LI

• A base $\beta = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ é a base canônica de $\mathbb{R}^3$.

BASE E DIMENSÃO DE UM ESPAÇO VETORIAL

Conjuntos

Exemplo 2

O conjunto $\beta = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ constitui uma base para o espaço das matrizes de ordem (2×2) .

De fato,

(a) Toda matriz genérica de ordem (2×2) é uma combinação linear das matrizes de β .

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + w \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) β é LI.

De fato,

$$a_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + a_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + a_4 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

implicará em $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 0$ (Verifique!).

BASE E DIMENSÃO DE UM ESPAÇO VETORIAL

Conjuntos

Exemplo 3

O conjunto $\beta = \{(1, 1), (1, -1)\}$ constitui uma base para o espaço $\mathbb{R}^2$.

(a) $\mathbb{R}^2 = [\beta]$.

Observe que todo vetor (x, y) do $\mathbb{R}^2$ pode ser escrito como combinação linear dos vetores de β , isto é,

$$(x, y) = \frac{x+y}{2} (1, 1) + \frac{x-y}{2} (1, -1) \quad (\text{Prove!})$$

(b) β é LI.

Forme a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ cujas linhas são os vetores de β .

Como $\det A = -2 \neq 0$, β é LI.

BASE E DIMENSÃO DE UM ESPAÇO VETORIAL

Teoremas

1

2

3

4

5

A seguir, enunciaremos e exemplificaremos alguns teoremas relacionados com bases de um espaço vetorial. As demonstrações podem e devem ser vistas nos livros textos indicados.

BASE E DIMENSÃO DE UM ESPAÇO VETORIAL

Teoremas

1

2

3

4

5

Teorema 1

Seja $\beta = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ um conjunto gerador do espaço vetorial V .

Então, sempre podemos extrair de β uma base para V .

Vamos, por meio de um exemplo, entender o que diz o Teorema 1:

O espaço $\mathbb{R}^2$ pode ser gerado pelo conjunto

$$\beta = \{(1, -1), (1, 0), (1, 1)\}$$

(Verifique!).

BASE E DIMENSÃO DE UM ESPAÇO VETORIAL

Teoremas

1

2

3

4

5

Entretanto, β é LD, pois existe uma combinação linear não nula entre seus vetores. Veja, por exemplo,

$$(1, 0) = \frac{1}{2} (1, -1) + \frac{1}{2} (1, 1).$$

Desta forma o vetor $(1, 0)$ é desnecessário para o conjunto β uma vez que pode ser obtido a partir dos outros vetores do conjunto.

Considere agora o conjunto β_1 , extraído de β , formado apenas pelos vetores $(1, 1)$ e $(1, -1)$.

- Prove que β_1 constitui uma base para o espaço $\mathbb{R}^2$.

BASE E DIMENSÃO DE UM ESPAÇO VETORIAL

Teoremas

1

2

3

4

5

Teorema 2

Suponha o espaço vetorial V seja gerado por n vetores não nulos $v_1, v_2, \dots, v_n$.
Então, qualquer conjunto de V com mais de n vetores é LD.

Para entendermos a utilização do Teorema 2, observe o exemplo:

Seja $\beta = \{(1, -1), (1, 0), (1, 1)\}$ um conjunto com três vetores do $\mathbb{R}^2$.

Como o espaço $\mathbb{R}^2$ é gerado pelo conjunto

$$\beta_1 = [(1, 0), (0, 1)].$$

BASE E DIMENSÃO DE UM ESPAÇO VETORIAL

Teoremas

1

2

3

4

5

Pelo Teorema 2, podemos afirmar, sem demonstrar, que o conjunto β é LD. De fato, β possui três vetores e β_1 , que é um gerador de V , possui apenas dois vetores. Uma consequência imediata do Teorema 2 é que:



ATENÇÃO

“Toda e qualquer base de um espaço vetorial V possui o mesmo número de vetores”. Este número é definido como sendo a dimensão do espaço V , e, é denotado por $\dim V$.

BASE E DIMENSÃO DE UM ESPAÇO VETORIAL

Teoremas

1

2

3

4

5

Exemplo 1

O conjunto $\beta = \{(1, 0), (0, 1)\}$ é uma base para o espaço $\mathbb{R}^2$.

Como β possui dois vetores,

$\dim \mathbb{R}^2 = 2$, e, qualquer outra base de $\mathbb{R}^2$ deve possuir dois vetores.

BASE E DIMENSÃO DE UM ESPAÇO VETORIAL

Teoremas

1

2

3

4

5

Exemplo 2

O conjunto $\beta = \{(1, 0, \dots, 0), (0, 1, \dots, 0), \dots, (0, 0, \dots, 1)\}$ é a base para o espaço $\mathbb{R}^n$.

Então, $\dim \mathbb{R}^n = n$, e, qualquer outra base de $\mathbb{R}^n$ deve possuir n vetores.

BASE E DIMENSÃO DE UM ESPAÇO VETORIAL

Teoremas

1

2

3

4

5

Exemplo 3

O conjunto

$$\beta = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

é uma base do espaço das matrizes de ordem (2×3) .

Como β possui seis matrizes, a dimensão do espaço é seis, e, qualquer outra base desse espaço deve possuir seis matrizes.

BASE E DIMENSÃO DE UM ESPAÇO VETORIAL

Exercícios

Baseando-se no Exemplo 3 encontre:

Uma base e a dimensão do espaço das matrizes de ordem $(m \times n)$.

Outra consequência importante dos teoremas já vistos é a seguinte:

Se V é um espaço vetorial com dimensão n , então qualquer conjunto com n vetores linearmente independentes de V constitui uma base para V .

Vamos utilizar esse resultado para resolver o exercício a seguir:

O conjunto $\beta = \{(1, 1, 1), (0, 1, 1), (0, 0, 1)\}$ é uma base para o espaço $\mathbb{R}^3$?

Como $\dim \mathbb{R}^3 = 3$ e β possui três vetores LI (Verifique!) afirmamos, pelo resultado, que β é uma base para $\mathbb{R}^3$ (observe que não foi necessário mostrar que o conjunto β gera $\mathbb{R}^3$).

BASE E DIMENSÃO DE UM ESPAÇO VETORIAL

Coordenadas de um vetor em relação a uma base

Os vetores de um espaço vetorial são sempre representados em termos de suas coordenadas. Entretanto, essas coordenadas dependem da base ou referencial estabelecido para o espaço, isto significa que, quando alteramos o referencial do espaço as coordenadas dos vetores também se alteram.



BASE E DIMENSÃO DE UM ESPAÇO VETORIAL

Coordenadas de um vetor em relação a uma base

Para determinarmos as coordenadas de um vetor em relação a uma base devemos adotar o seguinte procedimento:

Etapa 1: Escrever o vetor como combinação linear dos vetores da base estabelecida.

Etapa 2: Os escalares encontrados na combinação linear da Etapa 1 são coordenadas do vetor em relação à nova base.



BASE E DIMENSÃO DE UM ESPAÇO VETORIAL

Coordenadas de um vetor em relação a uma base

Observe o exemplo a seguir:

Suponha que desejamos encontrar as coordenadas do vetor $v = (1, 2)$ em relação à base $\beta = \{(1, 1), (1, -1)\}$ do espaço $\mathbb{R}^2$.

Etapas 1: Escrever v como combinação linear dos vetores de β :

$$(1, 2) = x(1, 1) + y(1, -1)$$

$$(1, 2) = (x + y, x - y)$$

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = 2 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema temos $x = 3/2$ e $y = -1/2$



BASE E DIMENSÃO DE UM ESPAÇO VETORIAL

Coordenadas de um vetor em relação a uma base

Etapa 2: As coordenadas de v em relação à base β são $x = 3/2$ e $y = 1/2$.

Ou ainda,

$$[v]_{\beta} = (3/2, -1/2).$$

VERIFIQUE!

O vetor $v = (1, 2)$ possui coordenadas $x = 1$ e $y = 2$ em relação à base canônica do $\mathbb{R}^2$.



BASE E DIMENSÃO DE UM ESPAÇO VETORIAL

Atividade Proposta - Para fixar os conceitos apresentados, resolva os exercícios propostos a seguir:

1 - Quais dos conjuntos β de vetores constituem uma base para o espaço vetorial V .

(a) $V = \mathbb{R}^2$ e $\beta = \{(1, 3), (1, -1)\}$.

(b) $V = \mathbb{R}^2$ e $\beta = \{(0,0), (1, 2), (2, 4)\}$.

(c) $V = \mathbb{R}^3$ e $\beta = \{(1, 0, 2), (0, 1, -1)\}$.

(d) $V = \mathbb{R}^3$ e $\beta = \{(3, 2, 2), (-1, 2, 1), (0, 1, 0)\}$

(e) $V =$ Matrizes de ordem (2×2) e $\beta = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

BASE E DIMENSÃO DE UM ESPAÇO VETORIAL

Atividade Proposta - Para fixar os conceitos apresentados, resolva os exercícios propostos a seguir:

Gabarito

(a) Como $\dim \mathbb{R}^2 = 2$ e β possui dois vetores então β será base se seus vetores forem LI.

De fato, β é LI, observe que o determinante a seguir é não nulo.

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -4 \neq 0 \Rightarrow \beta \text{ é base.}$$

(b) β não é base pois $\dim \mathbb{R}^2 = 2$ e β possui três vetores.

(c) β não é base pois $\dim \mathbb{R}^3 = 3$ e β possui dois vetores.

(d) β será base para $\mathbb{R}^3$ se β for LI. De fato,

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -2 - 3 = -5 \neq 0 \neq$$

BASE E DIMENSÃO DE UM ESPAÇO VETORIAL

Atividade Proposta - Para fixar os conceitos apresentados, resolva os exercícios propostos a seguir:

Logo, β é base.

(e) $\dim V = 4$, β é base se for LI. De fato,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

Logo, β é base.

BASE E DIMENSÃO DE UM ESPAÇO VETORIAL

Atividade Proposta - Para fixar os conceitos apresentados, resolva os exercícios propostos a seguir:

2- Nos itens (a) até (d), calcule as coordenadas do vetor v em relação à bases β para o espaço vetorial V .

(a) $v = (2, -1, -2)$, $\beta = \{(1, -1, 0), (0, 1, 0), (1, 0, 2)\}$ e $V = \mathbb{R}^3$.

(b) $v = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $\beta = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ e $V = \text{Matrizes } (2 \times 2)$.

(c) $v = (3, -2)$, $\beta = \{(2, 1), (-1, 1)\}$ e $V = \mathbb{R}^2$.

Gabarito

(a) $[v]_{\beta} = (3, 2, -1)$;

(b) $[v]_{\beta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

(c) $[v]_{\beta} = (1/3, -7/3)$

BASE E DIMENSÃO DE UM ESPAÇO VETORIAL

Atividade Proposta - Para fixar os conceitos apresentados, resolva os exercícios propostos a seguir:

3- Encontre as coordenadas do vetor $v = (1, 0, 0)$ em relação à base β do $\mathbb{R}^3$ constituída pelos vetores $v_1 = (1, 1, 1)$, $v_2 = (-1, 1, 0)$ e $v_3 = (1, 0, -1)$.

Gabarito

$$[v]_{\beta} = (1/3, -1/3, 1/3)$$

BASE E DIMENSÃO DE UM ESPAÇO VETORIAL

SÍNTESE DA AULA

Nesta aula, você:

- Aprendeu a identificar uma base e a dimensão de um espaço vetorial;
- Determinou as coordenadas de um vetor qualquer de um espaço vetorial em relação a uma base deste espaço;
- Observou que existe uma infinidade de bases ou referenciais distintos para um mesmo espaço vetorial.

BASE E DIMENSÃO DE UM ESPAÇO VETORIAL



O QUE VEM NA PRÓXIMA AULA

Na próxima aula, abordaremos os seguintes assuntos:

- O estudo das funções ou transformações lineares entre dois espaços vetoriais;
- O domínio, a imagem e o núcleo de uma transformação linear;
- A representação matricial de uma transformação linear.

TRANSFORMAÇÕES
LINEARES

TRANSFORMAÇÕES

LINEARES

AULA 8

TRANSFORMAÇÕES LINEARES

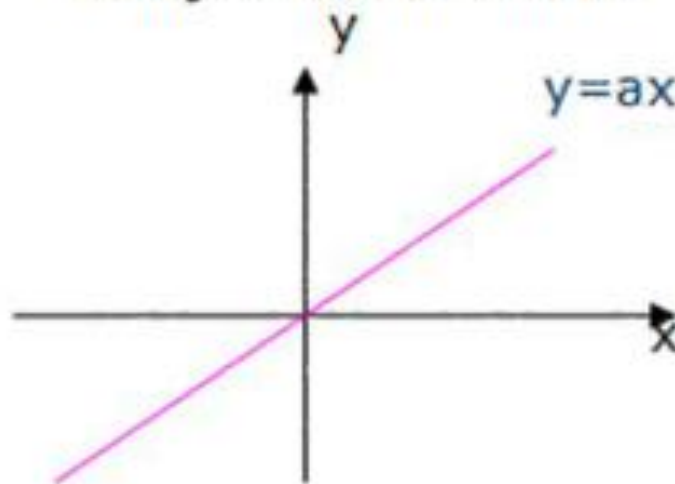


LINEARES

Introdução

Uma Função Linear do plano é definida pela reta $y = ax$ (a é uma constante), que sabemos ser representada graficamente por uma reta passando pela origem dos eixos coordenados.

Função linear em $\mathbb{R}^2$



Introdução

De forma análoga,

Uma Transformação Linear será uma função que leva vetores do espaço vetorial U em vetores do espaço vetorial V que poderá ser descrita na forma:

$$T(u) = A \cdot u,$$

sendo que: u um vetor do espaço vetorial U e A é uma matriz.



ATENÇÃO

Observe a semelhança entre as definições de função linear do plano com a transformação linear entre espaços vetoriais.

Quais as diferenças entre as duas?

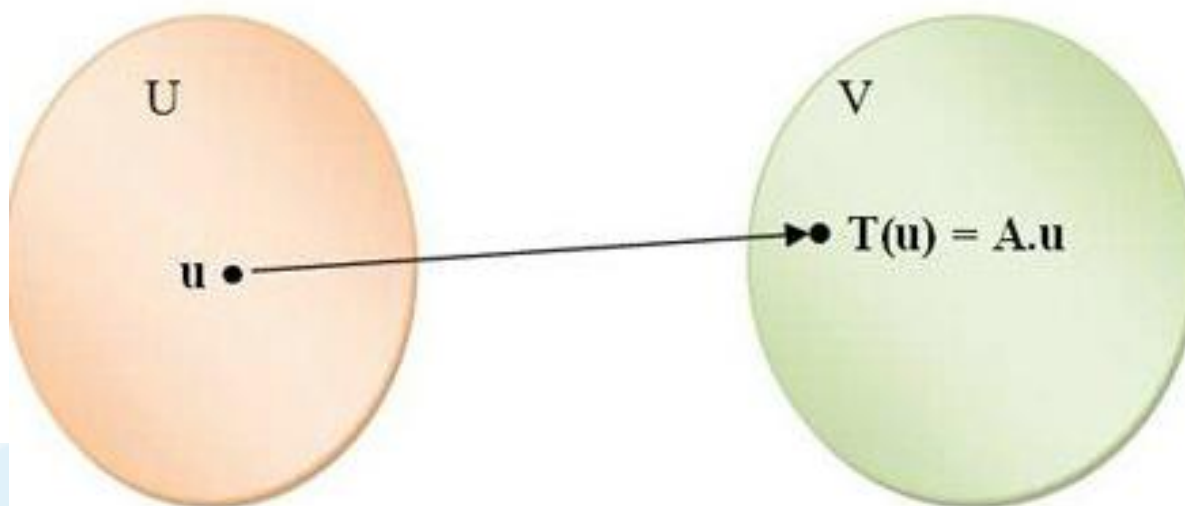
Introdução

Gabarito

O número a se transforma na matriz A

A variável real x se transforma no vetor u

TRANSFORMAÇÃO LINEAR



LINEARES

Introdução

Por exemplo,

A função $T(x, y) = (2x, x + y, 0)$ é uma transformação linear que leva vetores do espaço $\mathbb{R}^2$ no espaço $\mathbb{R}^3$.

Observe que essa transformação T pode ser descrita como o produto de uma matriz A pelo vetor u conforme mostramos a seguir:

$$T(x, y) = (2x, x + y, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$



A seguir vamos definir formalmente uma **Transformação Linear**:

Sejam U e V espaços vetoriais quaisquer. Uma

transformação linear é uma função

de U em V ($T : U \rightarrow V$), que satisfaz as seguintes condições:

(a) $T(u_1 + u_2) = T(u_1) + T(u_2)$, quaisquer que sejam u_1 e u_2 em U .

(b) $T(\alpha u) = \alpha T(u)$, para todo u em U e todo escalar real α .

Utilizando a definição, vamos comprovar que a transformação $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ do exemplo anterior, é realmente linear.

$$T(x, y) = (2x, x + y, 0)$$

De fato,

Sejam $u_1 = (x_1, y_1)$ e $u_2 = (x_2, y_2)$ vetores quaisquer do $\mathbb{R}^2$ e seja α um escalar real.

Então,

$$(a) \quad T(u_1 + u_2) = T(x_1 + x_2, y_1 + y_2) = (2(x_1 + x_2), x_1 + x_2 + y_1 + y_2, 0) \text{ e}$$

$$T(u_1) + T(u_2) = T(x_1, y_1) + T(x_2, y_2) = (2x_1, x_1 + y_1, 0) + (2x_2, x_2 + y_2, 0).$$



Somando-se os vetores $T(u_1)$ e $T(u_2)$ temos exatamente o vetor $T(u_1 + u_2)$.

$$\begin{aligned} (a) \quad T(\alpha u_1) &= T(\alpha (x_1, y_1)) = T(\alpha x_1, \alpha y_1) \\ &= (2\alpha x_1, \alpha x_1 + \alpha y_1, 0) \text{ e} \\ \alpha T(u_1) &= \alpha T(x_1, y_1) = \alpha (2x_1, x_1 + y_1, 0) \\ &= (2\alpha x_1, \alpha x_1 + \alpha y_1, 0). \end{aligned}$$





ATENÇÃO

Uma consequência imediata da definição de transformação linear é a seguinte:

“Se $T: U \rightarrow V$ é uma transformação linear, então T leva o vetor nulo de U no vetor nulo de V , isto é, $T(0) = 0$ ”.

De outra forma, podemos entender essa mesma afirmativa da seguinte maneira:

“Se $T(0) \neq 0$ então a transformação T não é Transformação Linear ”

Tente provar esta afirmativa!

TRANSFORMAÇÕES

LINEARES

Transformação Linear

Vamos aplicar essa afirmativa para mostrar que a transformação T :

$\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, dada por, $T(x, y) = (x + 1, y + 3)$ não é linear.



Observe que

$$T(0, 0) = (1, 3) \neq (0, 0)$$

Ou ainda, T não leva vetor nulo no vetor nulo.

Exercícios propostos

Para fixar as idéias realize os exercícios propostos a seguir

Identifique quais das seguintes transformações T são lineares:

(1) $T: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $T(x) = x^2$.

(2) $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $T(x, y) = x y$.

(3) $T: M(2,2) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $T \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$.

(4) $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $T(x, y, z) = (x + y, 2z)$

(7) $T: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $T(x) = |x|$.

Gabarito:

(1) não;

(2) não;

(3) não;

(4) sim;

(5) não.

TRANSFORMAÇÕES

LINEARES

Imagem e Núcleo de uma Transformação Linear



Passamos agora a analisar alguns conceitos importantes relacionados a uma Transformação Linear T . Destacamos em especial, os subespaços vetoriais definidos pela Imagem e pelo Núcleo de T .

1



ATENÇÃO

Imagem de uma Transformação Linear

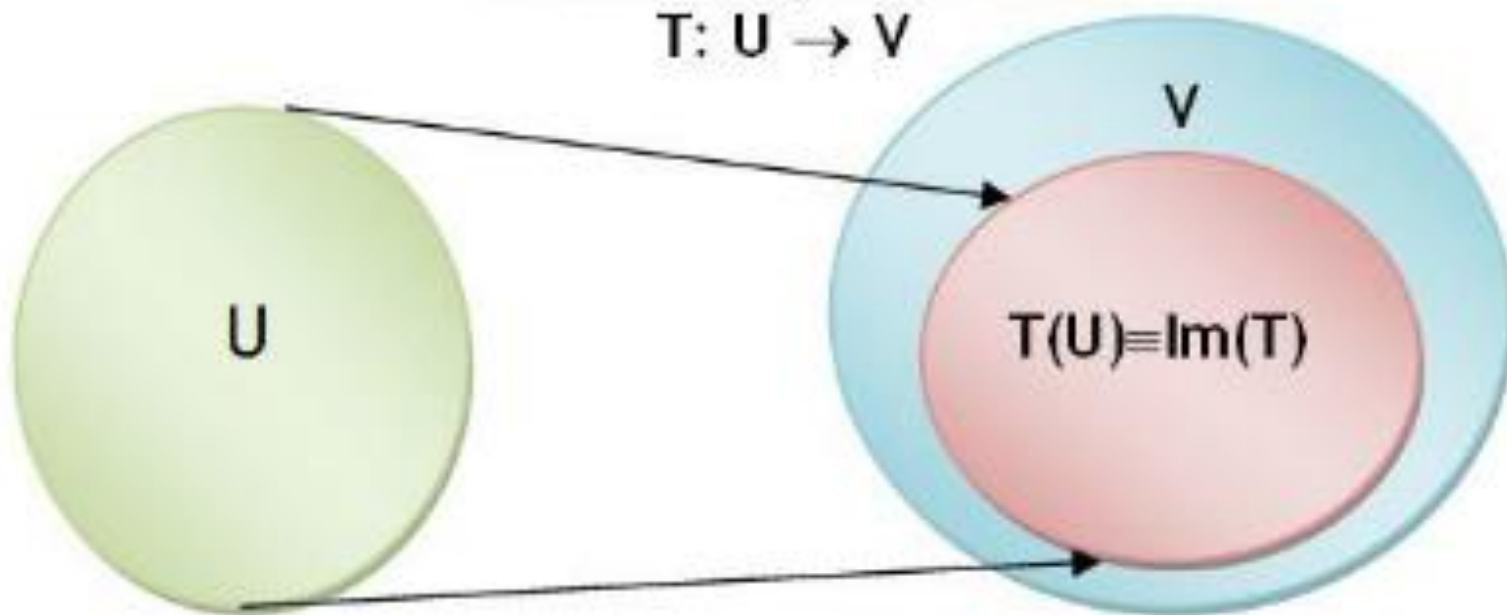
Seja $T: U \rightarrow V$ uma transformação linear do espaço vetorial U no espaço vetorial V .

A imagem de T , denotada por $\text{Im}(T)$, é o conjunto de todos os vetores v do espaço vetorial V de modo que $v = T(u)$ para algum u do espaço vetorial U .

$$\text{Im}(T) = \{ v \in V \text{ tais que } v = T(u) \text{ para algum } u \in U \}.$$

Observe na ilustração a seguir a caracterização no espaço vetorial V da Imagem do espaço vetorial U pela transformação linear T .

Transformação Linear
 $T: U \rightarrow V$



Seguem alguns exemplos mostrando como encontramos a $\text{Im}(T)$.

3

1. Seja a transformação linear $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $T(x, y) = y - x$. Então, $\text{Im}(T) = \{\text{números reais}\}$.
2. Seja a transformação linear $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $T(x, y) = (x, 0, y)$. Então, $\text{Im}(T) = \{\text{vetores do } \mathbb{R}^3 \text{ na forma } (x, 0, y)\}$.

Como você pode observar na ilustração o conjunto $\text{Im}(T)$ é um subconjunto do espaço vetorial V . Mais ainda, O conjunto $\text{Im}(T)$ da transformação linear $T: U \rightarrow V$ é um subespaço do espaço vetorial V .

Procure provar!

Núcleo de uma transformação linear

Seja $T: U \rightarrow V$ uma transformação linear do espaço vetorial U no espaço vetorial V .

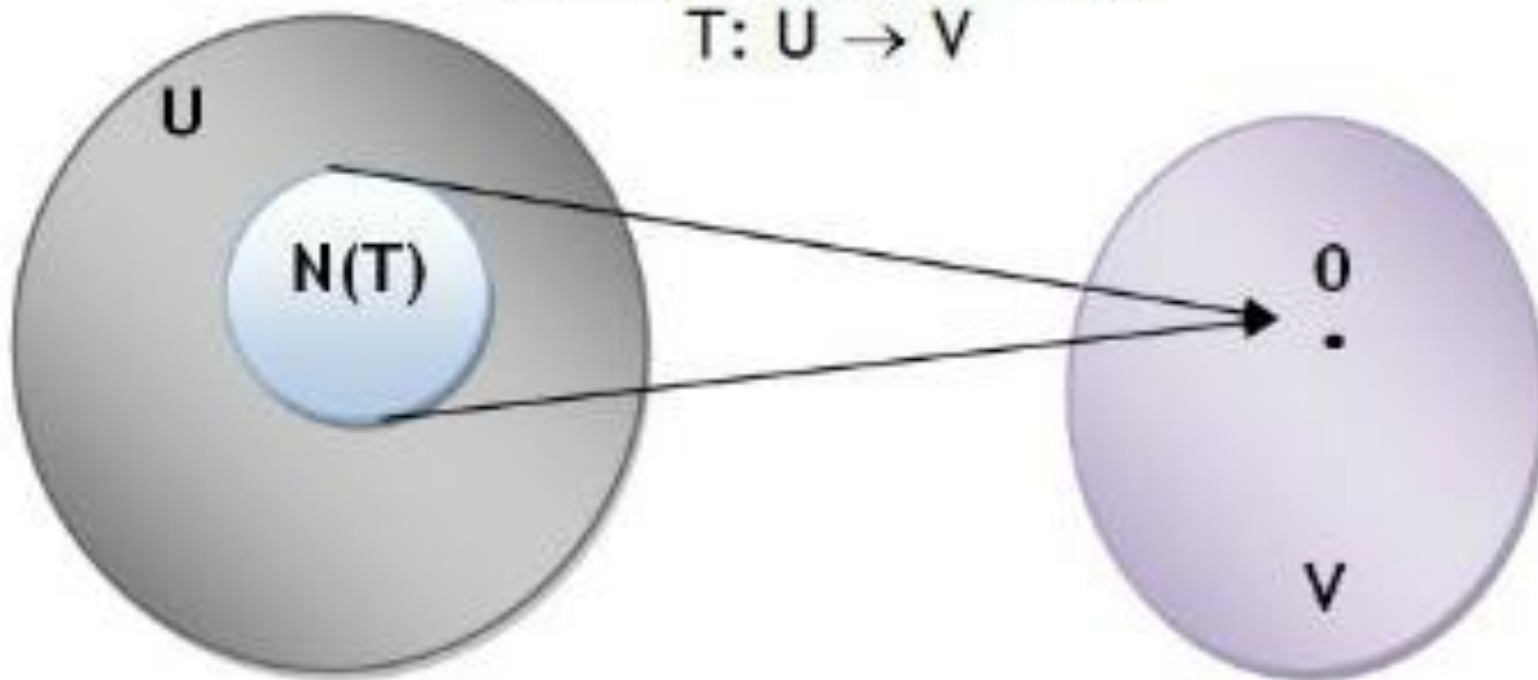
Definimos o núcleo de T , denotado por $N(T)$, como sendo o conjunto dos vetores de

U que são levados por T no elemento nulo de V . Isto é,

$$N(T) = \{u \in U \text{ tais que } T(u) = 0\}.$$

Veja na ilustração a seguir a caracterização no espaço vetorial U do conjunto $N(T)$.

Transformação Linear
 $T: U \rightarrow V$



Seguem alguns exemplos mostrando como encontramos o conjunto $N(T)$.

1. Considere a transformação linear $T(x, y) = y - x$. Então,
 $N(T) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tal que } y - x = 0\}$.

Ou ainda,

$$N(T) = \{(x, x) \text{ tal que } x \in \mathbb{R}\}.$$

2. Considere a transformação linear $T(x, y) = (x, 0, y)$. Então,
 $N(T) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tal que } (x, 0, y) = (0, 0, 0)\}$

Ou ainda,

$$N(T) = \{(0, 0)\}.$$

Como você pode observar na ilustração o conjunto $N(T)$ é um subconjunto do espaço vetorial U . Mais ainda,

O conjunto $N(T)$ da transformação linear $T: U \rightarrow V$ é um subespaço do espaço vetorial U .

Exercícios de fixação

Seja a transformação linear $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $T(x, y) = (x, 0)$.

(a) $(0, 2) \in N(T)$?

(b) $(2, 2) \in N(T)$?

(c) $(3, 0) \in \text{Im}(T)$?

(d) $(3, 2) \in \text{Im}(T)$?

X Gabarito

(a) Sim

(b) Não

(c) Sim

(d) Não

Matriz de uma Transformação Linear

Como veremos a seguir, a toda Transformação Linear T do espaço vetorial U no espaço vetorial V poderemos associar uma matriz A .

A determinação dessa matriz A dependerá:

- da forma da Transformação Linear;
- das bases escolhidas para os espaços vetoriais U e V .

TRANSFORMAÇÕES

LINEARES

Determinação da matriz A da Transformação Linear T

Dada a Transformação Linear $T: U \rightarrow V$. Considere $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ como uma base para o espaço vetorial U e $\mathcal{B}' = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ como uma base para o espaço vetorial V .

Para encontrar a matriz A que representa T em relação às bases $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$, basta adotar os passos a seguir:

Determinação da matriz A da Transformação Linear T

1. Usando a expressão de T, encontrar os vetores: $T(u_1)$, $T(u_2)$, ..., $T(u_n)$, que são pertencentes a V;
2. Expressar os vetores: $T(u_1)$, $T(u_2)$, ..., $T(u_n)$, como combinações lineares dos vetores da base B' de V;
3. Mantendo-se a ordem, dispor os escalares obtidos nas combinações lineares do item (2) como às colunas de uma matriz A.

A matriz A obtida irá representar a Transformação Linear T nas bases B e B' .



A ordem da matriz A será dada por $(\dim V \times \dim U)$

TRANSFORMAÇÕES

LINEARES

Determinação da matriz A da Transformação Linear T

O exemplo a seguir irá esclarecer melhor a questão:

Seja a transformação linear $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$T(x, y) = (x - 2y, 2x + y, x + y)$$

Determinação da matriz A da Transformação Linear T

Considere as bases:

$B = \{(1, -1), (0, 1)\}$ do espaço $\mathbb{R}^2$ (Domínio) e

$B' = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ do espaço $\mathbb{R}^3$ (Contra-Domínio)

Vamos encontrar a matriz A que representa a transformação linear T nessas bases:

- A matriz A será de ordem (3×2) uma vez que a dimensão do contra -domínio ($\mathbb{R}^3$) é 3 e a dimensão do domínio ($\mathbb{R}^2$) é 2.

Determinação da matriz A da Transformação Linear T

Passo 1

Usando T, calcular $T(1, -1)$ e $T(0, 1)$.

$$T(1, -1) = (3, 1, 0)$$

$$T(0, 1) = (-2, 1, 1)$$

Determinação da matriz A da Transformação Linear T

Passo 2

Expressar $T(1, -1)$ e $T(0, 1)$ como combinação linear dos vetores de β'

$$T(1, -1) = (3, 1, 0) = 3 \cdot (1, 0, 0) + 1 \cdot (0, 1, 0) + 0 \cdot (0, 0, 1).$$

$$T(0, 1) = (-2, 1, 1) = -2 \cdot (1, 0, 0) + 1 \cdot (0, 1, 0) + 1 \cdot (0, 0, 1).$$

Determinação da matriz A da Transformação Linear T

Passo 3

Mantendo a ordem, vamos dispor os escalares obtidos como as colunas da matriz da A que irá representar a transformação linear nas bases B e B'. Então,

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{3 \times 2}$$

Observe que se tomarmos agora β como a base canônica do $\mathbb{R}^2$ e β' como a base canônica do $\mathbb{R}^3$, a matriz da transformação A_1 em relação a essas bases será dada por:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

LINEARES

Exercícios propostos

1) Escreva a matriz da transformação linear T nas bases canônicas do domínio e contradomínio:

(a) $T(x, y) = (y, x)$.

(b) $T(x, y) = (-y, -x)$.

(c) $T(x, y) = (x + y, x - y)$.

(d) $T(x, y, z) = (x - y, x + z, y - z)$.

2) Para os itens (a), (b) e (c) do exercício (1) encontre a matriz de T tomando como bases

$\beta = \beta' = \{ (1, 1), (1, -1) \}$.

X Gabarito

1) (a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; (b) $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$; (c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$; (d) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

2) (a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ (b) $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

TRANSFORMAÇÕES

LINEARES

SÍNTESE DA AULA

Nesta aula, você:

- Aprendeu a identificar uma Transformação Linear;
- Percebeu semelhança entre os conceitos de Função Linear do plano e Transformação Linear;
- Identificou a Imagem e o Núcleo da Transformação Linear;
- Determinou a matriz que representa uma Transformação Linear em relação às bases do Domínio e Contradomínio.

TRANSFORMAÇÕES

LINEARES



O QUE VEM NA PRÓXIMA AULA

Na próxima aula, abordaremos os seguintes assuntos:

- O conceito de Operador Linear;
- A determinação dos Autovalores e Autovetores de um Operador Linear;
- O método do polinômio característico para a determinação dos autovalores e autovetores de uma matriz.

AUTOVALORES E
AUTOVETORES

AUTOVALORES E

AUTOVETORES

AULA 9

AUTOVALORES E AUTOVETORES

AUTOVALORES E AUTOVETORES

Operador Linear

Um Operador Linear é uma Transformação Linear de um espaço vetorial V nele próprio ($T: V \rightarrow V$). Como consequência toda matriz que representa um Operador Linear em relação a uma base de V é sempre quadrada e de ordem ($\dim V \times \dim V$).

Por exemplo,

$$T(x, y) = (x + y, x - y)$$

é um **Operador Linear** do espaço $\mathbb{R}^2$ no espaço $\mathbb{R}^2$.

Observe a matriz que representa este operador na base canônica do $\mathbb{R}^2$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

AUTOVALORES E

AUTOVETORES

Autovalores e Autovetores

A determinação de autovalores e autovetores é questão específica dos operadores lineares. O nosso problema será determinar vetores não nulos de um espaço vetorial, que são levados por um operador linear em vetores que sejam múltiplos de si mesmo. Em termos matemáticos, o problema se traduz como:



Atenção

Seja V um espaço vetorial.

Dado o operador linear $T: V \rightarrow V$, vamos determinar os vetores não nulos $v \in V$ de modo que $T(v) = \lambda v$, para algum escalar real λ .

Ao resolvermos o problema, estaremos determinando os autovalores λ do

Operador T e os autovetores v (não nulos), associados aos valores de λ encontrados.

AUTOVALORES E

AUTOVETORES

Autovalores e Autovetores

Vamos esclarecer melhor a questão resolvendo o problema-exemplo a seguir:

Considere o Operador Linear $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, dado por

$$T(x, y) = (2x + 2y, y).$$

O nosso objetivo está em achar os vetores $v = (x, y) \neq (0, 0)$ do espaço $\mathbb{R}^2$ de modo que

$$T(x, y) = (2x + 2y, y) = \lambda (x, y)$$

Ou ainda, queremos encontrar soluções não nulas para o sistema linear homogêneo a seguir:

$$(*) \quad \begin{cases} (2 - \lambda) x + 2 y = 0 \\ 0 x + (1 - \lambda) y = 0 \end{cases}$$

AUTOVALORES E

AUTOVETORES

Autovalores e Autovetores

Estas soluções ocorrem quando o determinante da matriz dos coeficientes do sistema é necessariamente igual a zero.

$$\det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)(1-\lambda) = 0$$

Ou ainda, $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = 1$ correspondem aos autovalores do Operador Linear T.

Os autovetores são obtidos resolvendo-se sistema (*) para cada autovalor encontrado.

Para o autovalor $\lambda = 2$, o sistema (*) se reduz a

$$\begin{cases} 0x + 2y = 0 \\ 0x - y = 0 \end{cases}$$

cuja solução é: $y = 0$ e $x =$ qualquer número real.

AUTOVALORES E

AUTOVETORES

Autovalores e Autovetores

Logo, os autovetores associados ao autovalor $\lambda = 2$ são da forma:

$$V_{\lambda,1} = \{(x, 0), \text{ com } x \in \mathbb{R} \text{ e } x \neq 0\}$$

Para o autovalor $\lambda = 1$, o sistema (*) se reduz a

$$\begin{cases} x + 2y = 0 \\ 0x + 0y = 0 \end{cases}$$

cuja solução é: $x = -2y$ e $y = \text{qualquer número real}$.

Logo, os autovetores associados ao autovalor $\lambda = 1$ são da forma:

$$V_{\lambda,2} = \{(-2y, y), \text{ com } y \in \mathbb{R} \text{ e } y \neq 0\}$$

Exercícios de fixação

Para fixar as idéias realize o exercício proposto a seguir.

Repita o procedimento do problema - exemplo para encontrar os autovalores e autovetores do operador linear $T(x, y) = (2x, -2y)$.

AUTOVETORES

Os autovalores são: $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = -2$

X Gabarito

Os autovetores são: $V_{\lambda_1} = \{(x, 0), \text{ com } x \in \mathbb{R} \text{ e } x \neq 0\}$ e

$$V_{\lambda_2} = \{(0, y), \text{ com } y \in \mathbb{R} \text{ e } y \neq 0\}$$

Considerando a relação existente entre operadores lineares e matrizes, passaremos a analisar o problema de determinação de autovalores e autovetores do ponto de vista matricial pelo método que descreveremos a seguir:

AUTOVALORES E

AUTOVETORES

Método do Polinômio Característico



AUTOVALORES E

AUTOVETORES

Seja A uma matriz de ordem $(n \times n)$ que representa o operador linear T

em uma base do espaço $\mathbb{R}^n$. Então, os

autovalores e autovetores da matriz A

são obtidos pela resolução da equação matricial a seguir:

$$A v = \lambda v, \text{ para o número real } \lambda \text{ e para } v \neq 0 \in \mathbb{R}^n.$$



1

AUTOVETORES

A solução desta equação matricial implicará:

- 
1. Na determinação dos autovalores da matriz A , que serão dados pelas raízes reais de um polinômio em λ do grau n , denotado por $p(\lambda)$, que se chama **polinômio característico**;
 2. Na determinação dos autovetores de A , que serão dados pela resolução de um sistema linear homogêneo de equações do tipo indeterminado.

Por exemplo,

Seja $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$ a matriz que representa um operador linear T

na base canônica do espaço $\mathbb{R}^2$. Vamos então encontrar matricialmente os autovalores e autovetores de A .

Devemos, então, achar o vetor $v = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ não nulo de $\mathbb{R}^2$, e, o número real λ , de tal modo que

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

AUTOVETORES

Ou ainda, efetuando o produto de A por v e comparando os vetores, geramos o sistema

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \lambda x_1 \\ -2x_1 + 4x_2 = \lambda x_2 \end{cases}$$

que é equivalente ao sistema a seguir

$$(*) \begin{cases} (1 - \lambda) x_1 + x_2 = 0 \\ -2x_1 + (4 - \lambda) x_2 = 0. \end{cases}$$

Este sistema que é linear e homogêneo, deve ter solução não nula

$$v = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Logo (*) tem que ser possível e indeterminado (SPI). Desta forma, necessariamente, o determinante da matriz dos coeficientes tem que ser zero.

$$\text{Det.} \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 1 \\ -2 & 4 - \lambda \end{pmatrix} = 0.$$

AUTOVETORES

Resolvendo o determinante, obtemos o polinômio $p(\lambda)$, do grau 2, descrito a seguir:

$$p(\lambda) = (1 - \lambda)(4 - \lambda) + 2 = \lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0.$$

Assim, as raízes de $p(\lambda)$, dadas por $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = 3$, são os autovalores da matriz A.

Para calcular os autovetores da matriz A, de vemos resolver o sistema (*) para cada um dos autovalores encontrados.

Para $\lambda_1 = 2$, o sistema (*) passa a ser:

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 = 0 \\ -2x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases}$$

5

AUTOVETORES

cuja solução é: $x_2 = x_1$ e $x_1 =$ qualquer número $a \in \mathbb{R}$

Ou melhor, os vetores -soluções são do tipo

$$v_1 = (a, a) \text{ com } a \neq 0,$$

que correspondem aos autovetores da matriz A associados ao autovalor $\lambda_1 = 2$.

Para $\lambda_2 = 3$, o sistema (*) passa a ser

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 = 0 \\ -2x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$$

que possui solução, $x_2 = 2x_1$ e $x_1 =$ número qualquer $b \in \mathbb{R}$

Isto é, os vetores -soluções são do tipo

$$v_2 = (b, 2b) \text{ com } b \neq 0,$$

que correspondem aos autovetores associados ao autovalor $\lambda_2 = 3$.

AUTOVALORES E

AUTOVETORES

Etapas

As etapas descritas a seguir organizarão o método do polinômio característico para determinação dos autovalores e autovetores de uma matriz A de ordem n qualquer.

MÉTODO DO POLINÔMIO CARACTERÍSTICO

(DETERMINAÇÃO DOS AUTOVALORES E AUTOVETORES DE UMA MATRIZ)

Seja A uma matriz de ordem $(n \times n)$

Etapas 1: Escrever a matriz $(A - \lambda I_n)$, onde I_n é a matriz identidade de mesma ordem da matriz de A .

Etapas 2: Obter o polinômio característico da matriz A , dado por $p(\lambda) = \det(A - \lambda I_n) = 0$.

Etapas 3: Achar as raízes λ do polinômio característico $p(\lambda)$, que correspondem aos autovalores da matriz A .

Etapas 4: Para cada autovalor λ encontrado resolver o sistema homogêneo dado por $(A - \lambda I_n) v = 0$, para $v \neq 0$.

AUTOVETORES

Etapas

No próximo exemplo, descreveremos apenas as etapas do método para o cálculo de autovalores e autovetores da matriz A . As contas relacionadas ao do problema, você deve fazer!

Seja a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}$. Quais são os autovalores e autovetores da matriz A ?

Etapa 1

$$A - \lambda I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & -4 & 5 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & -1 \\ 1 & 0-\lambda & 1 \\ 4 & -4 & 5-\lambda \end{pmatrix}.$$

AUTOVETORES

Etapas

Etapa 2

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) = \lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 = 0$$

Etapa 3

Os autovalores da matriz A são as raízes de $p(\lambda)$ dadas por: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ e $\lambda_3 = 3$.

Etapas

Etapa 4

Para $\lambda_1 = 1$, o sistema a ser resolvido é:

$$\begin{cases} 2y - z = 0 \\ x - y + z = 0 \\ 4x - 4y + 4z = 0 \end{cases}$$

que possui solução dada por $(x, y, z) = (-a, a, 2a)$ com $a \in \mathbb{R}$.

Para $\lambda_2 = 2$, o sistema a ser resolvido é:

$$\begin{cases} -x + 2y - z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ 4x - 4y + 3z = 0 \end{cases}$$

que possui solução dada por $(x, y, z) = (-2a, a, 4a)$ com $a \in \mathbb{R}$.

Para $\lambda_3 = 3$, o sistema a ser resolvido é:

$$\begin{cases} -2x + 2y - z = 0 \\ x - 3y + z = 0 \\ 4x - 4y + 2z = 0 \end{cases}$$

que possui solução dada por $(x, y, z) = (-a, a, 4a)$ com $a \in \mathbb{R}$.

AUTOVETORES

Etapas

Etapa 4 (Continuação)

Os autovetores da matriz A associados aos autovalores

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2 \text{ e } \lambda_3 = 3$$

são dados respectivamente pelos vetores do espaço $\mathbb{R}^3$:

$$v_{\lambda 1} = (-a, a, 2a), \text{ para } a \neq 0 \in \mathbb{R},$$

$$v_{\lambda 2} = (-2a, a, 4a), \text{ para } a \neq 0 \in \mathbb{R} \text{ e}$$

$$v_{\lambda 3} = (-a, a, 4a) \text{ com } a \neq 0 \in \mathbb{R}.$$

Exercícios de Fixação

Calcule os autovalores e autovetores correspondentes aos operadores lineares dados a seguir:

- $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $T(x, y) = (2y, x)$.
- $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $T(x, y) = (x + y, 2x + y)$.
- $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $T(x, y, z) = (x + y, x - y + 2z, 2x + y - z)$.

AUTOVALORES E

AUTOVETORES

Gabarito

(a) $\lambda_1 = \sqrt{2}$ e $\lambda_2 = -\sqrt{2}$; $V_{\lambda_1} = (\sqrt{2}y, y)$ e $V_{\lambda_2} = (-\sqrt{2}y, y)$.

(b) $\lambda_1 = 1 + \sqrt{2}$ e $\lambda_2 = 1 - \sqrt{2}$; $V_{\lambda_1} = (x, \sqrt{2}x)$ e $V_{\lambda_2} = (x, -\sqrt{2}x)$.

(c) $\lambda_1 = 2$; $\lambda_2 = -1$ e $\lambda_3 = -2$; $V_{\lambda_1} = (x, x, x)$; $V_{\lambda_2} = (-2z, 4z, z)$; $V_{\lambda_3} = (x, -3x, x)$.

AUTOVETORES

Exercícios de Fixação

Calcule os autovalores e autovetores das matrizes:

$$(a) A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(b) A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(c) A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & -4 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(d) A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(e) A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(f) A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

AUTOVETORES

Gabarito

- (a) $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = -1$; $V\lambda_1 = (x, 0)$ e $V\lambda_2 = (-y, y)$.
- (b) $\lambda_1 = 0$; $\lambda_2 = 2$; $V\lambda_1 = (-y, y)$ e $V\lambda_2 = (x, x)$.
- (c) $\lambda_1 = 3$ e $\lambda_2 = 1$; $V\lambda_1 = (x, 0, 0)$ e $V\lambda_2 = (-7z/4, -5z/2, z)$.
- (d) $\lambda_1 = 1$; $\lambda_2 = 3$ e $\lambda_3 = -1$; $V\lambda_1 = (-y, y, 0)$; $V\lambda_2 = (x, 0, x)$; $V\lambda_3 = (-z, 2z, z)$.
- (e) $\lambda_1 = 1$; $\lambda_2 = 4$ e $\lambda_3 = -1$; $V\lambda_1 = (x, -2x, x)$; $V\lambda_2 = (x, x, x)$; $V\lambda_3 = (-z, 0, z)$.
- (f) $\lambda_1 = 2$; $\lambda_2 = -1$ e $\lambda_3 = -2$; $V\lambda_1 = (x, x, x)$; $V\lambda_2 = (-2z, 4z, z)$; $V\lambda_3 = (x, -3x, x)$.
- (e) $\lambda_1 = 3$; $\lambda_2 = -1$ e $\lambda_3 = 1$; $V\lambda_1 = (x, y, 0, 0)$; $V\lambda_2 = (x, -5x/4, x, 0)$;
 $V\lambda_3 = (0, 0, 0, z)$.

AUTOVALORES E AUTOVETORES

SÍNTESE DA AULA

Nesta aula, você:

- Aprendeu a determinar autovalores e autovetores de um Operador Linear ou Matriz;
- Estudou o método do polinômio característico;
- Compreendeu que o cálculo de autovalores se resume em determinar as raízes do polinômio característico;
- Compreendeu que o cálculo dos autovetores consiste na resolução de sistemas lineares homogêneos indeterminados.

AUTOVALORES E

AUTOVETORES



O QUE VEM NA PRÓXIMA AULA

Aplicações práticas de autovalores e autovetores.

APLICAÇÕES DE AUTOVALORES E
AUTOVETORES

APLICAÇÕES DE AUTOVALORES E **AUTOVETORES**



AULA 10

DIAGONALIZAÇÃO DE OPERADORES LINEARES -
APLICAÇÕES DE AUTOVALORES E AUTOVETORES

APLICAÇÕES DE AUTOVALORES E AUTOVETORES

Diagonalização de Operadores

1

2

O nosso objetivo agora é a construção de uma base de vetores para o espaço vetorial V , de tal modo que a matriz que represente o operador linear $T: V \rightarrow V$ nessa base, seja o mais simples possível. Por vários motivos, entendemos que a matriz mais simples que pode representar o operador linear T é uma matriz diagonal, isto é, uma matriz tal que todos os elementos que não estão na sua diagonal principal são iguais a zero.

APLICAÇÕES DE AUTOVALORES E AUTOVETORES

Diagonalização de Operadores

1

2

Para elucidar melhor esta questão vamos analisar os seguintes exemplos:

Considere o operador linear $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, dado por

$$T(x, y) = (x + y, -2x + 4y)$$

Observe que a matriz que representa T na base canônica do $\mathbb{R}^2$ é

$$[T] = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

Observe que os seus autovalores e autovetores são dados respectivamente, por:

$$\lambda_1 = 2 \text{ e } v_{\lambda_1} = a (1, 1) \text{ com } a \neq 0, \text{ e}$$

$$\lambda_2 = 3 \text{ e } v_{\lambda_2} = b (1, 2) \text{ com } b \neq 0.$$

1

2

Considere o conjunto β abaixo formado pelos seguintes autovetores:

$v_1 = (1, 1)$ associado ao autovalor $\lambda_1 = 2$ e

$v_2 = (1, 2)$ associado ao autovalor $\lambda_2 = 3$

Isto é,

$\beta = \{(1, 1), (1, 2)\}$.

Afirmamos que o conjunto β constitui uma base para o plano $\mathbb{R}^2$

1

2

Vamos então encontrar a representação matricial do operador linear T na base β .

Observe que,

$$T(1, 1) = 2 \cdot (1, 1) + 0 \cdot (1, 2)$$

$$T(1, 2) = 0 \cdot (1, 1) + 3 \cdot (1, 2).$$

Isto é, a matriz A do operador na base β é descrita a seguir

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Conclusão:

Neste exemplo, foi possível encontrar uma base β do $\mathbb{R}^2$, constituída pelos autovetores de T , tal que a representação do operador linear T em β é uma matriz diagonal. Mais ainda, na representação diagonal de T os autovalores são os elementos situados na diagonal principal da matriz.

O exemplo resolvido ilustra uma forma simples de diagonalizar um operador linear T .

O resultado a seguir formaliza um dos processos de diagonalização de operadores lineares.



ATENÇÃO

Se V é um espaço vetorial de dimensão n e $T: V \rightarrow V$ é um operador linear que possui n autovalores distintos, então V possui uma base cujos vetores são todos autovetores de T .

APLICAÇÕES DE AUTOVALORES E AUTOVETORES

Diagonalização de Operadores

1

2

Uma consequência imediata deste teorema é que:

- Um operador linear $T: V \rightarrow V$ que possui todos os autovalores diferentes pode ser representado por uma matriz diagonal. Mais ainda, se $\beta = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ é uma base ordenada de autovetores para V , e se $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ são os seus respectivos autovalores, então, a matriz diagonal que representa T é descrita por:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

1

2

Seja a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}$ que representa um operador linear

$T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ em relação à base canônica do $\mathbb{R}^3$.

Na aula 09 vimos que os seus autovalores e autovetores são dados por:

AUTOVETORES

Diagonalização de Operadores

1

2

Para $\lambda_1 = 1$, $v_{\lambda_1} = a (-1, 1, 2)$ com $a \neq 0 \in \mathbb{R}$.

Para $\lambda_2 = 2$, $v_{\lambda_2} = a (-2, 1, 4)$ com $a \neq 0 \in \mathbb{R}$.

Para $\lambda_3 = 3$, $v_{\lambda_3} = a (-1, 1, 4)$ com $a \neq 0 \in \mathbb{R}$.

APLICAÇÕES DE AUTOVALORES E AUTOVETORES

Diagonalização de Operadores

1

2

Como os três autovalores de T são distintos sabemos que o conjunto

$$\beta = \{(-1, 1, 2), (-2, 1, 4), (-1, 1, 4)\}$$

constitui uma base de autovetores para o espaço $\mathbb{R}^3$ (Verifique a afirmativa!).

Mais ainda, a matriz que representa o operador linear T na base β é dada por:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

1

2

Neste momento, cabe analisar a seguinte questão:
"Para diagonalizarmos um operador linear é sempre necessário que todos os seus autovalores sejam diferentes?"

A resposta a esta questão é não!

Vamos a seguir desenvolver certos conceitos e resultados que esclarecem, em caráter definitivo, a questão acima colocada. Vamos também determinar outra forma de estabelecer a representação por uma matriz diagonal de um operador linear.

APLICAÇÕES DE AUTOVALORES E AUTOVETORES

Polinômio de Matriz

Seja $p(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$ um polinômio em x de grau n , e seja A uma quadrada. Então, $p(A)$ é a matriz

$$p(A) = a_0 I_n + a_1 A + \dots + a_n A^n.$$

Exemplo

Seja $p(x) = x^2 - 9$ e $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Então,

$$p(A) = A^2 - 9 I_2 = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - 9 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Neste caso, como $p(A) = 0$ (0 aqui representa a matriz nula), dizemos que $p(x)$ *anula* a matriz A .

AUTOVETORES

Polinômio Minimal

Dada uma matriz quadrada A , definimos o polinômio minimal da matriz A como polinômio

$$m(x) = x^k + a_{k-1} x^{k-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

de tal que modo que:

- O polinômio $m(x)$ anula A , isto é, $m(A) = 0$.
- $m(x)$ é o polinômio de menor grau dentre todos aqueles que anulam a matriz A (observe que o coeficiente do termo de maior grau deve ser igual a 1).

APLICAÇÕES DE AUTOVALORES E AUTOVETORES

Polinômio Minimal

O teorema que enunciaremos a seguir vai relacionar o processo de diagonalização de um operador linear T com a determinação do seu polinômio minimal.



ATENÇÃO

Teorema

Sejam $T: V \rightarrow V$ um operador linear e α uma base qualquer do espaço vetorial V . Então, T é diagonalizável se e somente se o polinômio minimal da matriz A que representa o operador na base α for da forma

$$m(x) = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2) \dots (x - \lambda_n)$$

em que os números reais $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ são todos distintos.

APLICAÇÕES DE AUTOVALORES E AUTOVETORES

Polinômio Minimal

Tendo em vista o resultado acima a nossa questão agora passa a ser:

Como se acha o polinômio mínimo de um operador linear?

A resposta desta questão é dada por meio das seguintes considerações:

- O primeiro candidato a polinômio mínimo do operador linear é o polinômio característico de uma matriz que o representa.
(O resultado é explicado pelo Teorema de Cayley -Hamilton).
- As raízes do polinômio minimal são as mesmas raízes distintas do polinômio característico.
- O polinômio mínimo divide o polinômio característico.

APLICAÇÕES DE AUTOVALORES E AUTOVETORES

Polinômio Minimal

Vamos agora juntar os fatos para estabelecer a nova forma de diagonalizar o operador linear T pelo método do polinômio minimal.

Preste bastante atenção nas etapas!

Seja A uma matriz que representa o operador linear

T em uma base do espaço vetorial V .

Etapa 1: Achar o polinômio característico de A .

Etapa 2: Encontrar o polinômio minimal de A .

Etapa 3: Verificar se o polinômio minimal de A é da forma

$(x - \lambda_1)(x - \lambda_2) \dots (x - \lambda_k)$, com $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ distintos.

AUTOVETORES

Polinômio Minimal

Exemplo 1:

Seja o operador linear $T: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ dado por

$$T(x, y, z, t) = (3x - 4z, 3y + 5z, -z, -t).$$

Nosso objetivo é saber se este operador é diagonalizável.

No caso de ser, vamos encontrar a sua forma diagonal.

APLICAÇÕES DE AUTOVALORES E AUTOVETORES

Polinômio Minimal

Passo 1 : Escreva a matriz A do operador linear na base canônica do $\mathbb{R}^4$ dada por:

$$\alpha = \{(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\}.$$

Então,

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

APLICAÇÕES DE AUTOVALORES E AUTOVETORES

Polinômio Minimal

Passo2: Calcular o polinômio característico da matriz A

$$p(\lambda) = \det (A - \lambda I_4) = \begin{vmatrix} 3 - \lambda & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 3 - \lambda & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Resolvendo o determinante acima obtemos que o polinômio característico da matriz A que é dado por

$$p(\lambda) = (3 - \lambda)^2 (-1 - \lambda)^2 = (\lambda - 3)^2 (\lambda + 1)^2$$

Os autovalores da matriz A são: $\lambda_1 = 3$ e $\lambda_2 = -1$.

APLICAÇÕES DE AUTOVALORES E AUTOVETORES

Polinômio Minimal

Passo 3 : Determinar o polinômio minimal de A.

Os candidatos a polinômio mínimo são:

$$m_1(x) = (x - 3)^2 (x + 1)^2$$

$$m_2(x) = (x - 3)^2 (x + 1)$$

$$m_3(x) = (x - 3) (x + 1)^2$$

$$m_4(x) = (x - 3) (x + 1)$$

APLICAÇÕES DE AUTOVALORES E AUTOVETORES

Polinômio Minimal

Atenção!

Observe que $m_1(x)$ é o polinômio característico da matriz A e que os polinômios $m_2(x)$, $m_3(x)$ e $m_4(x)$ são polinômios que dividem o característico e que possuem as mesmas raízes distintas.

Por fim o operador linear T ou a matriz A será diagonalizável se e somente se o seu polinômio minimal for o $m_4(x)$.

APLICAÇÕES DE AUTOVALORES E AUTOVETORES

Polinômio Minimal

Passo 4: Verificar se $m_4(A) = 0$.

$$m_4(A) = (A - 3I_4)(A + I_4)$$

$$m_4(A) = \left(\begin{pmatrix} 3 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \right) \left(\begin{pmatrix} 3 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$m_4(A) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

APLICAÇÕES DE AUTOVALORES E AUTOVETORES

Polinômio Minimal

Como $m_4(x) = (x - 3)(x + 1)$ é o polinômio minimal, o operador linear T ou a matriz A é diagonalizável. Isto é, existe uma base de autovetores para A tal que a matriz B que representa o operador nesta base é dada por

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

APLICAÇÕES DE AUTOVALORES E AUTOVETORES

Polinômio Minimal

- ♦ Na representação diagonal de T os autovalores $\lambda_1 = 3$ e $\lambda_2 = -1$ aparecem duas vezes. Este fato se dá, porque ambos os autovalores são raízes de multiplicidade algébrica 2 no polinômio característico .

APLICAÇÕES DE AUTOVALORES E AUTOVETORES

Polinômio Minimal

Exemplo 2

Verifique se o operador do $\mathbb{R}^3$ descrito pela matriz A é diagonalizável.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & -4 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

O polinômio característico da matriz A é dado por

$$p(\lambda) = (\lambda - 3)^2 (\lambda + 1) .$$

APLICAÇÕES DE AUTOVALORES E AUTOVETORES

Polinômio Minimal

Os candidatos a polinômio mínimo são :

$$m_1(x) = (x - 3)^2 (x + 1)$$

$$m_2(x) = (x - 3)(x + 1)$$

A matriz A será diagonalizável se e somente se o
seu polinômio minimal for $m_2(x)$.

APLICAÇÕES DE AUTOVALORES E AUTOVETORES

Polinômio Minimal

Vamos testar!

$$m_2(A) = (A - 3I_3)(A + I_3)$$

$$m_2(A) = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -3 & -4 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -12 & -15 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \text{matriz nula}$$

A matriz A não é diagonalizável.

Observe que o polinômio minimal da matriz A é o seu próprio polinômio característico $m_1(x)$.

APLICAÇÕES DE AUTOVALORES E AUTOVETORES

Exercícios de Fixação

Pelo método da determinação de uma base de autovetores, verifique se os operadores lineares a seguir são diagonalizáveis:

1) $T(x, y) = (x + y, 2x + y)$.

2) $T(x, y, z) = (x + 2z, -x + z, x + y + 2z)$.

Gabarito

1) $\lambda_1 = 1 + \sqrt{2}$, $v_1 = (x, \sqrt{2}x)$; $\lambda_2 = 1 - \sqrt{2}$, $v_2 = (x, -\sqrt{2}x)$; o operador é diagonalizável, os autovalores são distintos logo os autovetores formam uma base para $\mathbb{R}^2$.

2) $\lambda_1 = 1$, $v_1 = (-y, y, 0)$; $\lambda_2 = -1$, $v_2 = (x, 2x, -x)$; $\lambda_3 = 3$, $v_3 = (x, 0, x)$; o operador é diagonalizável, os autovalores são distintos logo os autovetores formam uma base para $\mathbb{R}^3$.

APLICAÇÕES DE AUTOVALORES E AUTOVETORES

Exercícios de Fixação

Pelo método do polinômio minimal, verifique se os operadores do exercício I. (1), (2) são diagonalizáveis.

Gabarito

(1) $m(x) = (x - (1 + \sqrt{2}))(x - (1 - \sqrt{2}))$, o operador é diagonalizável.

(2) $m(x) = (x - 1)(x + 1)(x - 3)$, o operador é diagonalizável.

APLICAÇÕES DE AUTOVALORES E AUTOVETORES

Exercícios de Fixação

Encontre: os autovalores, o polinômio característico e o polinômio minimal das matrizes a seguir:

$$(1) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(2) \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$(3) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

APLICAÇÕES DE AUTOVALORES E AUTOVETORES

Gabarito

- 1) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$, $p(\lambda) = -\lambda^3$, $m(x) = x^3$, a matriz não é diagonalizável.
- 2) $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = 3$, $p(\lambda) = (\lambda - 2)(\lambda - 3)$, $m(x) = (x - 2)(x - 3)$, a matriz é diagonalizável.
- 3) $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 3$ e $\lambda_4 = 2$, $p(\lambda) = (1 - \lambda)(-1 - \lambda)(3 - \lambda)(2 - \lambda)$, $m(x) = (x - 1)(x + 1)(x - 3)(x - 2)$, a matriz é diagonalizável.

Exercícios de Fixação

Para quais valores de a cada uma das matrizes a seguir são diagonalizáveis?

$$(a) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

$$(b) \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Gabarito

(a) $a \neq 1$

(b) $a = 0$

APLICAÇÕES DE AUTOVALORES E AUTOVETORES

Aplicações práticas de Autovalores e Autovetores

Muitas são as aplicações de autovalores e autovetores no campo das Engenharias e das Ciências Aplicadas. Problemas como

- Identificações das cônicas e quádricas;
- Formas quadráticas;
- Estudos relacionados a superfícies côncavas e convexas;
- Problemas de Otimização de funções com restrições;
- Resolução de sistemas de equações diferenciais lineares.

APLICAÇÕES DE AUTOVALORES E AUTOVETORES

Podem ser tratados algebricamente por meio da identificação de autovalores e de processo de diagonalização de operadores.
Com certeza toda a Álgebra Linear abordada neste curso será de grande aplicabilidade para os seus estudos futuros. Espere um pouco prezado leitor e você verá.

APLICAÇÕES DE AUTOVALORES E AUTOVETORES

SÍNTESE DA AULA

Nesta aula, você:

- Determinou o polinômio minimal de uma matriz;
- Aprendeu a diagonalizar um Operador Linear ou Matriz;
- Percebeu as diversas aplicações nas Engenharias e Ciências aplicadas de toda teoria estudada no curso.

REFERÊNCIAS



ANTON, Howard; **RORRES**, Chris. Álgebra linear com aplicações. Trad. Claus Ivo Doering. 8 ed. Porto Alegre: Bookman, 2001.

KOLMAN, Bernard. Introdução à álgebra linear com aplicações. Trad. Valéria de Magalhães Lório. 6 ed. Rio de Janeiro: LTC – Livros Técnicos e Científicos Editora, 1999.

LAY, David C. Álgebra linear e suas aplicações. Trad. Ricardo Camilier e Valéria de Magalhães Lório. 2 ed. Rio de Janeiro: LTC – Livros Técnicos e Científicos Editora, 1999.

STEINBRUCH, Alfredo; **WINTERLE**, Paulo. Introdução à álgebra linear. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 1997