Trigonometria

Eliete Maria Gonçalves
Vanilda Miziara Mello Chueiri

unesp

CULTURA ACADÊMICA Editora

PRÓ REITORIA DE GRADUAÇÃO

Programa de Apoio à Produção de Material Didático

Eliete Maria Gonçalves
Vanilda Miziara Mello Chueiri

TRIGONOMETRIA

unesp

CULTURA ACADÊMICA
Editora

PRÓ REITORIA
DE GRADUAÇÃO

São Paulo
2008

G635t Gonçalves, Eliete Maria
Trigonometria / Eliete Maria Gonçalves [e] Vanilda Miziara Mello Chueiri. – São Paulo : Cultura Acadêmica : Universidade Estadual Paulista, Pró-Reitoria de Graduação, 2008
165 p.

ISBN 978-85-98605-63-0

1.Trigonometria. I. Título. II. Chueiri, Vanilda Miziara Mello.

CDD 516.24

Ficha catalográfica elaborada pela Coordenadoria Geral de Bibliotecas da Unesp

Universidade Estadual Paulista

Reitor
Marcos Macari

Vice-Reitor
Herman Jacobus Cornelis Voorwald

Chefe de Gabinete
Kléber Tomás Resende

Pró-Reitora de Graduação
Sheila Zambello de Pinho

Pró-Reitora de Pós-Graduação
Marilza Vieira Cunha Rudge

Pró-Reitor de Pesquisa
José Arana Varela

Pró-Reitora de Extensão Universitária
Maria Amélia Máximo de Araújo

Pró-Reitor de Administração
Julio Cezar Durigan

Secretária Geral
Maria Dalva Silva Pagotto

Cultura Acadêmica Editora
Praça da Sé, 108 - Centro
CEP: 01001-900 - São Paulo-SP
Telefone: (11) 3242-7171

APOIO:

FUNDAÇÃO EDITORA DA UNESP
CGB - COORDENADORIA GERAL DE BIBLIOTECAS

COMISSÃO EXECUTIVA

Elizabeth Berwerth Stucchi
José Roberto Corrêa Saglietti
Klaus Schlünzen Junior
Leonor Maria Tanuri

APOIO TÉCNICO

Ivonette de Mattos
José Welington Gonçalves Vieira

PROJETO GRÁFICO

DESIGN JR.
Empresa Júnior de Design
designjunior@gmail.com

PROGRAMA DE APOIO
À PRODUÇÃO DE MATERIAL DIDÁTICO

Considerando a importância da produção de material didático-pedagógico dedicado ao ensino de graduação e de pós-graduação, a Reitoria da UNESP, por meio da Pró–Reitoria de Graduação (PROGRAD) e em parceria com a Fundação Editora UNESP (FEU), mantém o Programa de Apoio à Produção de Material Didático de Docentes da UNESP, que contempla textos de apoio às aulas, material audiovisual, *homepages*, *softwares,* material artístico e outras mídias, sob o selo CULTURA ACADÊMICA da Editora da UNESP, disponibilizando aos alunos material didático de qualidade com baixo custo e editado sob demanda.

Assim, é com satisfação que colocamos à disposição da comunidade acadêmica mais esta obra, ***"Trigonometria"***, de autoria das Professoras **Dra. Eliete Maria Gonçalves e Dra. Vanilda Miziara Mello Chueiri**, da Faculdade de Ciências do Campus de Bauru, esperando que ela traga contribuição não apenas para estudantes da UNESP, mas para todos aqueles interessados no assunto abordado.

SUMÁRIO

Apresentação.. 9
1 Trigonometria no triângulo retângulo....................................... 11
2 Arcos e ângulos.. 21
3 Funções trigonométricas... 31
3.1 Função seno.. 31
3.2 Função cosseno... 41
3.3 Função tangente.. 48
3.4 Função cotangente.. 52
3.5 Função secante.. 57
3.6 Função cossecante... 60
3.7 Exercícios... 63
4 Relações trigonométricas.. 81
4.1 Relações fundamentais.. 81
4.2 Relações conseqüentes.. 85
4.3 Exercícios... 87
5 Redução de arcos ao 1º quadrante... 95
6 Fórmulas de transformação... 105
6.1 Adição e subtração de arcos.. 105
6.2 Multiplicação de arcos.. 111
6.3 Exercícios... 115
6.4 Transformação de soma em produto...................................... 118
7 Equações trigonométricas... 127
8 Funções trigonométricas inversas... 139
8.1 Introdução... 139
8.2 Função inversa.. 140
8.3 Funções trigonométricas inversas.. 141
8.3.1 Função arco-seno... 141
8.3.2 Função arco-cosseno.. 144
8.3.3 Função arco-tangente... 147
8.3.4 Função arco-cotangente.. 149
8.3.5 Função arco-secante... 151
8.3.6 Função arco-cossecante.. 154
8.3.7 Exercícios.. 157
9 Referências Bibliográficas... 163
Sobre as Autoras... 165

APRESENTAÇÃO

Ao longo dos últimos anos, vem-se constatando que muitos alunos ingressantes nos cursos superiores da área de Ciências Exatas têm apresentado falhas de formação matemática, tanto conceituais, quanto de raciocínio lógico ou de traquejo algébrico. Assim, o processo de ensino e aprendizagem fica prejudicado, especialmente nas disciplinas do primeiro ano desses cursos. Nestas, as deficiências apresentadas pelos alunos quanto aos conteúdos matemáticos fundamentais têm causado sérios problemas. Tem-se constatado que grande parte dos calouros tem falhas ou desconhece esses conceitos fundamentais e, por conseqüência, outros relacionados. Com o objetivo de auxiliar os alunos no estudo das funções trigonométricas, desenvolveu-se este texto, apresentando suas definições e conceitos relacionados, com exemplos comentados e representação geométrica. Com a apresentação de exercícios detalhadamente resolvidos, objetivou-se mostrar ao estudante estratégias de resolução e encaminhamento, chamando a atenção para os erros mais freqüentes, usando todo o mecanicismo necessário para que ele atente a todas as “passagens”, ou seja, todo o “algebrismo” utilizado que ele, muitas vezes, desconhece. Em suma, pretende-se que o aluno, revendo objetivamente esses conteúdos já tratados anteriormente no Ensino Médio, “revisite” os conceitos e domine as técnicas de que necessita para bem acompanhar o que é discutido nas disciplinas de seu curso de graduação.

Assim, este é um texto de acompanhamento para as disciplinas dos cursos da área de Ciências Exatas que utilizem os conceitos aqui abordados, que pode ser consultado pelo aluno sempre que necessitar.

1 TRIGONOMETRIA NO TRIÂNGULO RETÂNGULO

A trigonometria, como se pode deduzir da própria palavra, trata da determinação dos elementos de um triângulo. Do ponto de vista etimológico, a palavra trigonometria significa *medida dos triângulos*, sendo formada por três radicais gregos:
tri: três ; gonos: ângulo ; metrein: medir.
Os primeiros estudos sobre trigonometria tiveram origem nas relações existentes entre lados e ângulos em um triângulo, empregadas pelo astrônomo grego Hiparco, por volta do ano 140 a.C., que organizou diversas tabelas relacionando as razões trigonométricas com ângulos. Hoje em dia, as razões trigonométricas mais utilizadas são três: seno, cosseno e tangente.
Existem vestígios de um estudo de trigonometria entre os babilônios, que a usavam para resolver problemas práticos de navegação, astronomia e agrimensura. Além dessas aplicações, as funções trigonométricas também têm papel importante no estudo de todos os tipos de fenômenos vibratórios: som, luz, eletricidade etc.

Trigonometria no triângulo retângulo

Considere-se o triângulo retângulo ABC, reto em A (Figura 1).

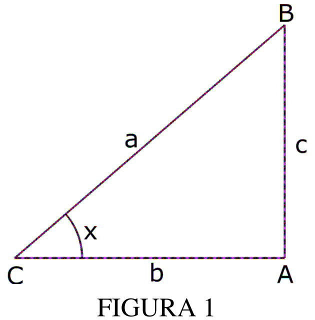

FIGURA 1

Seja **x** a medida do ângulo $A\hat{C}B$. Podem-se estabelecer entre seus lados as seguintes relações:

(1) ***Seno de x***: é a razão entre a medida do cateto oposto ao ângulo $\hat{C}$ e a medida da hipotenusa, denotada por senx.
Assim:

$$\text{sen}x = \frac{AB}{CB} = \frac{\text{cateto oposto a } x}{\text{hipotenusa}} = \frac{c}{a}.$$

(2) ***Cosseno de x***: é a razão entre a medida do cateto adjacente ao ângulo $\hat{C}$ e a medida da hipotenusa, denotada por cosx.
Assim:

$$\cos x = \frac{CA}{CB} = \frac{\text{cateto adjacente a } x}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{a}.$$

(3) ***Tangente de x***: é a razão entre as medidas do cateto oposto e do cateto adjacente ao ângulo $\hat{C}$, denotada por tgx.
Assim:

$$\text{tg}x = \frac{AB}{CA} = \frac{\text{cateto oposto a } x}{\text{cateto adjacente a } x} = \frac{c}{b}.$$

A essas razões dá-se o nome de razões trigonométricas. Observe-se que, quando se fala em hipotenusa e em catetos, está-se referindo às suas medidas.

Exemplos:

1) Determinar os valores de seno, cosseno e tangente dos ângulos do triângulo retângulo ABC, sendo que um dos catetos mede 24 cm e a hipotenusa mede 25 cm.

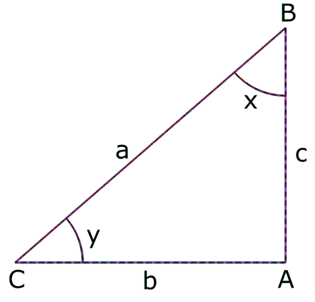

FIGURA 2

O triângulo descrito no enunciado pode ser representado geometricamente, como mostra a Figura 2.
Uma vez que um dos catetos tem medida 24 cm, pode-se pensar, por exemplo, que b = 24 cm; como a hipotenusa tem medida a = 25 cm,

vem:

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow c^2 = 625 - 576 = 49 \therefore c = 7 \text{ cm}.$$

Então:

$$\text{sen}\hat{B} = \text{sen}x = \frac{b}{a} = \frac{24 \text{ cm}}{25 \text{ cm}} = \frac{24}{25};$$

$$\cos\hat{B} = \cos x = \frac{c}{a} = \frac{7 \text{cm}}{25 \text{cm}} = \frac{7}{25};$$

$$\text{tg}\hat{B} = \text{tg}x = \frac{b}{c} = \frac{24 \text{cm}}{7 \text{cm}} = \frac{24}{7}.$$

Por outro lado, vem:

$$\text{sen}\hat{C} = \text{sen}y = \frac{c}{a} = \frac{7 \text{cm}}{25 \text{cm}} = \frac{7}{25};$$

$$\cos\hat{C} = \cos y = \frac{b}{a} = \frac{24 \text{cm}}{25 \text{cm}} = \frac{24}{25};$$

$$\text{tg}\hat{C} = \text{tg}y = \frac{c}{b} = \frac{7 \text{cm}}{24 \text{cm}} = \frac{7}{24}.$$

2) Em um triângulo ABC, reto em $\hat{B}$, sabe-se que a hipotenusa mede 27,5 cm e que $\text{sen}\hat{A} = 0{,}6$ .Determinar quanto mede cada cateto deste triângulo.

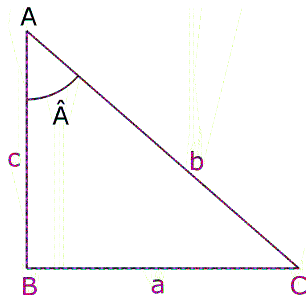

FIGURA 3

A partir da Figura 3, tem-se que:

$$\text{sen}\hat{A} = \frac{a}{b} = 0{,}6 \Rightarrow a = b \cdot 0{,}6.$$

Como b = 27,5 cm, vem:

a = (27,5 cm).0,6 = 16,5 cm.

3) Um triângulo retângulo ABC é reto em $\hat{B}$. Sabe-se que $tg\hat{A} = 1$ e que um dos catetos mede 15 cm. Determinar o perímetro do triângulo.

Considere-se a Figura 4. Tem-se:

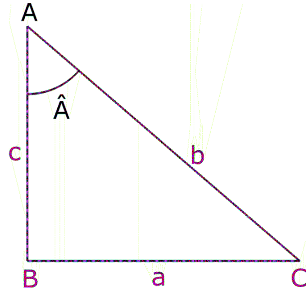

FIGURA 4

Tomando a medida **c** como sendo igual a 15 cm, vem:

$$tg\hat{A} = \frac{a}{c} = 1 \Rightarrow a = c = 15\,cm.$$

Portanto:

$$b^2 = a^2 + c^2 = 225 + 225 = 2 \cdot 225 \;\therefore\; c = \sqrt{2} \cdot 15\,cm.$$

Logo, o perímetro do triângulo é:

$$P = \left[15 + 15 + \sqrt{2} \cdot 15\right] = 15 \cdot \left(2 + \sqrt{2}\right) cm.$$

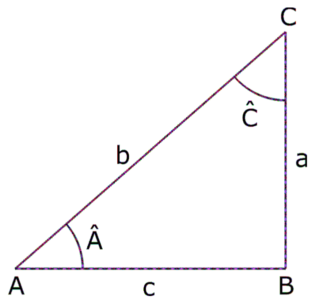

FIGURA 5

Observação: considere-se o triângulo retângulo ABC da Figura 5. Têm-se:

$$sen\hat{A} = \frac{a}{b} \text{ e } \cos\hat{C} = \frac{a}{b} \;\therefore\; sen\hat{A} = \cos\hat{C};$$

$\cos\hat{A} = \frac{c}{b}$ e $\text{sen}\hat{C} = \frac{c}{b}$ $\therefore$ $\cos\hat{A} = \text{sen}\hat{C}$.

Como as medidas de $\hat{A}$, $\hat{B}$ e $\hat{C}$ somam 180^o e $\hat{B}$ é reto, então $\hat{A} + \hat{C} = 90^0$, ou seja, esses ângulos são complementares. Conclui-se que, se as medidas de dois ângulos somam 90^o, o seno de um deles é igual ao cosseno do outro.

Exemplos:

1) Nas figuras seguintes, determinar o que se pede:

(a) $\text{sen}\hat{C}$, sendo dado que $\cos\hat{B} = \frac{3}{8}$.

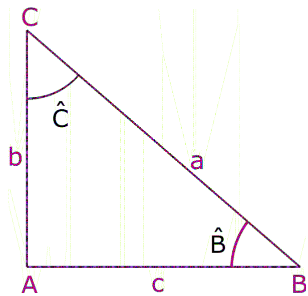

FIGURA 6

Sendo $\hat{B} + \hat{C} = 90^0$, segue-se que $\text{sen}\hat{C} = \cos\hat{B} = \frac{3}{8}$.

(b) $\cos(2 \cdot x)$, sendo dado que $\text{sen}x = 0{,}5$.

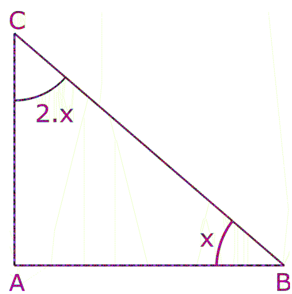

FIGURA 7

Sendo $\hat{B}+\hat{C}=90^0$, segue-se que $\cos(2\cdot x)=\text{sen}x=0{,}5$.

2) Determinar:

(a) $\cos\left(90^o-32^o\right)$, sabendo que $\text{sen}32^o=0{,}5299$.

Tem-se: $\cos\left(90^o-32^o\right)=\cos 58^o=\text{sen}32^o=0{,}5299$.

(b) $\cos x$, sabendo que $\text{sen}\left(90^o-x\right)=0{,}7236$.

Tem-se: $\cos x=\text{sen}\left(90^o-x\right)=0{,}7236$.

Observações:

1) O seno foi definido como sendo a razão entre a medida do cateto oposto e a medida da hipotenusa num determinado triângulo retângulo. Considerando o triângulo ABC, retângulo em A, da Figura 8, tem-se:

$\text{sen}x=\dfrac{b}{a}$; $\cos x=\dfrac{c}{a}$.

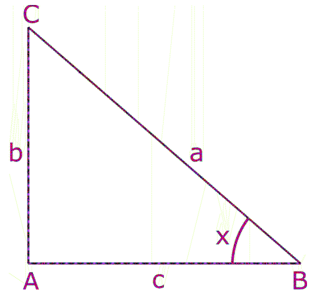

FIGURA 8

Como se viu, o seno foi definido como uma razão trigonométrica, isto é, o seno é um número, um valor resultante de uma divisão (razão) entre as medidas de dois lados de um triângulo. Mas, se um dos lados aumenta, os demais lados também aumentam e, curiosamente, a razão entre cateto oposto e hipotenusa mantém-se, isto é, o valor do seno depende, em última instância, "só" da medida do ângulo (que por sua vez "controla" as medidas dos lados desse triângulo). Se for fixado um dos ângulos menores que o ângulo reto (por exemplo, o ângulo de medida **x**) e, a partir desse triângulo, forem gerados outros triângulos, "esticando" os lados, mas mantendo o ângulo, os

valores das razões $\operatorname{sen} x = \frac{b}{a}$ e $\cos x = \frac{c}{a}$ permanecerão constantes.
Como, em qualquer triângulo retângulo, a hipotenusa é o lado que tem a maior medida, tem-se:

$0^o < x < 90^o \Rightarrow 0 < \operatorname{sen} x < 1$.

E qual é o valor do seno de 90º? Esse é um caso que se pode chamar de "especial", pois em relação ao ângulo reto nota-se que a hipotenusa **é** o cateto oposto, isto é a *medida do cateto oposto = medida da hipotenusa* = $\overline{CB}$ e, portanto, o seno de 90º é exatamente 1.
Conclusões análogas podem ser obtidas para o cosseno do ângulo de medida **x**.

2) No triângulo ABC, reto em $\hat{B}$ (Figura 9), calcular-se-á o valor da expressão $(\operatorname{sen}\hat{A})^2 + (\cos \hat{A})^2$, indicada por $\operatorname{sen}^2\hat{A} + \cos^2 \hat{A}$.
Denotando por **A** a medida do ângulo $\hat{A}$, tem-se:

$\operatorname{sen} A = \frac{a}{b}$ e $\cos A = \frac{c}{b}$.

Então:

$$\operatorname{sen}^2 A + \cos^2 A = \left(\frac{a}{b}\right)^2 + \left(\frac{c}{b}\right)^2 = \frac{a^2 + c^2}{b^2} = \frac{b^2}{b^2} = 1.$$

Esse resultado não depende do ângulo $\hat{A}$, ou seja, essa expressão é válida sempre. Assim, se **x** é a medida de um dos ângulos agudos de um triângulo retângulo, tem-se: $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$.

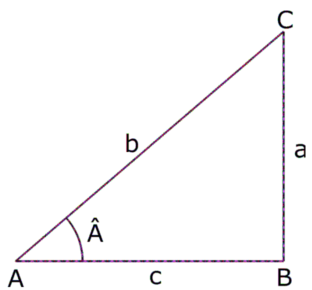

FIGURA 9

Também se observa que $\operatorname{tg} A = \frac{a}{c}$; por outro lado, tem-se:

$$\frac{\text{senA}}{\cos A} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{b}} = \frac{a}{c}.$$

Conclui-se, assim, que $\text{tgA} = \dfrac{\text{senA}}{\cos A}$, ou, genericamente falando:

$$\text{tgx} = \frac{\text{senx}}{\cos x}.$$

Exemplos:

1) Se α e β são as medidas de dois ângulos agudos de um triângulo retângulo e sabe-se que $\text{sen}\alpha = \dfrac{1}{3}$, determinar $\cos\alpha$, $\text{tg}\alpha$, $\text{sen}\beta$, $\cos\beta$ e $\text{tg}\beta$.

Como $\alpha + \beta = 90^{\text{o}}$, segue-se que $\cos\beta = \text{sen}\alpha = \dfrac{1}{3}$. Então, vem:

$$\text{sen}^2\beta + \cos^2\beta = 1 \Rightarrow \text{sen}^2\beta = 1 - \cos^2\beta = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9} \therefore \text{sen}\beta = \frac{2\cdot\sqrt{2}}{3}.$$

Uma vez que $\cos\alpha = \text{sen}\beta$, segue-se que $\cos\alpha = \dfrac{2\cdot\sqrt{2}}{3}$.

Portanto, vem:

$$\text{tg}\alpha = \frac{\text{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2\cdot\sqrt{2}}{3}} = \frac{1}{2\cdot\sqrt{2}} = \frac{1}{2\cdot\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

e

$$\text{tg}\beta = \frac{\text{sen}\beta}{\cos\beta} = \frac{\frac{2\cdot\sqrt{2}}{3}}{\frac{1}{3}} = \frac{2\cdot\sqrt{2}}{1} = 2\cdot\sqrt{2}.$$

2) Calcular $\text{sen}45^{\text{o}}$, $\cos 45^{\text{o}}$ e $\text{tg}45^{\text{o}}$.

Considere-se um quadrado cujo lado tem medida **a** unidades de comprimento. O Teorema de Pitágoras permite calcular a medida da diagonal do quadrado, conforme mostra a Figura 10.

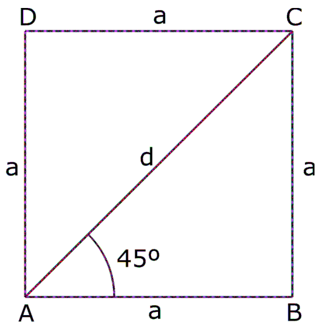

FIGURA 10

No triângulo ABC, tem-se: $a^2 + a^2 = d^2 \Rightarrow d = a \cdot \sqrt{2}$; assim, vem:

$$\text{sen}45^o = \frac{a}{d} = \frac{a}{a \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\cos 45^o = \frac{a}{d} = \frac{a}{a \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\text{tg}45^o = \frac{\text{sen}45^o}{\cos 45^o} = 1.$$

3) Calcular $\text{sen}30^o$, $\cos 30^o$, $\text{tg}30^o$, $\text{sen}60^o$, $\cos 60^o$ e $\text{tg}60^o$.

Seja ABC um triângulo eqüilátero, cujo lado mede **a** unidades de comprimento. Cada um de seus ângulos internos tem medida 60^o (Figura 11).

Do triângulo retângulo AHC, tem-se:

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 + h^2 = a^2 \Rightarrow h^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{3 \cdot a^2}{4} \;\therefore\; h = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot a.$$

Assim, desse mesmo triângulo, conclui-se que:

$$\text{sen}60^o = \frac{h}{a} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot a}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\cos 60^o = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{1}{2};$$

$$\operatorname{tg}60^{\circ}=\frac{\operatorname{sen}60^{\circ}}{\cos 60^{\circ}}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}=\sqrt{3}\,.$$

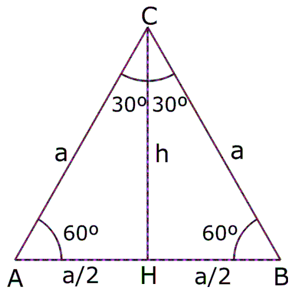

FIGURA 11

Uma vez que $30^{\circ}+60^{\circ}=90^{\circ}$, segue-se que:

$$\cos 30^{\circ}=\operatorname{sen}60^{\circ}=\frac{\sqrt{3}}{2}\,;$$

$$\operatorname{sen}30^{\circ}=\cos 60^{\circ}=\frac{1}{2}\,;$$

$$\operatorname{tg}30^{\circ}=\frac{\operatorname{sen}30^{\circ}}{\cos 30^{\circ}}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}\,.$$

2 ARCOS E ÂNGULOS

Arco de circunferência. É cada uma das partes em que uma circunferência fica dividida por dois de seus pontos (Figura 1).

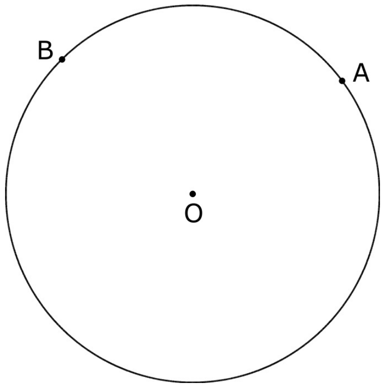

FIGURA 1

Observação: se A ≡ B, esses pontos determinam dois arcos: um arco nulo e um arco de uma volta.

Medida de um arco AB é o número real **a**, não negativo (ou seja, maior ou igual a zero), razão entre o arco e um arco unitário **u**, não nulo e de mesmo raio.
Em notação matemática, se escreve:

$$a = \frac{\text{arco}(AB)}{\text{arco}(u)}.$$

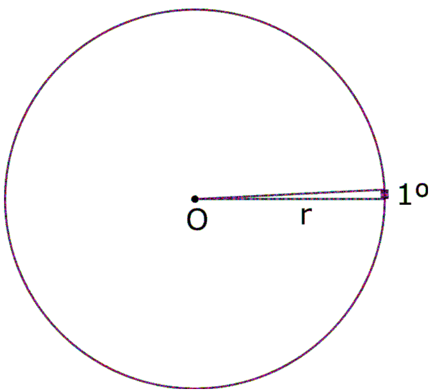

FIGURA 2

A *medida do comprimento do arco* AB pode ser feita utilizando-se qualquer unidade para medir seu raio, como o metro, o centímetro etc. As unidades de medida mais usuais de arcos de circunferência são o *grau* e o *radiano*.

Grau: o arco de um grau (1^0) corresponde a $\frac{1}{360}$ da circunferência na qual está contido o arco a ser medido (Figura 2). Logo, a circunferência tem 360^0.

Uma pergunta que se pode fazer é: "*por quê dividir a circunferência em 360 partes iguais*?". A História da Matemática responde a essa questão. As referências voltam-se aos babilônios, povo que viveu entre 4000 a.C. e 3000 a.C. e que, por motivos práticos, criaram um sistema de numeração sexagesimal (base 60). O número 60 possui uma grande quantidade de divisores distintos, a saber: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60, razão forte pela qual este número tenha sido adotado. Além disso, dividir um círculo em 6 partes iguais era algo muito simples para os especialistas daquela época, sendo possível que se tenha usado o número 60 para representar 1/6 do total que passou a ser 360.

Outro fato que pode ter influenciado na escolha do número 360 é, naquela época, estimava-se que o movimento de translação da Terra em volta do Sol se realizava em um período de aproximadamente 360 dias. Hiparco (no século II a.C.) mediu a duração do ano com grande exatidão ao obter 365,2467 dias (valor atualmente estimado em 365,2222 dias).

É bem provável que o sistema sexagesimal tenha influenciado a escolha da divisão do círculo em 360 partes iguais, assim como a divisão de cada uma dessas partes em 60 partes menores e, também, na divisão de cada uma dessas subpartes em 60 partes menores (os babilônios usualmente trabalhavam com frações cujos denominadores eram potências de 60).

Das expressões

primeiras menores partes → *partes minutae primae*

segundas menores partes → *partes minutae secundae*

surgiram, aparentemente, as palavras *minuto* e *segundo*. Assim, usa-se a unidade de medida de ângulo com *graus*, *minutos* e *segundos*.

A unidade de medida de ângulo do Sistema Internacional é o *radiano*, unidade alternativa criada pelo matemático Thomas Muir e pelo físico James T. Thomson, de forma independente. Na verdade, o termo *radian* apareceu pela primeira vez num trabalho de Thomson, em 1873. Até o final do século XIX, eram poucos os que usavam essa nomenclatura. Outros termos para o radiano eram: *Pi-medida*, *circular* ou *medida arcual*, o que mostra a forma lenta com que se dá a alteração de certos hábitos.

Radiano: um radiano (1 rad) é um arco unitário cujo comprimento é igual ao raio da circunferência na qual está contido o arco a ser medido.
Em outras palavras, se fosse possível "esticar" o arco e medir o comprimento do segmento **s** obtido, esse comprimento seria igual ao raio **r** da circunferência (Figura 3).

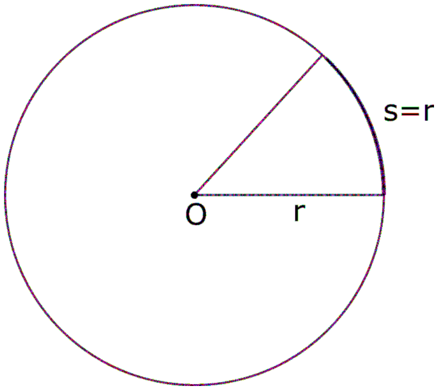

FIGURA 3

Em qualquer circunferência, a razão entre seu comprimento e seu diâmetro é constante. Essa constante é o número irracional $\boldsymbol{\pi}$. Chamando de **C** o comprimento de uma circunferência e sendo **d** seu diâmetro, tem-se:

$$\frac{C}{d} = \pi \Rightarrow C = \pi \cdot d = 2 \cdot \pi \cdot r$$

Assim, para determinar quanto vale o arco de uma volta, ou seja, um arco de circunferência, em radianos, procede-se da seguinte maneira:

- o arco de medida 1 rad tem comprimento r;
- o arco de circunferência tem comprimento $2 \cdot \pi \cdot r$.

Então, por uma simples regra de três, obtém-se:

$$1 \text{ rad} \rightarrow r \qquad \therefore \alpha = \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{r} \text{rad} = 2 \cdot \pi \text{ rad}$$
$$\alpha \text{ rad} \rightarrow 2 \cdot \pi \cdot r$$

Dessa forma, para uma circunferência qualquer, tem-se que 360^{o} correspondem a $2 \cdot \pi$ rad, ou seja, 180^{o} correspondem a π rad. Portanto, a transformação da medida de um arco dada em graus para radianos (e vice-versa) é feita aplicando-se uma regra de três.

Exemplos:

1) Exprimir 30^{o} em radianos.
Faz-se a seguinte regra de três:

$$180^{o} \rightarrow \pi \text{ rad} \qquad \therefore x = \frac{30^{0} \cdot \pi}{180^{0}} \text{rad} = \frac{\pi}{6} \text{ rad}$$
$$30^{o} \rightarrow x \text{ rad}$$

2) Exprimir $\frac{\pi}{180}$rad em graus.
Tem-se:

$$\pi \text{ rad} \rightarrow 180^{0} \qquad \therefore x = \frac{180^{0} \cdot \frac{\pi}{180}}{\pi} = 10^{0}$$
$$\frac{\pi}{180} \text{rad} \rightarrow x^{0}$$

3) Exprimir 1 rad em graus.
Novamente, faz-se:

$$\pi \text{ rad} \rightarrow 180^{0} \qquad \therefore x = \frac{180^{0} \cdot 1}{\pi} = \frac{180^{0}}{\pi}$$
$$1 \text{ rad} \rightarrow x^{0}$$

Neste caso, para se obter o valor do arco em graus, recorre-se ao valor de π, que como se sabe, é um número irracional e vale, aproximadamente, 3,1416. Então, vem:

$$x = \frac{180^{0}}{\pi} \cong \frac{180^{0}}{3{,}1416}$$

Para se efetuar essa divisão, é preciso lembrar que 1^{0} tem 60’ (sessenta minutos) e 1’ tem 60” (sessenta segundos). Assim, faz-se:

1800000^0	31416
229200^0	$57^0 17' 44''$
09288^0	
$\times\ 60'$	
$557280'$	
$243120'$	
$23208'$	
$\times\ 60''$	
$1392480''$	

Ângulo central. Um ângulo central é aquele que possui o vértice no centro de uma circunferência (Figura 4).

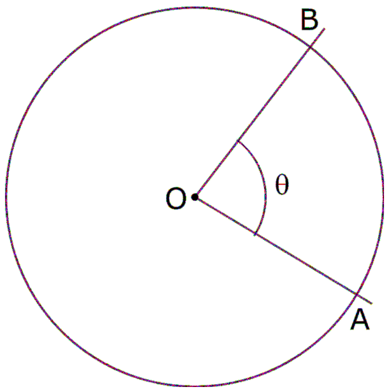

FIGURA 4

A Figura 4 mostra o ângulo central **θ**, ou seja, AÔB, que determina na circunferência o arco AB.
A medida do ângulo **θ** é igual à medida do arco AB que ele determina sobre a circunferência com centro no vértice.

Observações:

1) Como se viu, a medida de um ângulo **θ** é igual à medida do arco AB que ele determina sobre a circunferência com centro no vértice. Assim, se a unidade de medida for o grau e o arco AB medir, por exemplo, 60^o, então o ângulo **θ** também medirá 60^o. Se a unidade de medida for o radiano e o arco AB medir, por exemplo, $\frac{\pi}{6}\text{rad}$, en-

tão o ângulo **θ** também medirá $\frac{\pi}{6}\text{rad}$.

2) Não se deve confundir <u>medida de um arco</u> com <u>medida do comprimento desse arco</u>. Por exemplo, na Figura 5, os arcos AB e CD têm a mesma medida **θ**, mas não têm o mesmo comprimento.

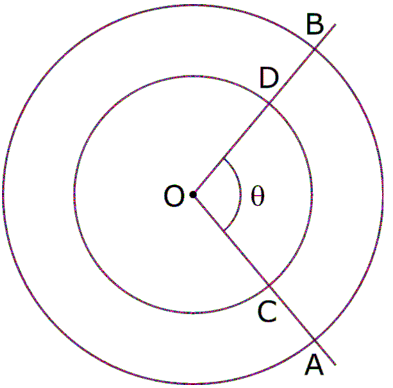

FIGURA 5

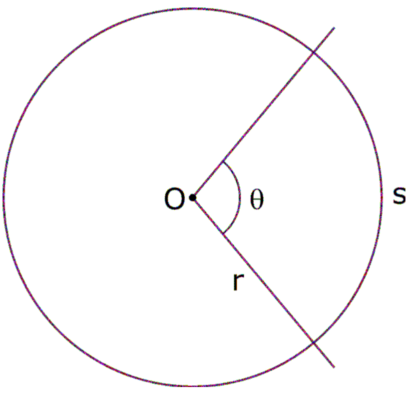

FIGURA 6

3) Chamando de **s** o comprimento de um arco e de **θ** a sua medida em radianos, sendo **r** a medida do raio da circunferência, tem-se a seguinte correspondência:

comprimento do arco $2 \cdot \pi \cdot r$ $\rightarrow$ medida do ângulo central $2 \cdot \pi$

comprimento do arco s $\rightarrow$ medida do ângulo central θ

$$\therefore\ s = \frac{2 \cdot \pi \cdot r \cdot \theta}{2 \cdot \pi} = r \cdot \theta$$

Na Figura 6 tem-se o arco de medida **θ** e comprimento **s**. Tem-se:

$s = r \cdot \theta$, ou $\theta = \dfrac{s}{r}$.

Exemplos:

1) Em uma circunferência que tem 28 cm de diâmetro, um arco tem 12 cm de comprimento (Figura 7). Qual é a medida, em radianos, do ângulo central correspondente?
Tem-se: o raio da circunferência mede 14 cm. Então:

$$\theta = \frac{12\ \text{cm}}{14\ \text{cm}} = \frac{6}{7}\ \text{rad}.$$

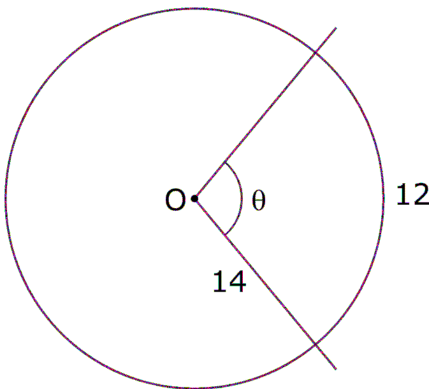

FIGURA 7

2) Determinar quanto vale o raio de uma circunferência, sabendo que um arco que mede 10 cm de comprimento corresponde a um ângulo central de $\dfrac{5}{6}$ rad.

Têm-se: $\theta = \dfrac{5}{6}$ rad e s = 10 cm. Então:

$$s = r \cdot \theta \Rightarrow r = \frac{s}{\theta} = \frac{10}{\frac{5}{6}} = 12\ \therefore\ r = 12\ \text{cm}.$$

Arco orientado. É um arco de circunferência sobre o qual se adota um sentido (Figura 8). O sentido que se considera positivo é o anti-horário.

Medida algébrica do arco orientado é a medida do arco geométrico AB multiplicada por **+1** ou por **–1**, conforme o sentido seja positivo ou negativo.

Notação: $\overset{\frown}{AB}$

Nas Figuras 8 e 9 têm-se, respectivamente:

- $\overset{\frown}{AB}$ = + medida do arco AB;
- $\overset{\frown}{BA}$ = - medida do arco AB

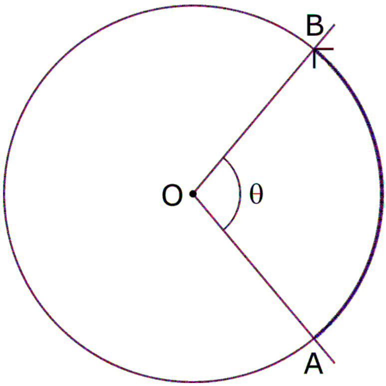

FIGURA 8

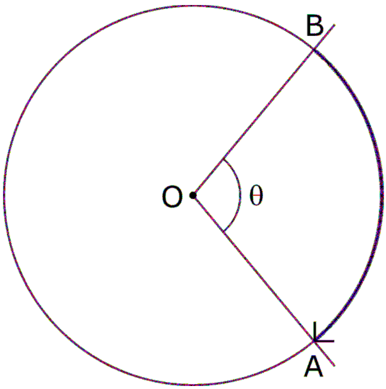

FIGURA 9

Arco trigonométrico. Se tem-se um arco $\overset{\frown}{AB}$ cuja medida, em radianos, no sentido positivo, é a_0, sendo $0 \le a_0 < 2 \cdot \pi$, o *arco trigonométrico AB* é o conjunto dos números da forma: $a = a_0 + 2 \cdot k \cdot \pi$ $(k \in Z)$.

Observa-se, assim, que, para cada valor de **k**, **a** assume um valor numérico diferente, que recebe a denominação de *determinação positiva* ou *determinação negativa*, conforme **k** seja positivo ou negativo, como descrito a seguir:

- $k = 0 \Rightarrow a = a_0 \Rightarrow$ 1ª determinação positiva do arco AB
- $k = 1 \Rightarrow a = a_0 + 2.\ \pi \Rightarrow$ 2ª determinação positiva do arco AB
- $k = 2 \Rightarrow a = a_0 + 4.\ \pi \Rightarrow$ 3ª determinação positiva do arco AB

....

- $k = -1 \Rightarrow a = a_0 - 2.\ \pi \Rightarrow$ 1ª determinação negativa do arco AB
- $k = -2 \Rightarrow a = a_0 - 4.\ \pi \Rightarrow$ 2ª determinação negativa do arco AB

....

Exemplos:

1) Determinar a 1ª determinação positiva dos arcos seguintes.

(a) $a = \dfrac{8 \cdot \pi}{3}$

Efetuando-se a divisão de 8 por 3, vem: $\dfrac{8}{3} = 2 + \dfrac{2}{3}$. Assim, tem-se:

$$a = \left(2 + \frac{2}{3}\right) \cdot \pi = 2 \cdot \pi + \frac{2}{3} \cdot \pi .$$

Logo, a 1ª determinação positiva do arco dado é $a_0 = \dfrac{2 \cdot \pi}{3}$.

(b) $a = \dfrac{125 \cdot \pi}{11}$

Efetuando-se a divisão de 125 por 11, obtém-se: $\dfrac{125}{11} = 11 + \dfrac{4}{11}$. Então:

$$\frac{125}{11} \cdot \pi = \left(11 + \frac{4}{11}\right) \cdot \pi = 11 \cdot \pi + \frac{4}{11} \cdot \pi = 10 \cdot \pi + \pi + \frac{4}{11} \cdot \pi =$$

$$= 10 \cdot \pi + \frac{15}{11} \cdot \pi$$

Assim, a 1ª determinação positiva do arco dado é $a_0 = \frac{15 \cdot \pi}{11}$.

(c) $a = 1125^o$

Nesse caso, tem-se: $1125^o = 3 \cdot 360^o + 45^o$. Portanto, $a_0 = 45^o$.

(d) $a = -\frac{19 \cdot \pi}{6}$

Pode-se escrever: $\frac{19}{6} = 3 + \frac{1}{6}$. Portanto, tem-se:

$$-\frac{19 \cdot \pi}{6} = -\left(3 + \frac{1}{6}\right) \cdot \pi = -\left(3 \cdot \pi + \frac{1}{6} \cdot \pi\right) = -\left(2 \cdot \pi + \pi + \frac{1}{6} \cdot \pi\right) =$$

$$= -\left(2 \cdot \pi + \frac{7}{6} \cdot \pi\right)$$

Isso significa que o arco tem orientação negativa, correspondendo a um arco de circunferência + um arco de medida $\frac{7}{6} \cdot \pi$, no sentido negativo. Assim, para se determinar a 1ª determinação positiva, subtrai-se esse arco de 2.π, que é a medida do arco de circunferência.

$$\therefore a_0 = 2 \cdot \pi - \frac{7 \cdot \pi}{6} = \frac{5 \cdot \pi}{6}.$$

Arcos côngruos. Dois arcos são côngruos se suas medidas apresentam diferença múltipla de $2 \cdot \pi$ (ou 360^o).
É claro que dois arcos côngruos têm a mesma origem e a mesma extremidade.

Exemplos:

1) 25^o e $745^o \Rightarrow 745^o - 25^o = 720^o = 2 \cdot 360^o$

2) $\frac{\pi}{6}$ e $-\frac{35 \cdot \pi}{6}$:

$$\begin{cases} \frac{\pi}{6} - \left(-\frac{35 \cdot \pi}{6}\right) = \frac{\pi}{6} + \frac{35 \cdot \pi}{6} = \frac{36 \cdot \pi}{6} = 6 \cdot \pi = 3 \cdot 2 \cdot \pi \\ -\frac{35 \cdot \pi}{6} - \frac{\pi}{6} = -\frac{36 \cdot \pi}{6} = -6 \cdot \pi = -3 \cdot 2 \cdot \pi \end{cases}$$

3 FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

Ciclo trigonométrico. É uma circunferência orientada de raio unitário, na qual se fixa um ponto **A** para origem de todos os arcos.
Estabelecendo um sistema de coordenadas cartesianas ortogonais com origem no centro do ciclo trigonométrico, este fica dividido em quatro regiões, chamadas quadrantes, pelos pontos $A(1,0)$, $B(0,1)$, $A'(-1,0)$ e $B'(0,-1)$. Ao ciclo trigonométrico são associados quatro eixos para o estudo das funções trigonométricas, conforme mostra a Figura 1.

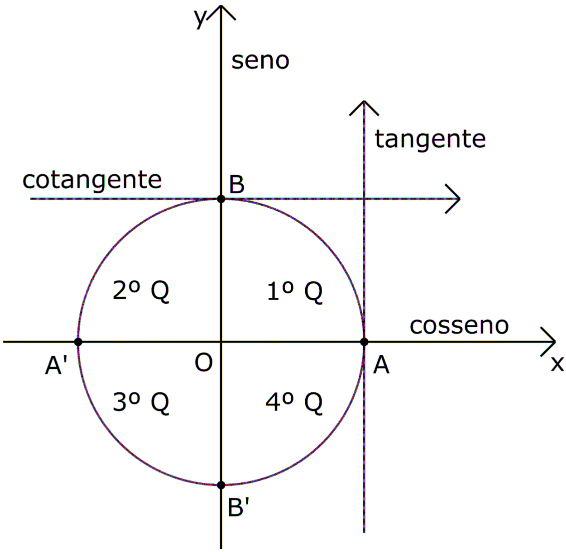

FIGURA 1

As secantes e as cossecantes são estudadas, respectivamente, nos eixos dos cossenos e dos senos, conforme se verá adiante.

3.1 Função Seno

Considerando-se, no ciclo trigonométrico, um arco orientado $\overset{\frown}{AM}$ de medida **x**, o qual determina o segmento orientado $\overrightarrow{OM}$, a projeção deste segmento sobre o eixo dos senos é o segmento orientado $\overrightarrow{OM_1}$. Por definição, tem-se que $\operatorname{sen}\left(\overset{\frown}{AM}\right) = \overline{OM_1}$, ou seja,

$\operatorname{sen} x = \overline{OM_1}$ (Figura 2).
Observe que, dado um número real **x** qualquer, sempre se pode associar a ele um arco $\overset{\frown}{AM}$, de medida **x**, e, a esse arco, pode-se associar um único número real $y = \overline{OM_1}$. Tem-se, assim, uma função, chamada *função seno*, isto é:

$$\begin{aligned} f : R &\rightarrow R \\ x &\mapsto y = \operatorname{sen}(x) \end{aligned}.$$

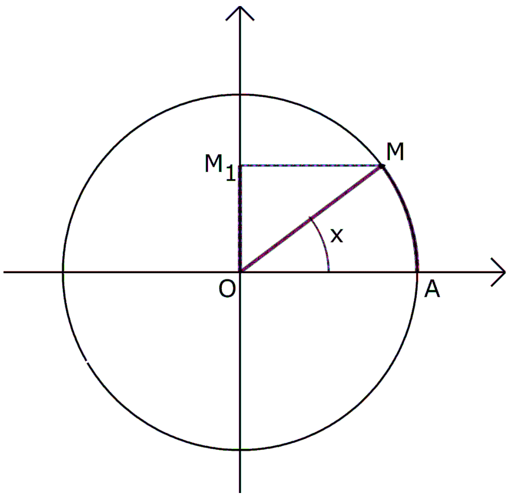

FIGURA 2

Por sua definição, fica claro que o valor do seno de um arco nunca será maior do que 1 e nunca será menor do que –1, já que o ciclo trigonométrico tem raio 1. Além disso, observa-se que arcos que têm a mesma extremidade possuem senos iguais. Assim, a cada volta completa no ciclo trigonométrico, os valores do seno começam a se repetir. Diz-se, então, que a função é periódica, de período $2 \cdot \pi$, que é a medida de um arco de circunferência.
Têm-se, ainda, as seguintes informações sobre essa função:
<u>Paridade</u>: para verificar a paridade, faz-se: $f(-x) = \operatorname{sen}(-x)$. Vê-se, no ciclo trigonométrico apresentado na Figura 3, que $\operatorname{sen} x = \overline{OM_1}$ e que $\operatorname{sen}(-x) = \overline{OM_2} = -\overline{OM_1}$.
Conclui-se, assim, que $\operatorname{sen} x = -\operatorname{sen}(-x)$.
Logo, $f(-x) = -f(x)$, ou seja, f é uma função ímpar e, portanto,

seu gráfico apresenta simetria em relação à origem do plano cartesiano.

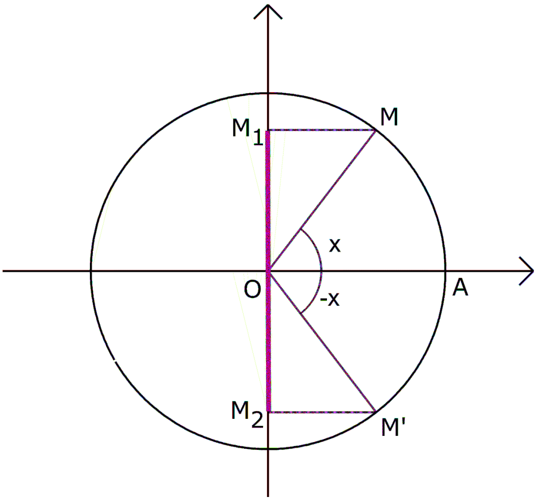

FIGURA 3

<u>Sinal</u>: pela definição da função seno, esta é positiva no 1º e 2º quadrantes e negativa no 3º e 4º quadrantes.

<u>Gráfico</u>: em geral, estuda-se a função seno para arcos no intervalo $[0, 2\cdot\pi]$, já que, conforme dito anteriormente, a função é periódica de período $2\cdot\pi$, o que significa que seu gráfico se repete a cada intervalo de amplitude $2\cdot\pi$ radianos. Assim, toma-se, inicialmente, $M \equiv A$; depois, o ponto **M** se movimenta sobre o ciclo trigonométrico no sentido anti-horário (positivo), até completar uma volta. Analisando o que ocorre com o segmento $\overline{OM_1}$ e considerando os chamados *arcos notáveis*, tem-se a seguinte tabela:

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	$2\cdot\pi$
y	0	1	0	-1	0

O gráfico de f é mostrado na Figura 4.

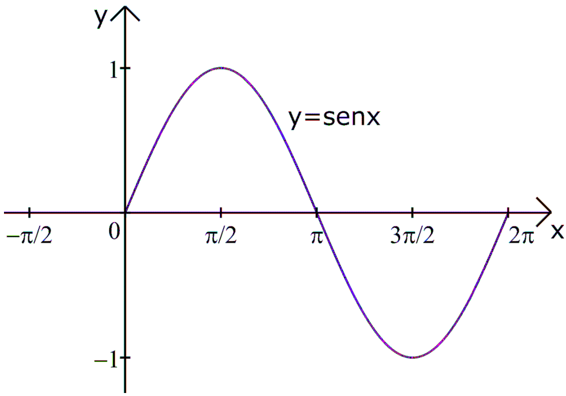

FIGURA 4

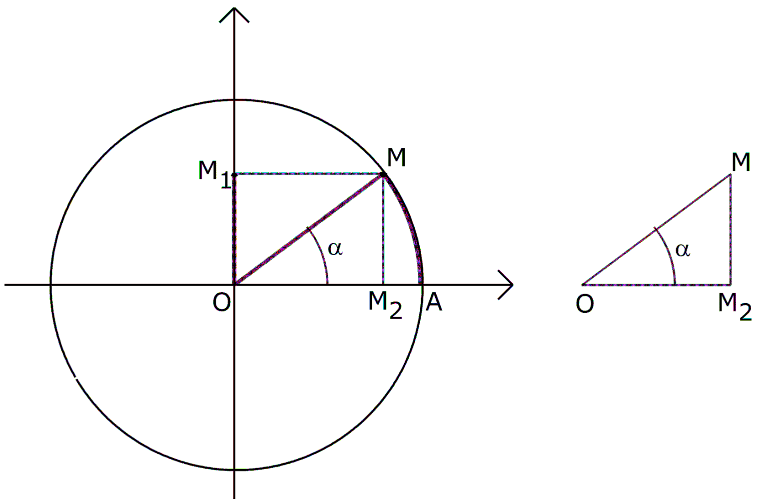

FIGURA 5

Observação: pode surgir, aqui, a seguinte pergunta: e se fosse definido um ciclo trigonométrico diferente, com raio 4, por exemplo? O seno assumiria o valor 4 em $\frac{\pi}{2}$ e o valor -4 em $\frac{3 \cdot \pi}{2}$ e estaria, portanto, variando de -4 a 4? Bem, se o seno for tomado como sendo a medida do segmento de reta $\overline{OM_1}$, como na Figura 2, esquecendo toda uma trajetória anterior, estaria correto. Estaria correto, mas não seria o seno que classicamente se conhece, pois, quando se iniciou o estudo da trigonometria, o seno foi definido como sendo a razão entre a medida do cateto oposto ao ângulo e a medida da hipotenusa

num determinado triângulo retângulo. Sabe-se que uma circunferência tem 360º, isto é, se se fizer, por exemplo, um ângulo α variar de 0^o a 360º ter-se-á uma "volta" (circunferência) completa e, conseqüentemente, nessa circunferência, sempre se poderá, a partir do ângulo α, "recuperar" um triângulo retângulo (Figura 5).
Tomando-se um raio qualquer para essa circunferência (por exemplo, r = 4), ter-se-á a hipotenusa do triângulo OM_2M (retângulo em M_2) com medida 4 unidades e, assim, o seno do ângulo α será $\frac{\overline{M_2M}}{4}$. Por outro lado, tomando-se o raio da circunferência igual a 1 (ou seja, o ciclo trigonométrico como definido), a hipotenusa do triângulo terá medida 1 e o valor do seno será $\overline{M_2M}$, que é igual à medida do segmento $\overline{OM_1}$, e que é exatamente a ordenada do ponto M. Assim, a ordenada do ponto M só representará o valor do seno de α se a circunferência for o ciclo trigonométrico (ou seja, se o raio da circunferência for igual a 1). Note-se, porém, que, independentemente da medida do raio, o ângulo α não se altera e, portanto, em qualquer circunferência, o seno de α será o mesmo. Exatamente por isso, o seno de $\frac{\pi}{2}$ nunca será maior que 1 (mesmo que a circunferência tenha raio maior que 1).

Exemplos:

1) Estudar a função $y = f(x) = 2 + \text{sen}x$, para $0 \le x \le 2 \cdot \pi$.
É útil construir uma tabela, onde se atribuem os valores para **x**, obtendo-se os de senx e de y = 2 + senx, mostrada abaixo.

x	senx	y = 2 + senx
0	0	2
$\frac{\pi}{2}$	1	3
π	0	2
$\frac{3 \cdot \pi}{2}$	-1	1
$2 \cdot \pi$	0	2

A Figura 6 mostra os gráficos das funções $y = \operatorname{sen} x$ e $y = 2 + \operatorname{sen} x$, para efeito de comparação.

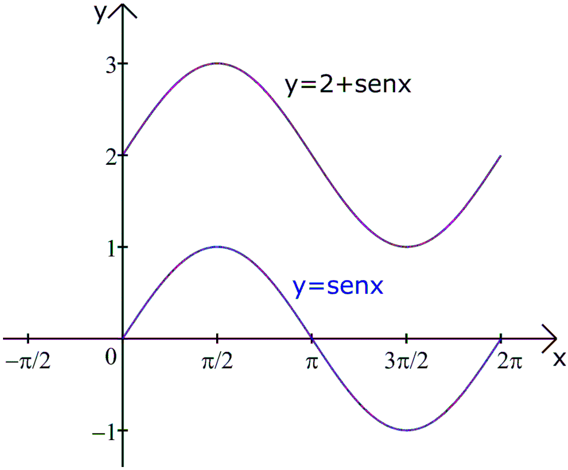

FIGURA 6

Tem-se:
<u>Domínio</u>: $D(f) = \mathbb{R}$.
<u>Paridade</u>: $f(-x) = 2 + \operatorname{sen}(-x) = 2 - \operatorname{sen} x$. Vê-se, assim, que $f(-x) \neq f(x)$ e $f(-x) \neq -f(x)$, ou seja, a função não é par, nem ímpar.

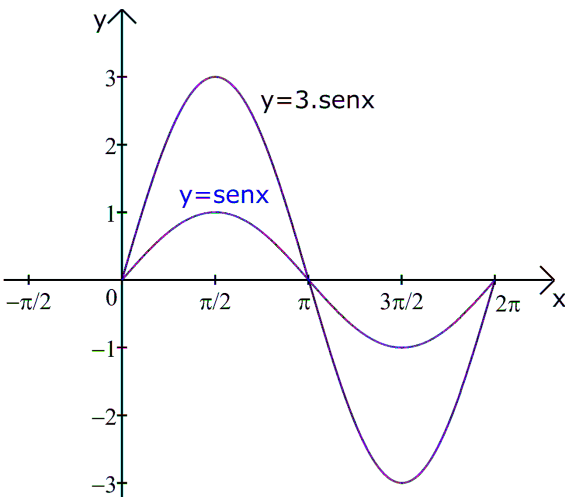

FIGURA 7

<u>Imagem</u>: pelo gráfico, observa-se que o conjunto imagem da função dada é $\text{Im}(f) = [1, 3]$. Isso significa que os valores da função dada foram transladados de 2 unidades, na direção positiva do eixo Oy, em relação à função $y = \text{sen}x$.

<u>Período</u>: não sofreu alteração, ou seja, é igual a $2 \cdot \pi$.

2) Estudar a função $y = f(x) = 3 \cdot \text{sen}x$, para $0 \le x \le 2 \cdot \pi$.

Assim como se fez no exemplo anterior, constrói-se uma tabela, atribuindo-se valores convenientes para a variável **x** e obtendo-se, em correspondência, os valores de senx e de $3 \cdot \text{sen}x$, como se vê na tabela seguinte.

x	senx	$y = 3 \cdot \text{sen}x$
0	0	0
$\frac{\pi}{2}$	1	3
π	0	0
$\frac{3 \cdot \pi}{2}$	-1	-3
$2 \cdot \pi$	0	0

Tem-se, assim, o gráfico da Figura 7.

Pode-se observar que:

<u>Domínio</u>: $D(f) = R$.

<u>Paridade</u>: $f(-x) = 3 \cdot \text{sen}(-x) = -3 \cdot \text{sen}x = -f(x)$. Portanto, a função é ímpar.

<u>Imagem</u>: pelo gráfico, observa-se que o conjunto imagem da função dada é $\text{Im}(f) = [-3, 3]$. Isso significa que os valores da função dada foram multiplicados por 3 unidades, considerando-se os valores da função $y = \text{sen}x$.

<u>Período</u>: não sofreu alteração, ou seja, é igual a $2 \cdot \pi$.

3) Estudar a função $y = f(x) = \text{sen}(2 \cdot x)$, para $0 \le x \le 2 \cdot \pi$.

No caso desta função, é útil construir-se uma tabela atribuindo, primeiramente, valores para o arco $(2 \cdot x)$, do qual se calculará o seno, e depois, a partir deles, obterem-se os valores de **x** e de $y = \text{sen}(2 \cdot x)$, os quais serão utilizados para construir o gráfico da função dada, como se segue:

$2 \cdot x$	x	$y = \text{sen}(2 \cdot x)$
0	0	0
$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{4}$	1
π	$\frac{\pi}{2}$	0
$\frac{3 \cdot \pi}{2}$	$\frac{3 \cdot \pi}{4}$	-1
$2 \cdot \pi$	π	0

Localizando, no plano cartesiano Oxy os valores de **x** e de **y** que constam da tabela acima, tem-se o gráfico de f, mostrado na Figura 8.

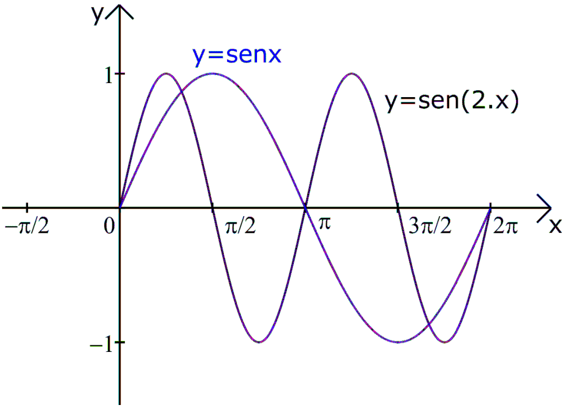

FIGURA 8

No caso dessa função, tem-se:

<u>Domínio</u>: $D(f) = R$.

<u>Paridade</u>: $f(-x) = \text{sen}(-2 \cdot x) = -\text{sen}(2 \cdot x) = -f(x)$. Portanto, a função é ímpar.

<u>Imagem</u>: pelo gráfico, observa-se que o conjunto imagem da função dada é $\text{Im}(f) = [-1, 1]$, ou seja, não sofreu alteração em relação à imagem da função $y = \text{sen}x$.

<u>Período</u>: o gráfico da função dada mostrado na Figura 8 torna evidente que o período se alterou. Pode-se observar que há uma repetição da curva depois do intervalo $[0, \pi]$, o que indica que o período

da função é π. Isso ocorreu porque o arco **x** foi multiplicado por 2. De modo genérico, o período da função $y = f(x) = sen(a \cdot x)$ é: $p = \frac{2 \cdot \pi}{|a|}$, onde a ≠ 0. No caso da função deste exemplo, tem-se: $p = \frac{2 \cdot \pi}{2} = \pi$.

4) Estudar a função $y = f(x) = sen\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$.

Também aqui se constrói uma tabela atribuindo, primeiramente, valores para o arco $\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$, do qual se calculará o seno, e depois, a partir deles, obtêm-se os valores de **x** e de $y = sen\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$:

$\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$	x	$y = sen\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$
0	$\frac{\pi}{4}$	0
$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3 \cdot \pi}{4}$	1
π	$\frac{5 \cdot \pi}{4}$	0
$\frac{3 \cdot \pi}{2}$	$\frac{7 \cdot \pi}{4}$	-1
$2 \cdot \pi$	$\frac{9 \cdot \pi}{4}$	0

Localizando, no plano cartesiano Oxy os valores de **x** e de **y** que constam da tabela acima, tem-se o gráfico de f, apresentado na Figura 9.

Tem-se, agora:

<u>Domínio</u>: $D(f) = R$.

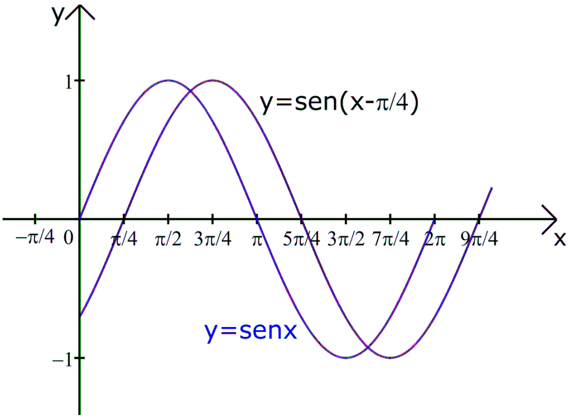

FIGURA 9

Paridade: $f(-x) = \text{sen}\left(-x - \frac{\pi}{4}\right)$. Portanto, a função não é par, nem ímpar uma vez que $f(-x) \neq f(x)$ e $f(-x) \neq -f(x)$.

Imagem: pelo gráfico, observa-se que o conjunto imagem da função dada é $\text{Im}(f) = [-1, 1]$, ou seja, não sofreu alteração em relação à imagem da função $y = \text{sen}x$.

Período: pelo gráfico da função dada mostrado na Figura 9 nota-se que o período não se alterou. O que houve é que o gráfico da função está transladado de $\frac{\pi}{4}$ unidades, no sentido positivo do eixo Ox, em relação à função y = senx. Isso ocorreu porque se subtraíram $\frac{\pi}{4}$ unidades ao arco **x**. Para ver que o período continua sendo igual a $2 \cdot \pi$, pode-se fazer:

$$p = \frac{9 \cdot \pi}{4} - \frac{\pi}{4} = 2 \cdot \pi,$$

isto é, considerou-se o valor final atribuído à variável **x**, menos o valor inicial.

3.2 Função cosseno

Considerando-se, no ciclo trigonométrico, um arco orientado $\overset{\frown}{AM}$ de medida **x**, o qual determina o segmento orientado $\overrightarrow{OM}$, a projeção deste segmento sobre o eixo dos cossenos, é o segmento orientado $\overrightarrow{OM_1}$. Por definição, tem-se que $\cos\left(\overset{\frown}{AM}\right) = \overline{OM_1}$, ou seja, $\cos x = \overline{OM_1}$ (Figura 10).

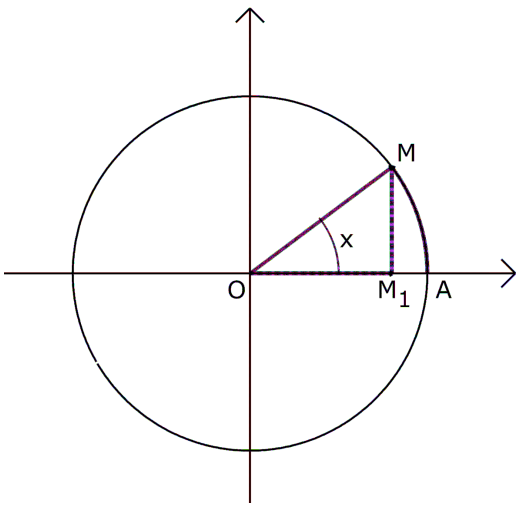

FIGURA 10

Observe que, dado um número real **x** qualquer, sempre se pode associar a ele um arco $\overset{\frown}{AM}$, de medida **x**, e, a esse arco, pode-se associar um único número real $y = \overline{OM_1}$. Tem-se, assim, uma função, chamada *função cosseno*, isto é:

$$f : R \to R$$
$$x \mapsto y = \cos(x)$$

Assim como ocorre com a função seno, o valor do cosseno de um arco estará sempre entre -1 e 1, já que o ciclo trigonométrico tem raio 1. Da mesma forma, arcos que têm a mesma extremidade possuem cossenos iguais. Assim, a cada volta completa no ciclo trigonométrico, os valores do cosseno começam a se repetir. Conclui-se, então, que a função é periódica, de período $2 \cdot \pi$.

Têm-se, ainda, as seguintes informações sobre essa função:
Paridade: para verificar a paridade, faz-se: $f(-x) = \cos(-x)$. Vê-se, no ciclo trigonométrico apresentado na Figura 11, que $\cos x = \overline{OM_1}$ e que $\cos(-x) = \overline{OM_1}$; logo, $\cos x = \cos(-x)$.
Logo, $f(-x) = f(x)$, ou seja, f é uma função par e, portanto, seu gráfico apresenta simetria em relação ao eixo Oy do plano cartesiano.

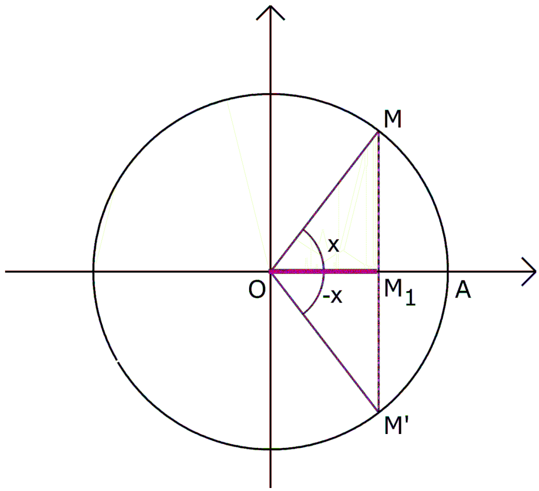

FIGURA 11

Sinal: pela definição da função cosseno, esta é positiva no 1º e 4º quadrantes e negativa no 2º e 3º quadrantes.
Gráfico: em geral, estuda-se a função cosseno para arcos no intervalo $[0, 2 \cdot \pi]$, já que a função é periódica de período $2 \cdot \pi$, o que significa que seu gráfico se repete a cada intervalo de amplitude $2 \cdot \pi$ radianos. Assim, toma-se, inicialmente, $M \equiv A$; depois, o ponto **M** se movimenta sobre o ciclo trigonométrico no sentido anti-horário (positivo), até completar uma volta. Analisando o que ocorre com o segmento $\overline{OM_1}$ e considerando os *arcos notáveis*, tem-se:

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	$2 \cdot \pi$
y	1	0	-1	0	1

A Figura 12 apresenta o gráfico de f .

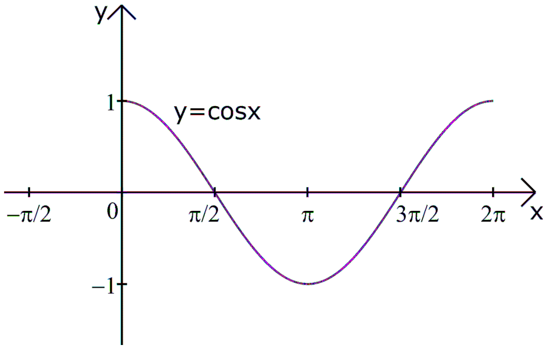

FIGURA 12

Analisando-se o gráfico, observa-se que o conjunto imagem da função cosseno é $Im(f)=[-1,1]$, isto é, -1 ≤ cosx ≤ 1, para todo número real **x**. Além disso, vê-se que a função é decrescente no 1º e 2º quadrantes e crescente no 3º e 4º quadrantes.

Exemplos:

1) Estudar a função $y=f(x)=-1+\cos x$, para $0 \le x \le 2\cdot\pi$.
Constrói-se uma tabela, onde se atribuem os valores para **x**, obtendo-se os de cosx e de $y=-1+\cos x$, como se segue:

x	cosx	$y=-1+\cos x$
0	1	0
$\frac{\pi}{2}$	0	-1
π	-1	-2
$\frac{3\cdot\pi}{2}$	0	-1
$2.\pi$	1	0

A Figura 13 mostra os gráficos das funções $y=\cos x$ e $y=-1+\cos x$.
Tem-se:
<u>Domínio</u>: $D(f)=R$.

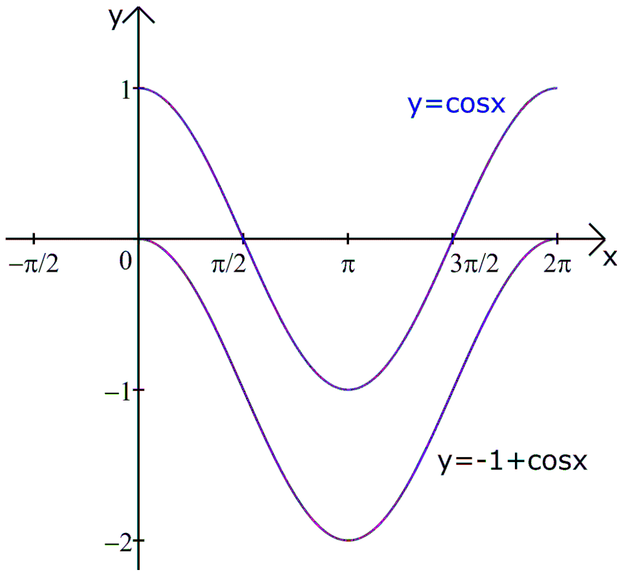

FIGURA 13

<u>Paridade</u>: $f(-x) = -1 + \cos(-x) = -1 + \cos x$. Assim, tem-se que $f(-x) \neq f(x)$ e $f(-x) \neq -f(x)$, ou seja, a função não é par, nem ímpar.

<u>Imagem</u>: pelo gráfico, observa-se que o conjunto imagem da função dada é $\mathrm{Im}(f) = [-2, 0]$. Isso significa que os valores da função dada foram transladados de 1 unidade, na direção negativa do eixo Oy, em relação à função $y = \cos x$.

<u>Período</u>: não sofreu alteração, ou seja, é igual a $2 \cdot \pi$.

2) Estudar a função $y = f(x) = \cos\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right)$.

Constrói-se uma tabela atribuindo, primeiramente, valores para o arco $\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right)$ para, a partir deles, obterem-se os valores de **x** e de $y = \cos\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right)$. Em seguida, localizam-se, no plano cartesiano Oxy, os valores de **x** e de **y** que constam da tabela e obtém-se o gráfico de f (Figura 14).

$\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$	x	$y=\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$
0	$-\frac{\pi}{3}$	1
$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{6}$	0
π	$\frac{2\cdot\pi}{3}$	-1
$\frac{3\cdot\pi}{2}$	$\frac{7\cdot\pi}{6}$	0
$2.\pi$	$\frac{5\cdot\pi}{3}$	1

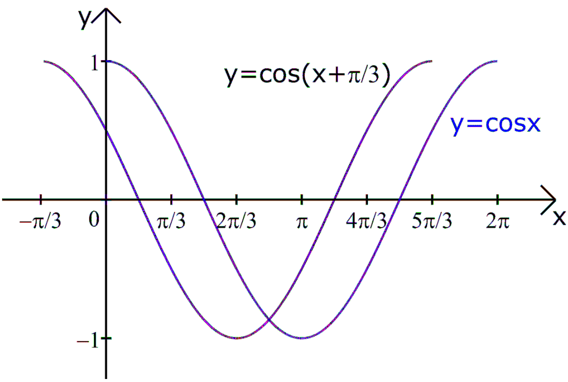

FIGURA 14

Tem-se:
Domínio: $D(f)=R$.

Paridade: $f(-x)=\cos\left(-x+\frac{\pi}{3}\right)$. Portanto, $f(-x)\neq f(x)$ e $f(-x)\neq -f(x)$, ou seja, a função não é par, nem ímpar.

Imagem: pelo gráfico, observa-se que o conjunto imagem da função dada é $\text{Im}(f)=[-1,1]$, ou seja, não sofreu alteração em relação à imagem da função $y=\cos x$.

Período: observando o gráfico da Figura 14, nota-se que o período não se alterou. Houve apenas uma translação do gráfico da função de $\frac{\pi}{3}$ unidades, no sentido negativo do eixo Ox, em relação à função $y = \cos x$, porque se somaram $\frac{\pi}{3}$ unidades ao arco **x**. Para ver que o período continua sendo igual a $2 \cdot \pi$, pode-se fazer:

$$p = \frac{5 \cdot \pi}{3} - \left(-\frac{\pi}{3} \right) = \frac{5 \cdot \pi}{3} + \frac{\pi}{3} = 2 \cdot \pi,$$

isto é, considerou-se o valor final atribuído à variável **x** menos o valor inicial.

3) Estudar a função $y = f(x) = 1 - 2 \cdot \cos\left(-\frac{x}{3} \right)$.

Uma vez que a função cosseno é par, tem-se que $\cos\left(-\frac{x}{3} \right) = \cos\left(\frac{x}{3} \right)$. Assim, estudar-se-á a função $y = 1 - 2 \cdot \cos\left(\frac{x}{3} \right)$, construindo-se uma tabela onde se atribuem valores para o arco $\left(\frac{x}{3} \right)$ para, a partir deles, obterem-se os valores de **x** e de **y**, conforme mostra a tabela:

$\frac{x}{3}$	x	$y = 1 - 2 \cdot \cos\left(\frac{x}{3} \right)$
0	0	-1
$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3 \cdot \pi}{2}$	1
π	$3 \cdot \pi$	3
$\frac{3 \cdot \pi}{2}$	$\frac{9 \cdot \pi}{2}$	1
$2 \cdot \pi$	$6 \cdot \pi$	-1

Localizando, no plano cartesiano Oxy, os valores de **x** e de **y** que constam da tabela acima, tem-se o gráfico de f, apresentado na Figura 15.

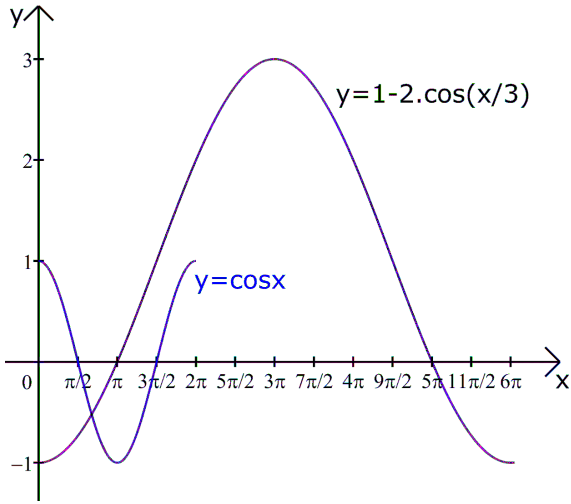

FIGURA 15

Tem-se:

<u>Domínio</u>: $D(f)=R$.

<u>Paridade</u>: $f(-x)=1-2\cdot\cos\left(-\frac{x}{3}\right)=1-2\cdot\cos\left(\frac{x}{3}\right)=f(x)$ a função é par.

<u>Imagem</u>: o conjunto imagem da função dada é $Im(f)=[-1,3]$, ou seja, foi modificado em relação à imagem da função $y=\cos x$, já que, além de se somar uma unidade à função cosseno, esta ainda foi multiplicada por 2. Essas operações acarretam, respectivamente, translação e ampliação da imagem da função, como se pode constatar no gráfico.

<u>Período</u>: o gráfico da função dada mostrado na Figura 15 torna evidente que o período se alterou, porque o arco **x** foi multiplicado por $\frac{1}{3}$. De modo genérico, tem-se que o período da função $f(x)=\cos(a\cdot x)$ é: $p=\frac{2\cdot\pi}{|a|}$, onde $a\neq 0$. No caso da função deste exemplo, tem-se: $p=\frac{2\cdot\pi}{\frac{1}{3}}=6\cdot\pi$.

3.3 Função Tangente

Considere-se o ciclo trigonométrico, no qual se traçou o eixo das tangentes, e um arco orientado $\overset{\frown}{AM}$, de medida **x**, de modo que a extremidade **M** do arco não coincida com o ponto $B(0,1)$ e nem com o ponto $B'(0,-1)$, ou seja, a medida **x** do arco é tal que $x \neq \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi \ (k \in Z)$. Este arco determina o segmento orientado $\overrightarrow{OM}$; considerando-se a reta que passa pelos pontos **O** e **M**, esta intercepta o eixos das tangentes no ponto **T**, determinando o segmento orientado $\overrightarrow{AT}$ (Figura 16).

Por definição: $tg\left(\overset{\frown}{AM}\right) = \overline{AT}$, ou seja, $tgx = \overline{AT}$.

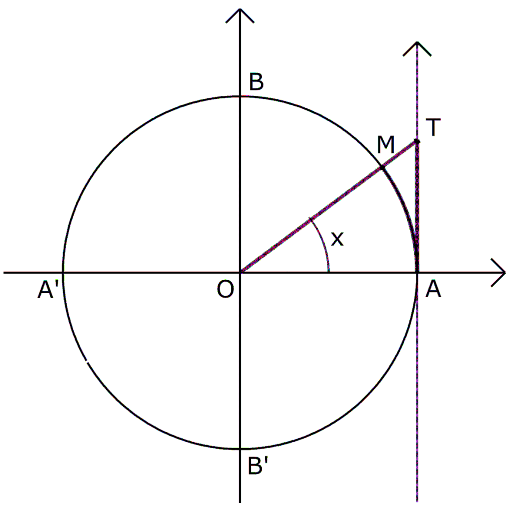

FIGURA 16

Observe que, dado um número real **x** $\left(x \neq \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi \ (k \in Z)\right)$, sempre se pode associar a ele um arco $\overset{\frown}{AM}$, de medida **x**, e, a esse arco, pode-se associar um único número real $y = \overline{AT}$. Tem-se, assim, uma função, chamada *função tangente*, isto é:

$$\begin{aligned} f:D &\rightarrow R \\ x &\mapsto y = tg(x) \end{aligned},$$

onde $D = \left\{ x \in R \,/\, x \neq \dfrac{\pi}{2} + k \cdot \pi \; (k \in Z) \right\}$.

Observa-se que arcos que têm a mesma extremidade possuem tangentes iguais e que dois arcos cujas medidas diferem de π radianos (ou múltiplos de π radianos) têm a mesma tangente. Isso significa que a função tangente é periódica, de período π.

Têm-se, ainda, as seguintes informações sobre essa função:

<u>Paridade</u>: para verificar a paridade, faz-se: $f(-x) = tg(-x)$. Vê-se, no ciclo trigonométrico apresentado na Figura 17, que $tgx = \overline{AT}$ e que $tg(-x) = \overline{AT'} = -\overline{AT}$; logo, $tgx = -tg(-x)$.

Uma vez que $f(-x) = -f(x)$, conclui-se que f é uma função ímpar e, portanto, seu gráfico apresenta simetria em relação à origem do plano cartesiano.

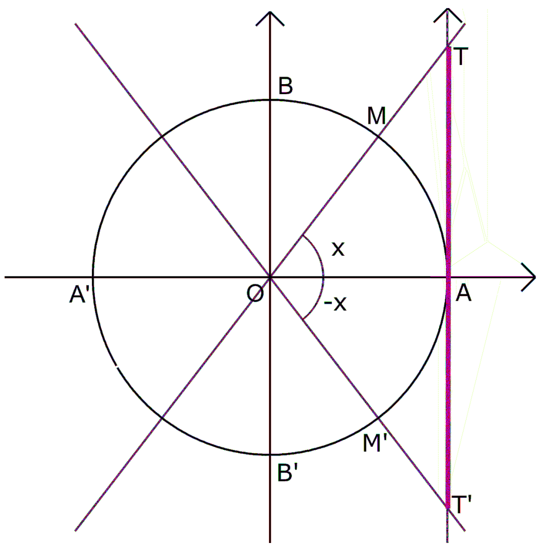

FIGURA 17

<u>Sinal</u>: pela definição da função tangente, esta é positiva no 1º e 3º quadrantes e negativa no 2º e 4º quadrantes.

<u>Gráfico</u>: a exemplo das demais funções trigonométricas, estuda-se, em geral, a função tangente para arcos no intervalo $[0, 2 \cdot \pi]$. Como a

função é periódica de período π, seu gráfico se repete a cada intervalo de amplitude π radianos. Tomando-se o ponto **M** sobre o ciclo trigonométrico, de modo que **M** não coincida com os pontos **B** e **B'**, e movimentando-o no sentido anti-horário (positivo), até completar uma volta, tem-se a seguinte tabela:

x	0	$\frac{\pi}{2}-\delta$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}+\delta$	π	$\frac{3\cdot\pi}{2}-\delta$	$\frac{3\cdot\pi}{2}$	$\frac{3\cdot\pi}{2}+\delta$	$2\cdot\pi$
y	0	$+\infty$	não está definida	$-\infty$	0	$+\infty$	não está definida	$-\infty$	0

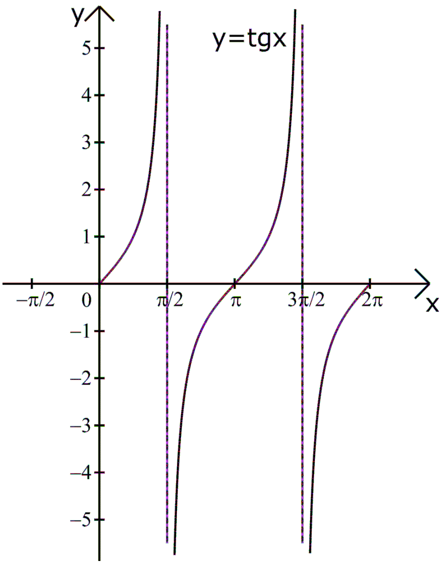

FIGURA 18

Nesta tabela, $\boldsymbol{\delta}$ representa um infinitésimo, ou seja, $\frac{\pi}{2}-\delta$, por exemplo, representa um arco cuja medida é infinitamente próxima de $\frac{\pi}{2}$ radianos, mas é menor do que $\frac{\pi}{2}$. Analogamente, $\frac{\pi}{2}+\delta$ representa um arco cuja medida é infinitamente próxima de $\frac{\pi}{2}$ radianos, mas é maior do que $\frac{\pi}{2}$ radianos. O gráfico de f é mostrado na Figura 18. Por ele, vê-se que o conjunto imagem da função tangente é o conjunto dos números reais, isto é, $Im(f) = R$. Além disso, vê-se que a função é sempre crescente.

Exemplo: estudar a função $y = f(x) = tg(2 \cdot x)$.
O procedimento é análogo ao já adotado para as funções seno e cosseno. Entretanto, para que seja possível calcular a tangente do arco $(2 \cdot x)$, é necessário que esse arco seja diferente de $\frac{\pi}{2} + k \cdot \pi \; (k \in Z)$.
Assim, tem-se:
$2 \cdot x \neq \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi \; (k \in Z) \Rightarrow x \neq \frac{\pi}{4} + k \cdot \frac{\pi}{2} \; (k \in Z)$.
Então: $D(f) = \left\{ x \in R \,/\, x \neq \frac{\pi}{4} + k \cdot \frac{\pi}{2} \; (k \in Z) \right\}$. Assim, atribuem-se valores para o arco $(2 \cdot x)$, obtendo-se, em seguida, valores para **x**, como se segue.

$(2 \cdot x)$	x	$y = tg(2 \cdot x)$
0	0	0
$\frac{\pi}{2} - \delta$	$\frac{\pi}{4} - \frac{\delta}{2}$	$+\infty$
$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{4}$	não está definida
$\frac{\pi}{2} + \delta$	$\frac{\pi}{4} + \frac{\delta}{2}$	$-\infty$
π	$\frac{\pi}{2}$	0
$\frac{3 \cdot \pi}{2} - \delta$	$\frac{3 \cdot \pi}{4} - \frac{\delta}{2}$	$+\infty$
$\frac{3 \cdot \pi}{2}$	$\frac{3 \cdot \pi}{4}$	não está definida
$\frac{3 \cdot \pi}{2} + \delta$	$\frac{3 \cdot \pi}{4} + \frac{\delta}{2}$	$-\infty$
$2 \cdot \pi$	π	0

Tem-se, assim o gráfico da Figura 19, a partir do qual, têm-se as conclusões para a função.

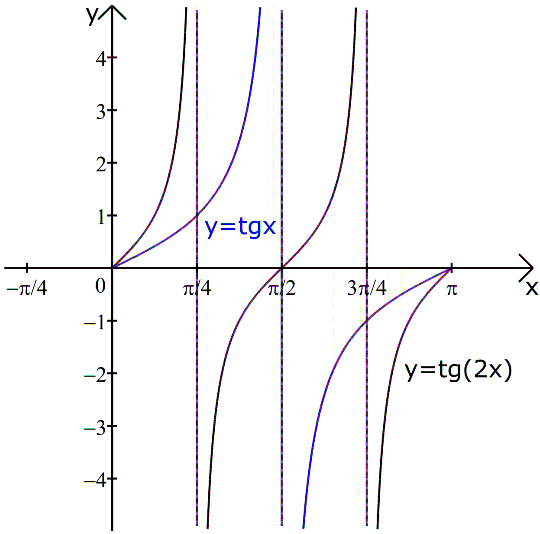

FIGURA 19

Paridade: $f(-x) = tg(2 \cdot (-x)) = -tg(2 \cdot x) = -f(x)$, ou seja, a função é ímpar.

Imagem: a exemplo da função $y = tgx$, tem-se $Im(f) = R$.

Período: o gráfico da função dada mostrado na Figura 19 mostra que o período se alterou, porque o arco **x** foi multiplicado por 2. De modo genérico, tem-se que o período da função $f(x) = tg(a \cdot x)$ é: $p = \frac{\pi}{|a|}$, onde a ≠ 0. No caso da função deste exemplo, tem-se: $p = \frac{\pi}{2}$.

3.4 Cotangente

Considere-se, no ciclo trigonométrico, o eixo das cotangentes e um arco orientado $\overset{\frown}{AM}$, de medida **x**, de modo que a extremidade **M** do arco não coincida com o ponto $A(1,0)$ e nem com o ponto $A'(-1,0)$, ou seja, a medida **x** do arco é tal que $x \neq k \cdot \pi \ (k \in Z)$. Este arco determina o segmento orientado $\overrightarrow{OM}$; tomando-se a reta que passa pelos pontos **O** e **M**, esta intercepta o eixos das cotangentes no ponto **C**, determinando o segmento orientado $\overrightarrow{BC}$ (Figura 20).

Por definição: $\cot g\left(\overset{\frown}{AM}\right) = \overline{BC}$, ou seja, $\cot gx = \overline{BC}$.

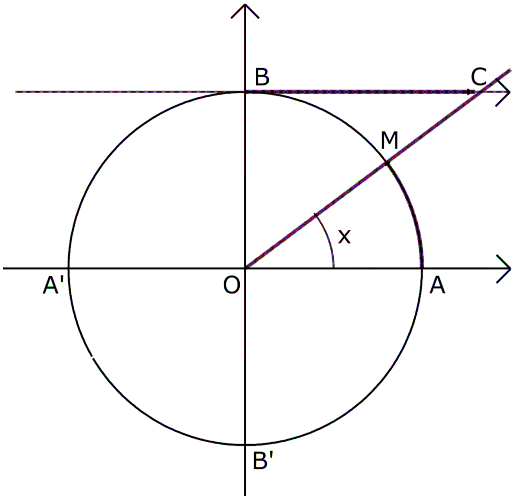

FIGURA 20

Observe que, dado um número real **x** $\left(x \neq k \cdot \pi \ (k \in Z)\right)$, sempre se pode associar a ele um arco $\overset{\frown}{AM}$, de medida **x**, e, a esse arco, pode-se associar um único número real $y = \overline{BC}$. Tem-se, assim, uma função, chamada *função cotangente*, isto é:

$$f : D \to R$$
$$x \mapsto y = \cot g(x)$$,

onde $D = \{x \in R;\ x \neq k \cdot \pi,\ k \in Z\}$.

Assim como ocorre com a função tangente, arcos que têm a mesma extremidade possuem cotangentes iguais e dois arcos cujas medidas diferem de π radianos (ou múltiplos de π radianos) têm a mesma cotangente. Isso significa que a função cotangente é periódica, de período π.

Têm-se, ainda, as seguintes informações sobre essa função:

<u>Paridade</u>: para verificar a paridade, faz-se: $f(-x) = \cot g(-x)$. Vê-

se, no ciclo trigonométrico apresentado na Figura 21, que $\cot gx = \overline{BC}$ e que $\cot g(-x) = \overline{BC'} = -\overline{BC}$, e, portanto, $\cot gx = -\cot g(-x)$. Logo, $f(-x) = -f(x)$, ou seja, f é uma função ímpar e, portanto, seu gráfico apresenta simetria em relação à origem do plano cartesiano.

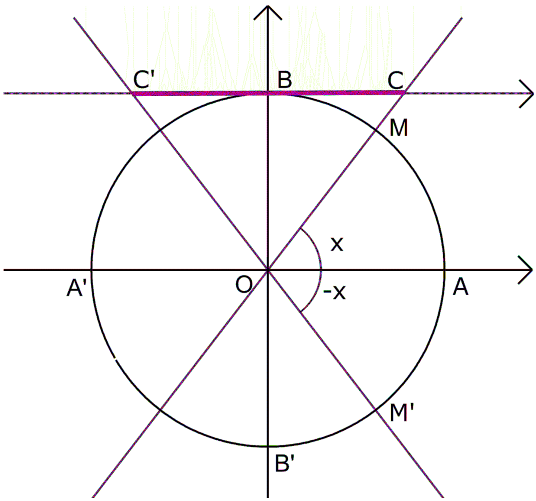

FIGURA 21

Sinal: pela definição da função cotangente, esta é positiva no 1º e 3º quadrantes e negativa no 2º e 4º quadrantes.
Gráfico: assim como nas demais funções trigonométricas, estuda-se, em geral, a função cotangente para arcos no intervalo $[0,2\cdot\pi]$. Como a função é periódica de período π, seu gráfico se repete a cada intervalo de amplitude π radianos. Tomando-se, sobre o ciclo trigonométrico, o ponto **M**, não coincidente com os pontos **A** e **A'**, e movimentando-o no sentido anti-horário (positivo), até completar uma volta, tem-se a seguinte tabela:

x	0	$0+\delta$	$\frac{\pi}{2}$	$\pi-\delta$	π	$\pi+\delta$	$\frac{3\pi}{2}$	$2\pi-\delta$	$2\cdot\pi$
y	não está definida	$+\infty$	0	$-\infty$	não está definida	$+\infty$	0	$-\infty$	não está definida

Nesta tabela, **δ** representa um infinitésimo, ou seja, **0 + δ**, por exemplo, representa um arco cuja medida é infinitamente próxima de **0** radiano, mas é maior o do que **0**. Analogamente, $\pi - \delta$ representa um arco cuja medida é infinitamente próxima de π radianos, mas é menor do que π radianos. O gráfico de f é mostrado na Figura 22.

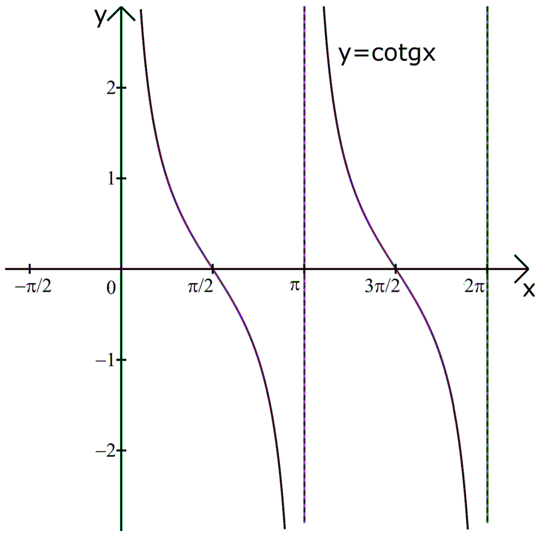

FIGURA 22

Analisando-se o gráfico, observa-se que o conjunto imagem da função cotangente é o conjunto dos números reais, isto é, $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{R}$. Além disso, vê-se que a função é sempre decrescente.

Exemplo: estudar a função $y = f(x) = \mathrm{cot\,g}\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right)$.

Observe que para que seja possível calcular a cotangente do arco $x - \dfrac{\pi}{6}$, é necessário que esse arco seja diferente de $k \cdot \pi \ (k \in Z)$, ou seja:

$$x - \frac{\pi}{6} \neq k \cdot \pi \ (k \in Z) \Rightarrow x \neq \frac{\pi}{6} + k \cdot \pi \ (k \in Z).$$

Então: $D(f) = \left\{ x \in R \,/\, x \neq \dfrac{\pi}{6} + k \cdot \pi \ (k \in Z) \right\}$. Atribuindo-se valores convenientes ao arco $x-\frac{\pi}{6}$, obtêm-se valores para o arco **x**, como mostra a tabela que se segue, e, em seguida, o gráfico apresentado na Figura 23.

$x-\frac{\pi}{6}$	x	$y=\cot g\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$
0	$\frac{\pi}{6}$	não está definida
$0+\delta$	$\frac{\pi}{6}+\delta$	$+\infty$
$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	0
$\pi-\delta$	$\frac{\pi}{4}+\frac{\delta}{2}$	$-\infty$
π	$\frac{\pi}{2}$	não está definida
$\pi+\delta$	$\frac{3\cdot\pi}{4}-\frac{\delta}{2}$	$+\infty$
$\frac{3\cdot\pi}{2}$	$\frac{3\cdot\pi}{4}$	0
$2\cdot\pi-\delta$	$\frac{3\cdot\pi}{4}+\frac{\delta}{2}$	$-\infty$
$2\cdot\pi$	π	não está definida

Conclusões:

Paridade: $f(-x)=\cot g\left((-x)-\frac{\pi}{6}\right)=\cot g\left(-x-\frac{\pi}{6}\right)$. Portanto, a função não é par, nem é ímpar, pois $f(-x)\neq f(x)$ e $f(-x)\neq -f(x)$.

Imagem: $\operatorname{Im}(f)=R$.

Período: vê-se claramente que o gráfico se repete a cada intervalo de amplitude π radianos. A primeira curva foi obtida para valores de **x** entre $\frac{\pi}{6}$ e $\frac{7\cdot\pi}{6}$ radianos. Então:

$$p = \frac{7 \cdot \pi}{6} - \frac{\pi}{6} = \pi \, .$$

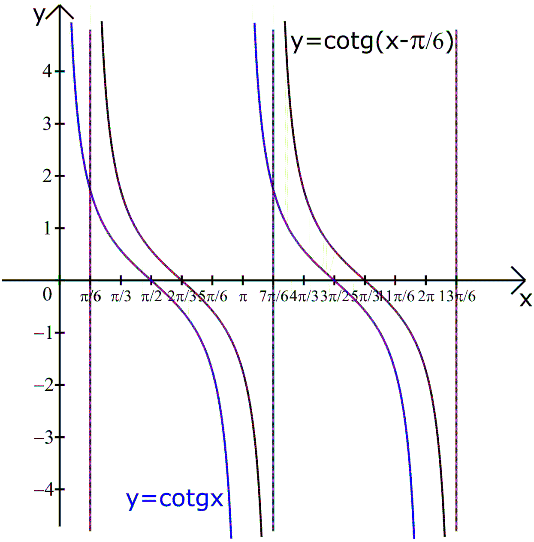

FIGURA 23

De modo análogo, vê-se que a segunda curva mostrada na Figura 23 foi obtida para valores de **x** entre $\frac{7 \cdot \pi}{6}$ e $\frac{13 \cdot \pi}{6}$ radianos e tem-se:

$$p = \frac{13 \cdot \pi}{6} - \frac{7 \cdot \pi}{6} = \pi \, .$$

3.5 Função Secante

Tomando-se, no ciclo trigonométrico, um arco orientado $\overset{\frown}{AM}$ de medida **x**, de modo que a extremidade **M** do arco não coincida com o ponto $B(0,1)$ e nem com o ponto $B'(0,-1)$, ou seja, a medida **x** do arco é tal que $x \neq \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi \; (k \in Z)$, este arco determina o segmento orientado $\overrightarrow{OM}$. A reta que tangencia o ciclo trigonométrico no ponto **M** intercepta o eixo dos cossenos no ponto **S**, determinando o segmento orientado $\overrightarrow{OS}$ (Figura 24).

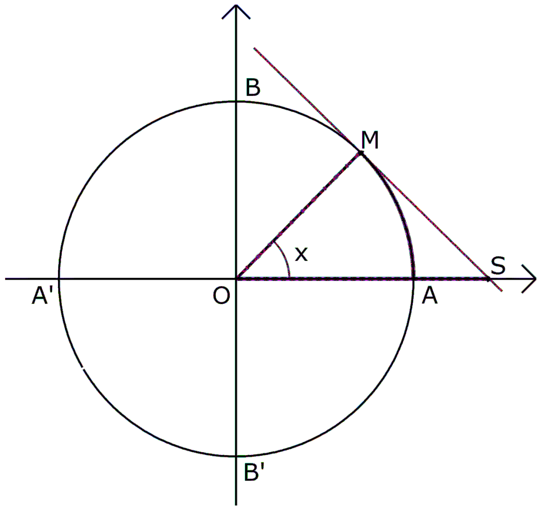

FIGURA 24

Por definição: $\sec\left(\overset{\frown}{AM}\right) = \overline{OS}$, ou seja, $\sec x = \overline{OS}$.

Observe que, dado um número real **x** $\left(x \neq \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi \ (k \in Z)\right)$, sempre se pode associar a ele um arco $\overset{\frown}{AM}$, de medida **x**, e, a esse arco, pode-se associar um único número real $y = \overline{OS}$. Tem-se, assim, uma função, chamada *função secante*, isto é:

$$\begin{aligned} f : D &\to R \\ x &\mapsto y = \sec(x) \end{aligned},$$

onde $D = \left\{x \in R \ / \ x \neq \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi \ (k \in Z)\right\}$.

Por sua definição, fica claro que o valor da secante de um arco será sempre maior ou igual a 1 ou menor ou igual a –1, já que o ciclo trigonométrico tem raio 1. Além disso, observa-se que arcos que têm a mesma extremidade possuem secantes iguais. Assim, a cada volta completa no ciclo trigonométrico, os valores da secante começam a se repetir, ou seja, a função é periódica, de período $2 \cdot \pi$.

Têm-se, ainda, as seguintes informações sobre essa função:

<u>Paridade</u>: tem-se: $f(-x) = \sec(-x)$. Vê-se, na Figura 25, que $\sec x = \overline{OS}$ e que $\sec(-x) = \overline{OS}$; logo, $\sec x = \sec(-x)$.

Logo, $f(-x)=f(x)$, ou seja, f é uma função par e, portanto, seu gráfico apresenta simetria em relação ao eixo Oy.

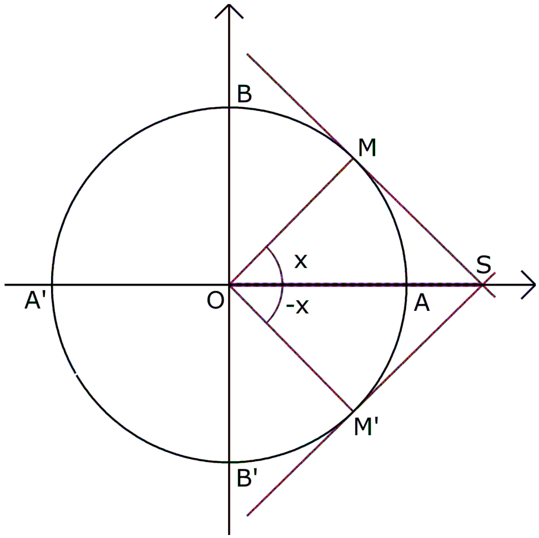

FIGURA 25

Sinal: pela definição da função secante, esta é positiva no 1º e 4º quadrantes e negativa no 2º e 3º quadrantes.
Gráfico: considerando o período de $2 \cdot \pi$ radianos e tomando o ponto **M** sobre o ciclo trigonométrico, não coincidente com os pontos **B** e **B'**, e movimentando-o no sentido anti-horário (positivo), até completar uma volta, tem-se a seguinte tabela:

x	0	$\frac{\pi}{2}-\delta$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}+\delta$	π	$\frac{3\cdot\pi}{2}-\delta$	$\frac{3\cdot\pi}{2}$	$\frac{3\cdot\pi}{2}+\delta$	$2\cdot\pi$
y	1	+∞	não está de-fini-da	-∞	-1	-∞	não está de-fini-da	+∞	1

Assim como nas funções tangente e cotangente, **δ** representa um infinitésimo. O gráfico de f é mostrado na Figura 26.
Analisando-se o gráfico, observa-se que o conjunto imagem da função secante é:

$\text{Im}(f) = \{y \in R\ ;\ y \le -1 \text{ ou } y \ge 1\}$, isto é, $\text{Im}(f) = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$ e que a função é crescente no 1º e 2º quadrantes e decrescente no 3º e 4º quadrantes.

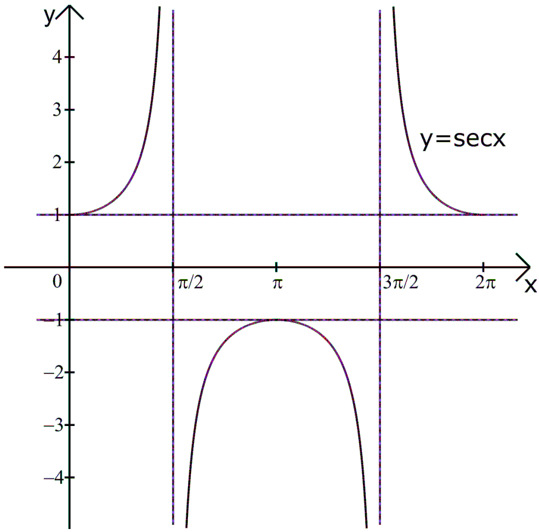

FIGURA 26

3.6 Função Cossecante

Considere-se, no ciclo trigonométrico, um arco orientado $\overset{\frown}{AM}$ de medida **x**, de modo que a extremidade **M** do arco não coincida com o ponto $A(1,0)$ e nem com o ponto $A'(-1,0)$, ou seja, a medida **x** do arco é tal que $x \ne k \cdot \pi\ (k \in Z)$. Este arco determina o segmento orientado $\overrightarrow{OM}$; a reta que tangencia o ciclo trigonométrico no ponto **M** intercepta o eixo dos senos no ponto **C**, determinando o segmento orientado $\overrightarrow{OC}$ (Figura 27).

Por definição: $\text{cossec}\left(\overset{\frown}{AM}\right) = \overline{OC}$, ou seja, $\text{cossec}\, x = \overline{OC}$.

Observe que, dado um número real **x** $(x \ne k \cdot \pi\ (k \in Z))$, sempre se pode associar a ele um arco $\overset{\frown}{AM}$, de medida **x**, e, a esse arco, pode-se associar um único número real $y = \overline{OC}$. Tem-se, assim, uma função, chamada *função cossecante*, isto é:

$$\begin{aligned} f : D &\rightarrow R \\ x &\mapsto y = \operatorname{cossec}(x) \end{aligned},$$

onde $D = \{x \in R;\ x \neq k \cdot \pi,\ k \in Z\}$.

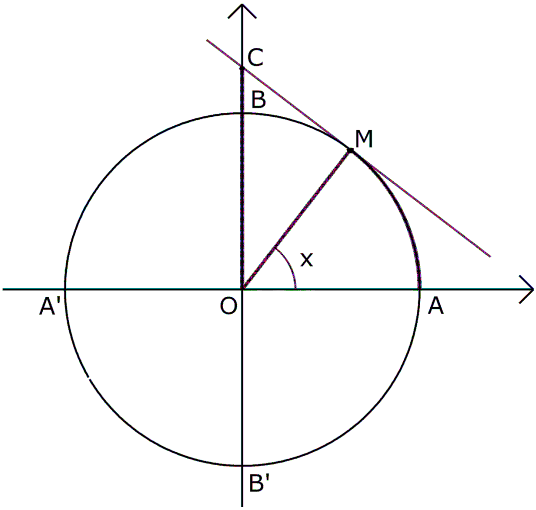

FIGURA 27

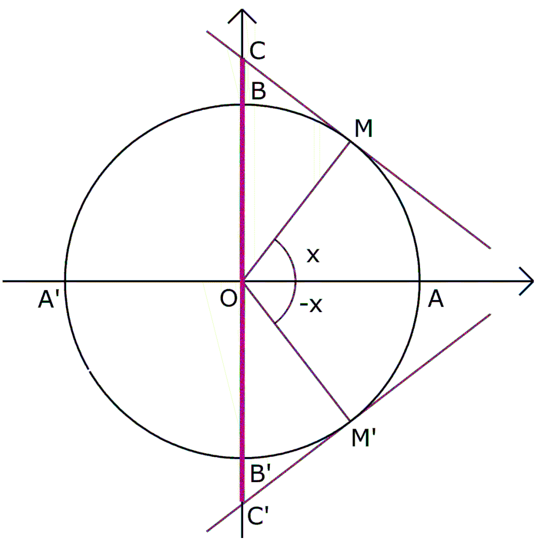

FIGURA 28

Por sua definição, fica claro que o valor da cossecante de um arco será sempre maior ou igual a 1 ou menor ou igual a –1, já que o ciclo trigonométrico tem raio 1. Além disso, observa-se que arcos que têm a mesma extremidade possuem cossecantes iguais. Assim, a cada volta completa no ciclo trigonométrico, os valores da cossecante começam a se repetir. Diz-se, então, que a função é periódica, de período $2 \cdot \pi$, que é a medida de um arco de circunferência.

Têm-se, ainda, as seguintes informações sobre essa função:

Paridade: a Figura 28 mostra que $\cos\sec x = -\cos\sec(-x)$, uma vez que $\cos\sec x = \overline{OC}$ e que $\cos\sec(-x) = \overline{OC'} = -\overline{OC}$.

Logo, $f(-x) = -f(x)$, ou seja, f é uma função ímpar e, portanto, seu gráfico apresenta simetria em relação à origem do plano cartesiano.

Sinal: pela definição da função cossecante, esta é positiva no $1^{\underline{o}}$ e $2^{\underline{o}}$ quadrantes e negativa no $3^{\underline{o}}$ e $4^{\underline{o}}$ quadrantes.

Gráfico: como a função é periódica de período $2 \cdot \pi$, seu gráfico se repete a cada intervalo de amplitude $2 \cdot \pi$ radianos. Tomando-se o ponto **M** sobre o ciclo trigonométrico, de modo que **M** não coincida com os pontos **A** e **A'**, e movimentando-o no sentido anti-horário (positivo), até completar uma volta, tem-se a seguinte tabela:

x	0	$0+\delta$	$\frac{\pi}{2}$	$\pi-\delta$	π	$\pi+\delta$	$\frac{3\pi}{2}$	$2\pi-\delta$	$2\cdot\pi$
y	não está definida	$+\infty$	1	$+\infty$	não está definida	$-\infty$	-1	$-\infty$	não está definida

O gráfico de f é mostrado na Figura 29; conclui-se dele que o conjunto imagem da função cossecante é:

$\text{Im}(f) = \{y \in R \; ; \; y \leq -1 \text{ ou } y \geq 1\}$, isto é, $\text{Im}(f) = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$.

Além disso, vê-se que a função é crescente no $2^{\underline{o}}$ e $3^{\underline{o}}$ quadrantes e decrescente no $1^{\underline{o}}$ e $4^{\underline{o}}$ quadrantes.

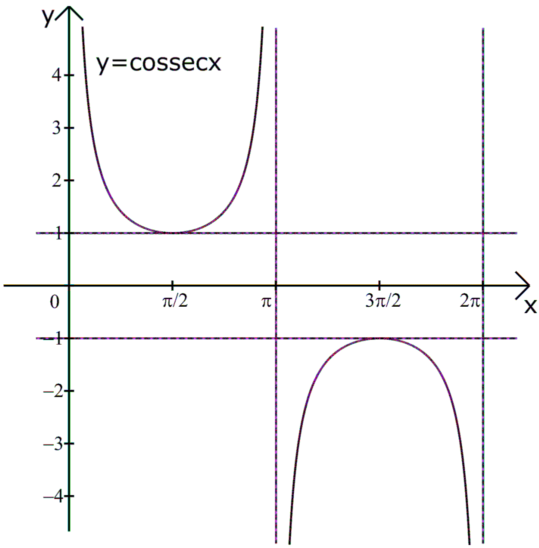

FIGURA 29

3.7 Exercícios

1) Determinar o domínio das seguintes funções:

(a) $y = \sec(4 \cdot x)$

Para que a secante de um arco esteja definida, é preciso que este seja diferente de $\dfrac{\pi}{2} + k \cdot \pi \ (k \in Z)$. Assim, deve-se ter:

$$4 \cdot x \neq \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi \ (k \in Z) \Rightarrow x \neq \frac{\pi}{8} + k \cdot \frac{\pi}{4} \ (k \in Z)$$

Então: $D = \left\{ x \in R \,/\, x \neq \dfrac{\pi}{8} + k \cdot \dfrac{\pi}{4} \ (k \in Z) \right\}$.

(b) $y = \cot g(2 \cdot x)$

De modo análogo ao exercício anterior, deve-se ter:

$$2 \cdot x \neq k \cdot \pi \ (k \in Z) \Rightarrow x \neq k \cdot \frac{\pi}{2} \ (k \in Z),$$

ou seja, $D = \left\{ x \in R \,/\, x \neq k \cdot \dfrac{\pi}{2} \ (k \in Z) \right\}$.

(c) $y = \operatorname{cossec}\left(2 \cdot x - \frac{\pi}{4}\right)$.

Tem-se:

$$2 \cdot x - \frac{\pi}{4} \neq k \cdot \pi \Rightarrow 2 \cdot x \neq \frac{\pi}{4} + k \cdot \pi \Rightarrow x \neq \frac{\pi}{8} + k \cdot \frac{\pi}{2} \; (k \in Z)$$

e portanto, $D = \left\{ x \in R \,/\, x \neq \frac{\pi}{8} + k \cdot \frac{\pi}{2} \; (k \in Z) \right\}$.

2) Determinar os valores de **m** que satisfaçam a igualdade:

(a) $\operatorname{sen}x = \dfrac{m-1}{2-3 \cdot m}$

Lembrando que o conjunto imagem da função $f(x) = \operatorname{sen}x$ é $[-1,1]$, segue-se que o valor do seno de um arco é um número maior ou igual a -1 e menor ou igual a 1, ou seja, $-1 \leq \operatorname{sen}x \leq 1$, ou, ainda, $|\operatorname{sen}x| \leq 1$. Assim, para que a expressão dada faça sentido, deve-se ter:

$$-1 \leq \frac{m-1}{2-3 \cdot m} \leq 1.$$

<u>Maneira errada</u> de se resolver essas inequações do 1º grau:

- multiplicar todos os membros das desigualdades por $(2 - 3 \cdot m)$, ou seja:

$$-1 \leq \frac{m-1}{2-3 \cdot m} \leq 1 \Rightarrow -(2 - 3 \cdot m) \leq m - 1 \leq 2 - 3 \cdot m \Rightarrow \quad ;$$
$$\Rightarrow -2 + 3 \cdot m \leq m - 1 \leq 2 - 3 \cdot m$$

- resolver separadamente as seguintes inequações:

(1) $-2 + 3 \cdot m \leq m - 1 \Rightarrow 2 \cdot m \leq 1 \Rightarrow m \leq \frac{1}{2}$

(2) $m - 1 \leq 2 - 3 \cdot m \Rightarrow 4 \cdot m \leq 3 \Rightarrow m \leq \frac{3}{4}$.

Procedendo dessa forma, observa-se que se os valores de **m** devem ser, ao mesmo tempo, menores ou iguais a $\frac{1}{2}$ e menores ou iguais $\frac{3}{4}$, então a solução do problema dado seria: $S = \left\{ m \in R \,/\, m \leq \frac{1}{2} \right\}$.

Ver-se-á, em seguida, que esta solução está incompleta, uma vez que o procedimento adotado está errado.

Maneira correta de se resolver essas inequações do 1º grau: há duas inequações do 1º grau para serem resolvidas:

(I) $-1 \leq \dfrac{m-1}{2-3\cdot m}$ e (II) $\dfrac{m-1}{2-3\cdot m} \leq 1$.

Sua resolução deve ser feita como segue.

$$\text{(I)}\ -1 \leq \frac{m-1}{2-3\cdot m} \Rightarrow \frac{m-1}{2-3\cdot m}+1 \geq 0 \Rightarrow \frac{m-1+2-3\cdot m}{2-3\cdot m} \geq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1-2\cdot m}{2-3\cdot m} \geq 0$$

É importante observar que não se trata, aqui, de resolver separadamente inequações com o numerador e o denominador da fração. O que se procuram são os valores da variável **m** que tornem a fração maior ou igual a zero. Levando-se em conta que o sinal de uma fração depende dos sinais de seu numerador e de seu denominador, é preciso estudar, separadamente, os sinais das funções que compõem a fração, para depois estudar o sinal do quociente dessas duas funções. Assim, tem-se:

- função do numerador: $y = 1-2\cdot m$.

Lembrando que uma função somente pode mudar de sinal quando seu gráfico intercepta o eixo Ox, determina-se, primeiramente, o zero dessa função, para, em seguida, determinar os sinais que ela assume, como segue:

$$1-2\cdot m = 0 \Rightarrow m = \frac{1}{2}.$$

Então, a função $y = 1-2\cdot m$ pode mudar de sinal apenas no ponto $m = \dfrac{1}{2}$. Tomando-se qualquer valor de **m** menor do que $\dfrac{1}{2}$, observa-se que a função tem sinal positivo. Por exemplo, para m = 0, tem-se y = 1 > 0. Da mesma forma, tomando-se qualquer valor de **m** maior do que $\dfrac{1}{2}$, observa-se que a função tem sinal negativo. Por exemplo, para m = 1, tem-se $y = 1-2\cdot 1 = -1 < 0$. Tem-se, assim, o diagrama de sinais da Figura 30 para a função $y = 1-2\cdot m$.

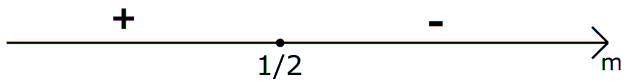

FIGURA 30

• função do denominador: $y = 2 - 3 \cdot m$. Repetindo o procedimento anterior, vem:

$$2 - 3 \cdot m = 0 \Rightarrow m = \frac{2}{3}.$$

Assim, os sinais dessa função são os mostrados na Figura 31.

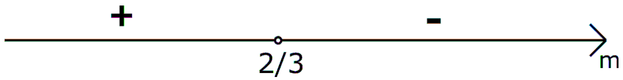

FIGURA 31

É preciso, agora, determinar os valores de **m** que tornam a fração maior ou igual a zero. A maneira mais prática de se fazer isso é colocar os dois diagramas apresentados nas Figuras 30 e 31, respeitando a relação de ordem das raízes das duas funções, e "dividir" os valores de **m** do numerador pelos do denominador em cada intervalo entre as raízes. Têm-se, então, os sinais da Figura 32.

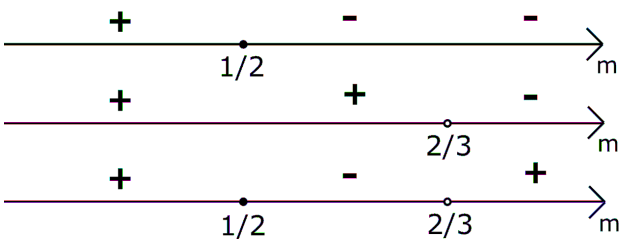

FIGURA 32

Nessa figura, vê-se que:

• tomando valores de **m** menores do que $\frac{1}{2}$, os valores da função do numerador são positivos, assim como os da função do denominador. Assim, o quociente entre esses valores é positivo;

• tomando valores de **m** entre $\frac{1}{2}$ e $\frac{2}{3}$, os valores da função do numerador são negativos, enquanto que os valores da função do denominador são positivos. Logo, o quociente entre esses valores é negativo;

• tomando valores de **m** maiores do que $\frac{2}{3}$, os valores das duas funções são negativos e, portanto, o quociente entre esses valores é positivo.

Em $m=\frac{1}{2}$ a fração se anula, pois esse valor anula o numerador da fração. O valor $m=\frac{2}{3}$ deve ser descartado, pois ele anula o denominador da fração, tornando-a sem sentido. Então, os valores de **m** que tornam a fração maior ou igual a zero são aqueles que são menores ou iguais a $\frac{1}{2}$ ou maiores do que $\frac{2}{3}$.

Resolve-se, agora, a outra inequação:

(II) $\frac{m-1}{2-3\cdot m}\le 1 \Rightarrow \frac{m-1}{2-3\cdot m}-1\le 0 \Rightarrow \frac{m-1-2+3\cdot m}{2-3\cdot m}\le 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{4\cdot m-3}{2-3\cdot m}\le 0$

Novamente, devem ser estudados os sinais das funções que compõem a fração, separadamente, para depois estudar o sinal do quociente dessas duas funções. Então:

• função do numerador: $y=4\cdot m-3$:

$4\cdot m-3=0 \Rightarrow m=\frac{3}{4}$.

Então, a função $y=4\cdot m-3$ pode mudar de sinal apenas no ponto $m=\frac{3}{4}$. O estudo de sinal desta função é mostrado na Figura 33.

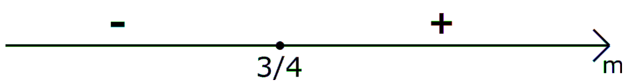

FIGURA 33

• função do denominador: $y=2-3\cdot m$. O estudo dessa função já foi feito anteriormente. Assim, determinam-se, agora, os valores de **m** que tornam a fração menor ou igual a zero, levando-se em conta os sinais do numerador e do denominador, como mostra a Figura 34. Nessa figura, vê-se que:

• tomando valores de **m** menores do que $\frac{2}{3}$, os valores da função do numerador são negativos e os da função do denominador são positivos. Assim, o quociente entre esses valores é negativo;

• tomando valores de **m** entre $\frac{2}{3}$ e $\frac{3}{4}$, os valores das duas funções são negativos e, portanto, o quociente entre esses valores é positivo;

• tomando valores de **m** maiores do que $\frac{3}{4}$, os valores da função do numerador são positivos e os da função do denominador são negativos, ou seja, o quociente entre eles é negativo.

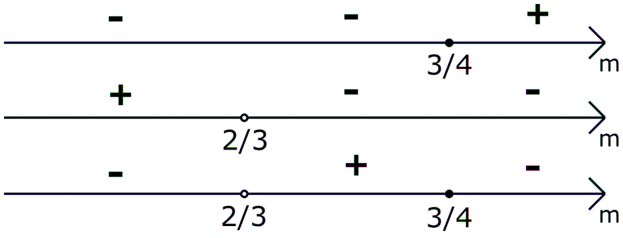

FIGURA 34

Em $m=\frac{3}{4}$ a fração se anula, pois esse valor anula o numerador da fração. Novamente, descarta-se o valor $m=\frac{2}{3}$, já que ele anula o denominador da fração. Então, os valores de **m** que tornam a fração menor ou igual a zero são aqueles que são menores do que $\frac{2}{3}$ ou maiores ou iguais a $\frac{3}{4}$.

Depois destas duas inequações do 1º grau terem sido resolvidas separadamente, é preciso observar que, para que se tenha $-1 \leq \text{senx} \leq 1$, ou seja, $-1 \leq \frac{m-1}{2-3\cdot m} \leq 1$, deve se procurar os valores de **m** que satisfaçam as duas ao mesmo tempo. Assim, é preciso fazer uma interseção das soluções das duas inequações que foram resolvidas. A Figura 35 apresenta essas soluções e sua interseção.

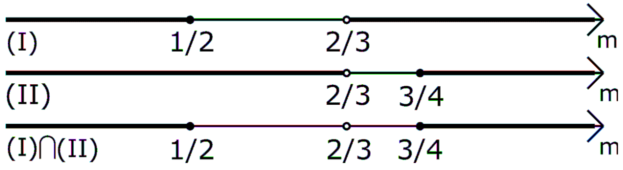

FIGURA 35

Verifica-se, finalmente, que os valores de **m** que satisfazem as duas inequações são aqueles menores ou iguais a $\frac{1}{2}$ ou os que são maiores ou iguais a $\frac{3}{4}$, ou seja, a solução procurada é:

$$S = \left\{ m \in R \,/\, m \leq \frac{1}{2} \text{ ou } m \geq \frac{3}{4} \right\} = \left(-\infty, \frac{1}{2} \right] \cup \left[\frac{3}{4}, +\infty \right).$$

Apenas a título de verificação, considere-se um valor de **m** que seja menor do que $\frac{1}{2}$, por exemplo, m = 0. Tem-se:

$$\text{senx} = \frac{m-1}{2-3\cdot m} = \frac{0-1}{2-3\cdot 0} = -\frac{1}{2},$$

ou seja, esse valor de **m** acarreta para a função seno o valor $-\frac{1}{2}$, que é um valor possível. Tomando-se um valor de **m** maior do que $\frac{3}{4}$, por exemplo, m = 1, vem:

$$\text{senx} = \frac{m-1}{2-3\cdot m} = \frac{1-1}{2-3\cdot 1} = 0,$$

que também é um valor possível para a função seno. Por outro lado, tomando-se um valor entre $\frac{1}{2}$ e $\frac{3}{4}$, por exemplo, m = 0,6, tem-se:

$$\text{senx} = \frac{m-1}{2-3\cdot m} = \frac{0{,}6-1}{2-3\cdot 0{,}6} = \frac{-0{,}4}{0{,}2} = -2,$$

que é um valor absurdo, pois não há nenhum arco **x** para o qual se tenha senx = -2. Para $m = \frac{1}{2}$, tem-se:

$$\text{senx} = \frac{m-1}{2-3\cdot m} = \frac{0{,}5-1}{2-3\cdot 0{,}5} = \frac{-0{,}5}{0{,}5} = -1$$

e, para $m = \frac{3}{4}$, tem-se:

$$\text{senx} = \frac{m-1}{2-3\cdot m} = \frac{0{,}75-1}{2-3\cdot 0{,}75} = \frac{-0{,}25}{-0{,}25} = 1,$$

ou seja, esses valores de **m** satisfazem as desigualdades $-1 \leq \text{senx} \leq 1$.

Ressalte-se que, quando se resolveram as inequações

$-1 \le \frac{m-1}{2-3\cdot m} \le 1$ da <u>maneira errada</u>, obteve-se a solução $S = \left\{ x \in R \,/\, x \le \frac{1}{2} \right\}$. Comparando essa solução com a solução correta, observa-se que os valores de **m** maiores ou iguais a $\frac{3}{4}$ não estão contemplados na solução errada. Pergunta-se: onde está o erro na primeira maneira de resolver?
<u>*O erro está em multiplicar as desigualdades pela expressão*</u> $(2-3\cdot m)$, <u>*porque esta expressão poderá ser positiva ou negativa, dependendo dos valores de **m***</u>.
Para os valores de **m** para os quais a expressão $(2-3\cdot m)$ é maior do que zero, as desigualdades $-1 \le \frac{m-1}{2-3\cdot m} \le 1$ permanecem com o mesmo sentido, quando multiplicadas por $(2-3\cdot m)$. Entretanto, para os valores de **m** para os quais esta expressão é negativa, as desigualdades $-1 \le \frac{m-1}{2-3\cdot m} \le 1$ <u>mudam de sentido</u>. Isso não foi levado em consideração na primeira forma de fazer, que, por esse motivo, não possibilitou encontrar a outra parte da solução, que são os valores de **m** maiores ou iguais a $\frac{3}{4}$. Reafirma-se, então, que <u>**a primeira forma que as desigualdades foram resolvidas está errada**</u>.

(b) $\cos x = \frac{m^2 - 3\cdot m + 2}{m-1}$
De forma análoga à função seno, o conjunto imagem da função cosseno é $[-1,1]$ e, portanto, o valor do cosseno de um arco é um número sempre maior ou igual a -1 e menor ou igual a 1, ou seja, $-1 \le \cos x \le 1$, ou $|\cos x| \le 1$. Assim, para que a expressão dada faça sentido, deve-se ter:
$$-1 \le \frac{m^2 - 3\cdot m + 2}{m-1} \le 1.$$
Têm-se, assim, as inequações
$$\text{(I)}\; -1 \le \frac{m^2 - 3\cdot m + 2}{m-1} \;\text{ e }\; \text{(II)}\; \frac{m^2 - 3\cdot m + 2}{m-1} \le 1,$$

que serão resolvidas separadamente.

$$(I)\ -1 \le \frac{m^2 - 3\cdot m + 2}{m-1},\ \text{ou seja,}\ \frac{m^2 - 3\cdot m + 2}{m-1} \ge -1:$$

$$\frac{m^2 - 3\cdot m + 2}{m-1} \ge -1 \Rightarrow \frac{m^2 - 3\cdot m + 2}{m-1} + 1 \ge 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{m^2 - 3\cdot m + 2 + m - 1}{m-1} \ge 0 \Rightarrow \frac{m^2 - 2\cdot m + 1}{m-1} \ge 0.$$

A inequação obtida pode ser resolvida com o procedimento utilizado no exercício da parte (a) ou, nesse caso específico, de uma forma mais simplificada, como segue: observe que o numerador da inequação pode ser fatorado na forma:

$$m^2 - 2\cdot m + 1 = (m-1)^2;$$

assim, a inequação fica:

$$\frac{(m-1)^2}{m-1} \ge 0.$$

<u>Para m – 1 ≠ 0</u>, ou seja, **<u>para m ≠ 1</u>**, pode-se dividir o numerador e o denominador pela expressão m – 1, obtendo-se:

$$m - 1 \ge 0 \Rightarrow m \ge 1.$$

Portanto, os valores de **m** que satisfazem a inequação (I) são aqueles que são <u>estritamente maiores</u> do que 1, já que **m** deve ser diferente de 1.

É claro que se poderia ter adotado o procedimento do exercício do item (a), desenvolvido a seguir. Para resolver (I), devem-se estudar separadamente os sinais do numerador e do denominador da fração. Então, vem:

- função do numerador: $y = m^2 - 2\cdot m + 1$.

Esta função do 2º grau tem dois zeros iguais, isto é, m = 1 é uma raiz dupla da equação $m^2 - 2\cdot m + 1 = 0$. Assim, o estudo de sinais da função é mostrado na Figura 36.

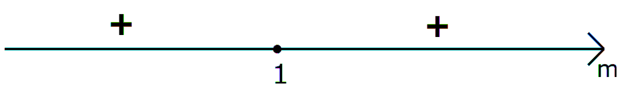

FIGURA 36

- função do denominador: $y = m - 1$. Tem-se:

$$m - 1 = 0 \Rightarrow m = 1.$$

A Figura 37 mostra os sinais dessa função.

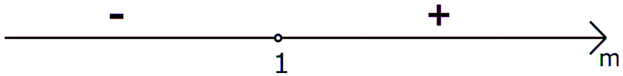

FIGURA 37

Logo, para determinar os valores de **m** que tornam a fração maior ou igual a zero utilizam-se os dois diagramas apresentados nas Figuras 36 e 37, conforme mostra a Figura 38.

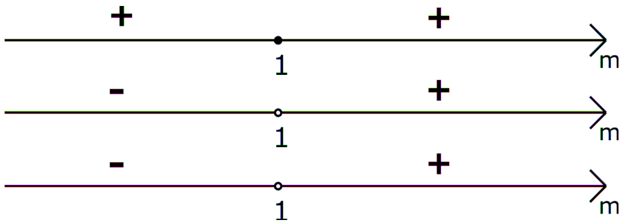

FIGURA 38

Nessa figura, vê-se que tomando valores de **m** maiores do que 1, os valores da fração são positivos e tomando valores de **m** menores do que 1, a fração se torna negativa. O valor m = 1 deve ser descartado, porque anula o denominador da fração. Assim, como anteriormente, vê-se que os valores de **m** que satisfazem a inequação (I) são aqueles que são estritamente maiores do que 1.

Resolve-se, agora a inequação:

(II) $\dfrac{m^2 - 3 \cdot m + 2}{m - 1} \le 1$.

Tem-se:

$$\frac{m^2 - 3 \cdot m + 2}{m - 1} \le 1 \Rightarrow \frac{m^2 - 3 \cdot m + 2}{m - 1} - 1 \le 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{m^2 - 3 \cdot m + 2 - m + 1}{m - 1} \le 0 \Rightarrow \frac{m^2 - 4 \cdot m + 3}{m - 1} \le 0.$$

Novamente, pode-se fatorar o numerador da fração, utilizando-se, para isso, os zeros da função $y = m^2 - 4 \cdot m + 3$, que são m = 1 e m = 3. Então, obtém-se a seguinte fração:

$$\frac{m^2 - 4 \cdot m + 3}{m - 1} = \frac{(m - 1) \cdot (m - 3)}{m - 1};$$

Para m - 1 ≠ 0, isto é, para m ≠ 1, pode-se dividir o numerador e o denominador da fração por (m – 1) e vem:

$$\frac{m^2-4\cdot m+3}{m-1}=\frac{(m-1)\cdot(m-3)}{m-1}=m-3.$$

Assim, a inequação $\frac{m^2-4\cdot m+3}{m-1}\leq 0$ reduz-se à inequação $m-3\leq 0$, ou seja, $m\leq 3$. Portanto, os valores de **m** que satisfazem (II) devem ser menores ou iguais a 3, mas devem ser diferentes de 1. Também aqui se poderia fazer o estudo de (II) estudando, separadamente, os sinais do numerador e do denominador da fração:

• função do numerador: $y=m^2-4\cdot m+3$.

As raízes reais da equação $m^2-4\cdot m+3=0$ são m = 1 e m = 3 e, portanto, o estudo de sinais da função é o que mostra a Figura 39.

FIGURA 39

• função do denominador: $y=m-1$. Tem-se:
$m-1=0\Rightarrow m=1$.
Os sinais dessa função são os da Figura 40.

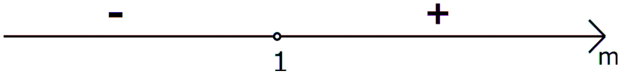

FIGURA 40

Têm-se, assim, as conclusões mostradas na Figura 41.

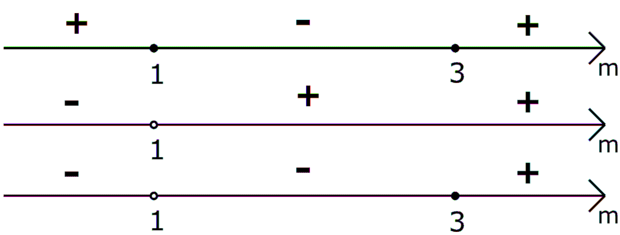

FIGURA 41

Nessa figura, vê-se que tomando valores de **m** maiores do que 3, os valores da fração são positivos e tomando valores de **m** menores do que 3, a fração se torna negativa. O valor m = 1 deve ser descartado,

porque anula o denominador da fração. Assim, como anteriormente, vê-se que os valores de **m** que satisfazem a inequação (II) são aqueles que são menores ou iguais a 3 e diferentes de 1.
É preciso, agora, considerar a interseção das soluções das duas inequações (I) e (II) que foram resolvidas. A Figura 42 apresenta essas soluções e sua interseção.

FIGURA 42

Verifica-se, finalmente, que os valores de **m** que satisfazem as duas inequações são aqueles maiores do que 1 e menores ou iguais a 3, ou seja:
$S = \{m \in R / 1 < m \leq 3\} = (1,3]$.

(c) $tgx = 2 \cdot m - 1$

Lembrando que, para todo arco **x** tal que $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k \cdot \pi \ (k \in Z)$, o valor da tangente de **x** pode assumir qualquer valor real, segue-se que a expressão dada tem sentido para qualquer número real **m**. Assim, tem-se $S = R$.

(d) $\cos\sec x = 1 - 2 \cdot m$
Nesse caso, como o valor da cossecante de um arco **x** tal que $x \neq k \cdot \pi \ (k \in Z)$ é sempre menor ou igual a -1 <u>ou</u> maior ou igual a 1, devem-se impor à expressão dada as condições:
$\cos\sec x \leq -1$ ou $\cos\sec x \geq 1$,
isto é,
$1 - 2 \cdot m \leq -1$ ou $1 - 2 \cdot m \geq 1$.
Novamente, há duas inequações do 1º grau para serem resolvidas. Assim, tem-se:
(I) $1 - 2 \cdot m \leq -1$
A maneira correta de se resolver uma inequação como esta é a que se segue.
$1 - 2 \cdot m \leq -1 \Rightarrow 1 - 2 \cdot m + 1 \leq 0 \Rightarrow 2 - 2 \cdot m \leq 0$.

É preciso, então, estudar os sinais da função $y=2-2\cdot m$ para determinar para quais valores de **m** ela é menor ou igual a zero. Para isso, determina-se o zero da função, que é o único ponto onde a função pode mudar de sinal. Tem-se:

$2-2\cdot m=0\Rightarrow m=1$.

Assim, o estudo de sinais da função é como mostra a Figura 43.

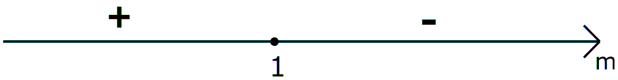

FIGURA 43

Logo, os valores de **m** para os quais a função é menor ou igual a zero são aqueles maiores ou iguais a 1, os quais satisfazem, então, a inequação (I).

Resolvendo, agora, a inequação (II), vem:

(II) $1-2\cdot m\geq 1$

Tem-se:

$1-2\cdot m\geq 1\Rightarrow 1-2\cdot m-1\geq 0\Rightarrow -2\cdot m\geq 0$.

Pode-se proceder, aqui, de duas maneiras; uma delas é dividir ambos os membros pela constante -2, lembrando que o sentido da desigualdade fica invertido, ou seja:

$-2\cdot m\geq 0\Rightarrow m\leq 0$.

e já se tem a solução da inequação, isto é, os valores de **m** que satisfazem (II) são os menores ou iguais a zero.

A outra forma é a mesma que se utilizou para resolver (I), ou seja, estudam-se os sinais da função $y=-2\cdot m$:

$-2\cdot m=0\Rightarrow m=0$.

Portanto, o estudo de sinais da função é o que mostra a Figura 44.

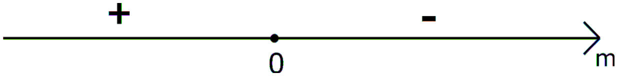

FIGURA 44

Logo, os valores de **m** para os quais a função é maior ou igual a zero são aqueles menores ou iguais a 0, como já se havia concluído.

Uma vez que devem ser satisfeitas as inequações (I) <u>ou</u> (II), é preciso fazer a união de suas soluções, indicada na Figura 45.

Logo, a solução geral é:

$S=\{m\in R/m\leq 0 \text{ ou } m\geq 1\}=(-\infty,0]\cup[1.+\infty)$.

FIGURA 45

(e) $\sec x = \dfrac{m+2}{m-1}$

De modo análogo ao exercício anterior, tem-se que o valor da secante de um arco **x** $\left(x \neq \dfrac{\pi}{2} + k \cdot \pi \ ; \ k \in Z \right)$ é sempre menor ou igual a -1 <u>ou</u> maior ou igual a 1; assim, impõem-se à expressão dada as condições:

$\sec x \leq -1$ ou $\sec x \geq 1$,

isto é,

$\dfrac{m+2}{m-1} \leq -1$ ou $\dfrac{m+2}{m-1} \geq 1$.

Resolvem-se, portanto, essas duas inequações do 1º grau.

(I) $\dfrac{m+2}{m-1} \leq -1$

Tem-se:

$$\frac{m+2}{m-1} \leq -1 \Rightarrow \frac{m+2}{m-1} + 1 \leq 0 \Rightarrow \frac{m+2+m-1}{m-1} \leq 0 \Rightarrow \frac{2 \cdot m+1}{m-1} \leq 0$$

Estudam-se, assim, separadamente, os sinais das funções do numerador e do denominador:

• função do numerador: $y = 2 \cdot m + 1$.

$2 \cdot m + 1 = 0 \Rightarrow m = -\dfrac{1}{2}$.

Então, a função $y = 2 \cdot m + 1$ pode mudar de sinal apenas no ponto $m = -\dfrac{1}{2}$. Tem-se, assim, o estudo de sinais para a função $y = 2 \cdot m + 1$ da Figura 46.

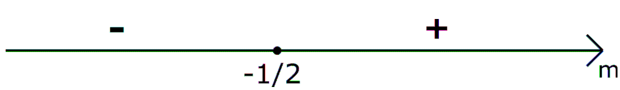

FIGURA 46

• função do denominador: $y = m - 1$. Repetindo o procedimento anterior, vem:
$m - 1 = 0 \Rightarrow m = 1$.
Assim, os sinais dessa função são aqueles mostrados na Figura 47.

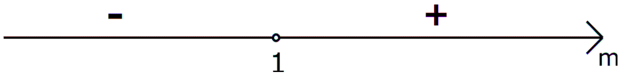

FIGURA 47

Considerando os sinais do numerador e do denominador, têm-se os sinais da fração mostrados na Figura 48.

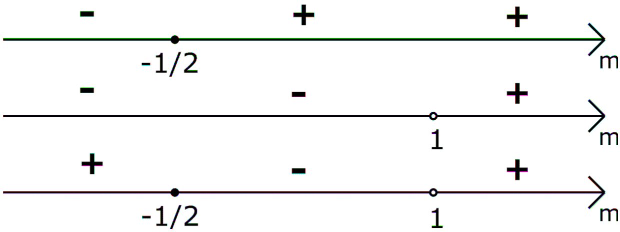

FIGURA 48

Vê-se, então, que os valores de **m** que tornam a fração menor ou igual a zero são os maiores ou iguais a $-\frac{1}{2}$ e menores do que 1.

(II) $\frac{m+2}{m-1} \geq 1$

$$\frac{m+2}{m-1} \geq 1 \Rightarrow \frac{m+2}{m-1} - 1 \geq 0 \Rightarrow \frac{m+2-m+1}{m-1} \geq 0 \Rightarrow \frac{3}{m-1} \geq 0.$$

O estudo de sinais dessa fração é mais simples do que o anterior, já que o numerador é uma constante sempre positiva, o que acarreta que o sinal da fração é determinado pelo sinal do denominador, que já foi estudado. Conclui-se, assim, que os valores de **m** que tornam a fração maior ou igual a zero são os maiores do que 1 (já que **m** deve ser diferente de 1).
Faz-se, agora, a <u>união</u> das soluções das inequações (I) e (II), como mostra a Figura 49.
Conclui-se, assim, que o conjunto-solução é:

$$S = \left\{ m \in R / -\frac{1}{2} \leq m < 1 \text{ ou } m > 1 \right\} = \left[-\frac{1}{2}, 1 \right) \cup (1. + \infty),$$

o qual pode ser escrito, ainda, na seguinte forma:

$$S=\left\{m\in R/m\geq -\frac{1}{2}\,e\,m\neq 1\right\}=\left[-\frac{1}{2},1\right)\cup(1.+\infty).$$

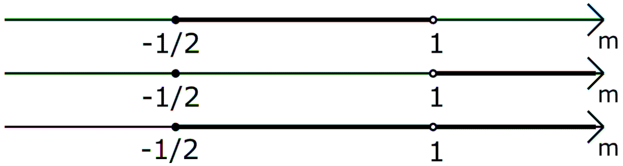

FIGURA 49

3) É verdadeira ou falsa a afirmação: não existe **x** tal que $\cos x = 3$? É verdadeira, pois o conjunto imagem da função $f(x)=\cos x$ é o intervalo $[-1,1]$, isto é, $-1\leq \cos x\leq 1$, para todo número real **x**. Logo, para nenhum arco **x** ter-se-á $\cos x = 3$.

4) $\cos(3)=\cos(3^{\circ})$?

Não. Uma idéia muito comum é entender $\cos(3)$ como sendo $\cos(3^{\circ})$, o que não é correto. Quando se indica $\cos(3)$, está se querendo calcular o valor que a função cosseno assume em x = 3 radianos (que é próximo de π radianos). Entretanto, 3° é um arco próximo de 0°. Têm-se: $\cos(3)\cong -1$ e $\cos(3^{\circ})\cong 1$. A Figura 50 mostra os arcos de medida 3 radianos e 3°.

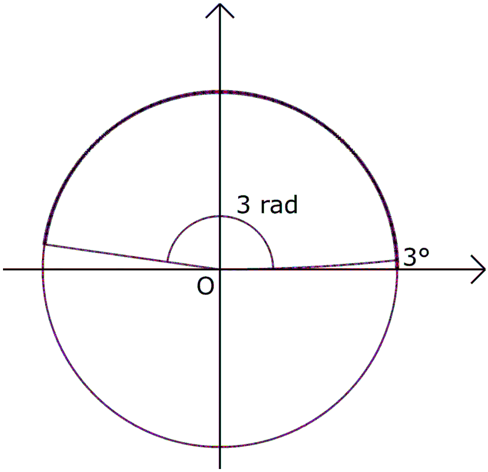

FIGURA 50

5) São verdadeiras ou falsas as afirmações seguintes?

(a) $\sqrt{\cos^2\left(x^2\right)} = |\cos x|$.

É falsa. Lembrando que $\sqrt{a^2} = |a|$, para qualquer **a**, tem-se:

$$\sqrt{\cos^2\left(x^2\right)} = \left|\cos\left(x^2\right)\right| = |\cos(x \cdot x)| \neq |\cos x| .$$

Por exemplo, tomando-se $x = \dfrac{\pi}{2}$, vem:

$$\sqrt{\cos^2\left(x^2\right)} = \sqrt{\cos^2\left(\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\right)} = \left|\cos\left(\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\right)\right| = \left|\cos\left(\frac{\pi^2}{4}\right)\right| \neq 0$$

e

$$|\cos x| = \left|\cos\frac{\pi}{2}\right| = 0 .$$

(b) $\cos^2 x = \cos x^2$.

É falsa. Para qualquer arco de medida **x**, tem-se:

$$\cos^2 x = (\cos x)^2 = (\cos x)\cdot(\cos x) .$$

Por outro lado, $\cos x^2 = \cos\left(x^2\right) = \cos(x \cdot x)$.

Por exemplo, se $x = \dfrac{\pi}{2}$, vem:

$$\cos^2 x = \cos^2\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)^2 = 0$$

e

$$\cos\left(x^2\right) = \cos\left(\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi^2}{4}\right) \neq 0 .$$

Isso exemplifica o fato de que $\cos^2 x \neq \cos\left(x^2\right)$, ou, num abuso de linguagem, $\cos^2 x \neq \cos x^2$.

4 RELAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

4.1 Relações fundamentais

(1) $\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$

Seja x a medida do arco $\overset{\frown}{AM}$; na Figura 1, tem-se: $\overline{OP} = \cos x$ e $\overline{OQ} = \overline{PM} = \text{sen} x$.

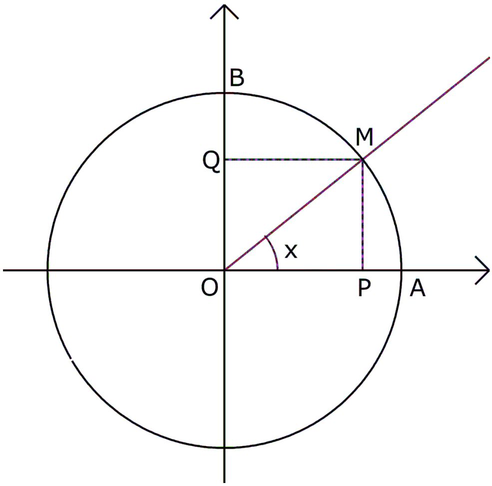

FIGURA 1

Considerando o triângulo retângulo OMP, tem-se: $\left(\overline{OP}\right)^2 + \left(\overline{PM}\right)^2 = \left(\overline{OM}\right)^2 = 1$. As medidas $\overline{OP}$ e $\overline{PM}$ são iguais, em valores absolutos, aos valores de cosx e senx, respectivamente. Assim, quaisquer que sejam os sinais dessas funções, vale: $\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$.

(b) $\text{tg} x = \dfrac{\text{sen} x}{\cos x}$

Seja x a medida do arco $\overset{\frown}{AM}$, sendo $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k \cdot \pi \ (k \in Z)$; na Figura 2, tem-se $\overline{AT} = \text{tg} x$.

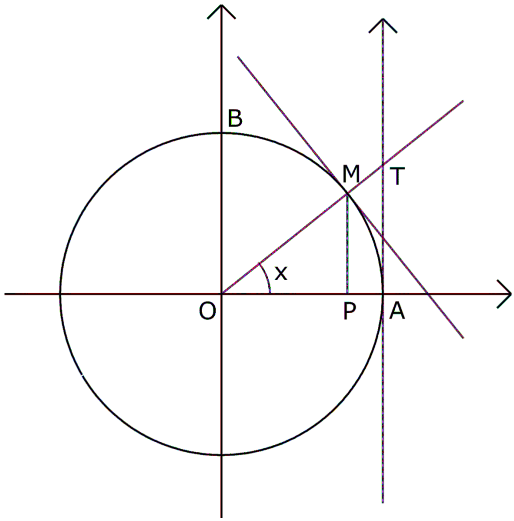

FIGURA 2

Uma vez que os triângulos OPM e OAT são semelhantes, tem-se:

$$\frac{\overline{OP}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{PM}}{\overline{AT}} \Rightarrow \overline{AT} = \frac{\overline{PM}}{\overline{OP}};$$

$\overline{AT}$, $\overline{PM}$ e $\overline{OP}$ são, respectivamente, os valores absolutos de $\text{tg}x$, $\text{sen}x$ e $\cos x$. Como a tangente é positiva ou negativa conforme o seno e o cosseno tenham mesmos sinais ou sinais contrários, a relação vale sempre. Assim: $\text{tg}x = \dfrac{\text{sen}x}{\cos x}$.

(c) $\text{cotg}x = \dfrac{1}{\text{tg}x}$

Seja $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k \cdot \pi$ e $x \neq k \cdot \pi$ $(k \in Z)$ a medida do arco $\overset{\frown}{AM}$; na Figura 3, tem-se: $\overline{AT} = \text{tg}x$; $\overline{BC} = \text{cotg}x$.

Os triângulos retângulos OAT e OBC são semelhantes, pois os ângulos agudos $A\hat{O}T$ e $O\hat{C}B$ são congruentes, sendo alternos internos de duas paralelas cortadas por uma transversal.

Então:

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{OB}}{\overline{AT}} \Rightarrow \overline{BC} = \frac{1}{\overline{AT}} \therefore \text{cotg}x = \frac{1}{\text{tg}x}.$$

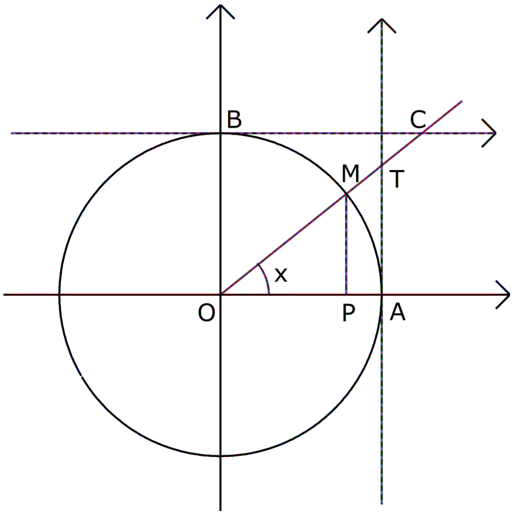

FIGURA 3

A relação também se verifica quanto ao sinal, já que a tangente e a cotangente de um arco têm o mesmo sinal. Por conseqüência, conclui-se, ainda, que:

$$\cot g x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}.$$

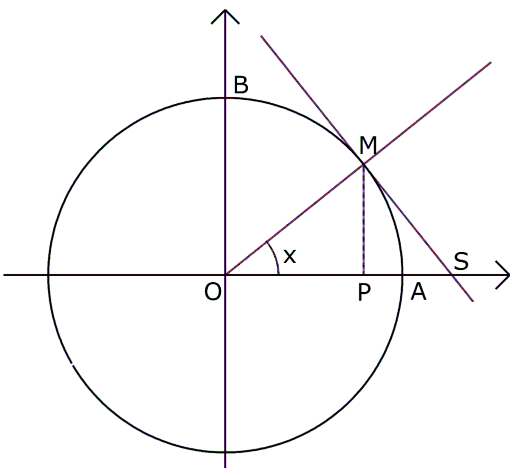

FIGURA 4

(d) $\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$

Seja x a medida do arco $\overset{\frown}{AM}$, sendo $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k \cdot \pi \ (k \in Z)$; na Figura 4, tem-se: $\overline{OP} = \cos x$ e $\overline{OS} = \sec x$.

Nesse caso, os triângulos retângulos OMS e OPM são semelhantes, pois têm o ângulo agudo $\hat{O}$ comum. Assim, vem:

$$\frac{\overline{OS}}{\overline{OM}} = \frac{\overline{OM}}{\overline{OP}} \Rightarrow \overline{OS} = \frac{1}{\overline{OP}} \therefore \sec x = \frac{1}{\cos x} .$$

A relação também se verifica quanto ao sinal, já que a secante e o cosseno de um arco têm o mesmo sinal.

(e) $\operatorname{cossec} x = \dfrac{1}{\operatorname{sen} x}$

Seja x a medida do arco $\overset{\frown}{AM}$, sendo $x \neq k \cdot \pi \ (k \in Z)$; na Figura 5, tem-se: $\overline{OQ} = \overline{PM} = \operatorname{sen} x$ e $\overline{OD} = \operatorname{cossec} x$.

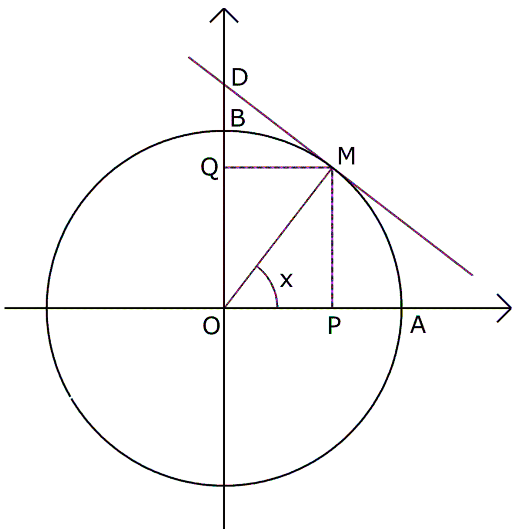

FIGURA 5

Aqui, os triângulos retângulos OMD e OPM são semelhantes, pois os ângulos $M\hat{O}P$ e $O\hat{D}M$ são congruentes, por serem ângulos de lados perpendiculares.

Então:

$$\frac{\overline{OD}}{\overline{OM}} = \frac{\overline{OM}}{\overline{PM}} \Rightarrow \overline{OD} = \frac{1}{\overline{PM}} \therefore \text{cos sec } x = \frac{1}{\text{sen} x}.$$

A relação também se verifica quanto ao sinal, pois a cossecante e o seno de um arco têm o mesmo sinal.

4.2 Relações conseqüentes

(a) $\sec^2 x = 1 + \text{tg}^2 x$, para $x \neq \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi \;\; (k \in Z)$.

Algebricamente, pode-se demonstrar a relação das duas formas seguintes:

$$\bullet\ \text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \frac{\text{sen}^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\text{sen}^2 x}{\cos^2 x} + 1 = \frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow \sec^2 x = 1 + \text{tg}^2 x$$

$$\bullet\ \text{tg}^2 x + 1 = \frac{\text{sen}^2 x}{\cos^2 x} + 1 = \frac{\text{sen}^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$$

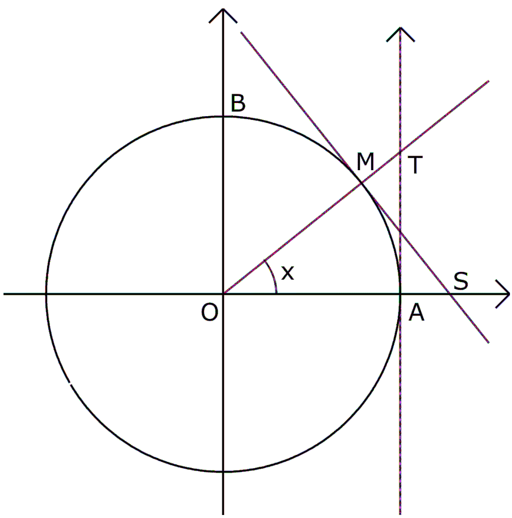

FIGURA 6

Geometricamente, considerando-se a Figura 6, tem-se que os triângulos retângulos OMS e OAT são semelhantes e, portanto, vem:

$$\frac{\overline{MS}}{\overline{AT}} = \frac{\overline{OM}}{\overline{OA}} \Rightarrow \overline{MS} = \overline{AT}.$$

Por outro lado, do triângulo OMS, retângulo em M, vem que:

$$\left(\overline{OM}\right)^2 + \left(\overline{MS}\right)^2 = \left(\overline{OS}\right)^2 \Rightarrow \left(\overline{OS}\right)^2 = 1 + \left(\overline{MS}\right)^2;$$

assim:

$\left(\overline{OS}\right)^2 = 1 + \left(\overline{AT}\right)^2$ e, portanto, $\sec^2 x = 1 + \operatorname{tg}^2 x$.

(b) $\operatorname{cossec}^2 x = 1 + \operatorname{cotg}^2 x$, para $x \neq k \cdot \pi \ (k \in Z)$.

Algebricamente, pode-se demonstrar a relação das duas formas seguintes:

- $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \dfrac{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x} = \dfrac{1}{\operatorname{sen}^2 x} \Rightarrow$

$\Rightarrow 1 + \dfrac{\cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x} = \dfrac{1}{\operatorname{sen}^2 x} \Rightarrow \operatorname{cossec}^2 x = 1 + \operatorname{cotg}^2 x$

- $\operatorname{cotg}^2 x + 1 = \dfrac{\cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x} + 1 = \dfrac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen}^2 x} = \dfrac{1}{\operatorname{sen}^2 x} = \operatorname{cossec}^2 x$

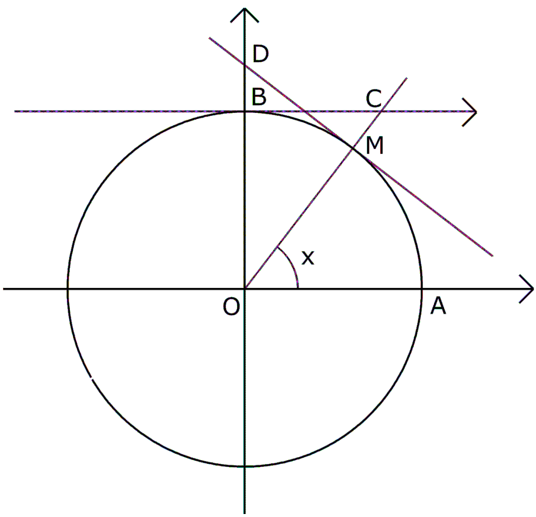

FIGURA 7

Geometricamente, considerando-se a Figura 7, tem-se que os triângulos retângulos OMD e OBC são semelhantes.

Portanto:

$$\frac{\overline{MD}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{OM}}{\overline{OB}} \Rightarrow \overline{MD} = \overline{BC}.$$

Por outro lado, do triângulo OMD, retângulo em M, vem que:

$$\left(\overline{OM}\right)^2 + \left(\overline{MD}\right)^2 = \left(\overline{OD}\right)^2 \Rightarrow \left(\overline{OD}\right)^2 = 1 + \left(\overline{MD}\right)^2;$$

assim: $\left(\overline{OD}\right)^2 = 1 + \left(\overline{BC}\right)^2$ e, portanto, $\cos\sec^2 x = 1 + \cot g^2 x$.

4.3 Exercícios

1) Dado que $\operatorname{sen} x = -\frac{4}{5}$, sendo $\frac{3\cdot\pi}{2} < x < 2\cdot\pi$, calcular o valor das demais funções trigonométricas do arco **x**.

Da relação fundamental $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$, vem que $\cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x$. Então:

$$\cos^2 x = 1 - \left(-\frac{4}{5}\right)^2 = 1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25},$$

de onde se segue que $\cos x = \pm\frac{3}{5}$. A determinação do sinal é feita pela informação de que o arco **x** pertence ao 4º quadrante, onde a função cosseno é positiva. Assim, conclui-se que $\cos x = \frac{3}{5}$. A partir dos valores das funções seno e cosseno determinam-se os valores das demais funções trigonométricas de **x**:

$$\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \therefore \operatorname{tg} x = \frac{-\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = -\frac{4}{3};$$

$$\cot g x = \frac{1}{\operatorname{tg} x} \therefore \cot g x = -\frac{3}{4};$$

$$\sec x = \frac{1}{\cos x} \therefore \sec x = \frac{5}{3};$$

$$\cos\sec x = \frac{1}{\operatorname{sen} x} \therefore \cos\sec x = -\frac{5}{4}.$$

2) Calcular $\cos x$, sabendo que $\cot g x = \frac{2\cdot\sqrt{m}}{m-1}$, com $m > 1$.

Tem-se:

$$\cos\sec^2 x = 1 + \cot g^2 x \Rightarrow \cos\sec^2 x = 1 + \frac{4 \cdot m}{(m-1)^2} =$$

$$= \frac{(m-1)^2 + 4 \cdot m}{(m-1)^2} = \frac{m^2 + 2 \cdot m + 1}{(m-1)^2} = \frac{(m+1)^2}{(m-1)^2} = \left(\frac{m+1}{m-1}\right)^2$$

$$\therefore \cos\sec x = \pm \frac{m+1}{m-1}$$

Uma vez que m > 1, segue-se que $\cot gx > 0$, ou seja, o arco **x** é tal que $0 < x < \frac{\pi}{2}$ ou $\pi < x < \frac{3 \cdot \pi}{2}$. Logo, devem ser consideradas as duas hipóteses:

- $0 < x < \frac{\pi}{2}$:

$$\cos\sec x = \frac{m+1}{m-1} \Rightarrow \operatorname{sen}x = \frac{m-1}{m+1}$$

$$\therefore \cos x = \operatorname{sen}x \cdot \cot gx = \frac{m-1}{m+1} \cdot \frac{2 \cdot \sqrt{m}}{m-1} = \frac{2 \cdot \sqrt{m}}{m+1} \;;$$

- $\pi < x < \frac{3 \cdot \pi}{2}$:

$$\cos\sec x = -\frac{m+1}{m-1} \Rightarrow \operatorname{sen}x = -\frac{m-1}{m+1}$$

$$\therefore \cos x = \operatorname{sen}x \cdot \cot gx = -\frac{m-1}{m+1} \cdot \frac{2 \cdot \sqrt{m}}{m-1} = -\frac{2 \cdot \sqrt{m}}{m+1} \,.$$

Conclui-se, assim, pelos dados do problema, que $\cos x = \pm \frac{2 \cdot \sqrt{m}}{m+1}$.

3) Dado que $\cot gx = \frac{(a-1) \cdot \sqrt{a}}{2 \cdot a}$ e $0 < x < \frac{\pi}{2}$, calcular os valores das demais funções trigonométricas do arco **x**.

Observe-se que, se $0 < x < \frac{\pi}{2}$, então $\cot gx > 0$ e, portanto, deve-se ter a > 1. Calculam-se, agora, os valores solicitados:

- $tgx = \frac{1}{\cot gx} \Rightarrow tgx = \frac{2 \cdot a}{(a-1) \cdot \sqrt{a}}$;

- $\cos\sec^2 x = 1 + \cot g^2 x \Rightarrow \cos\sec^2 x = 1 + \dfrac{(a-1)^2 \cdot a}{4 \cdot a^2}$.

Como $a > 1$, pode-se, na fração, dividir numerador e denominador por **a** e vem:

$$\cos\sec^2 x = 1 + \frac{(a-1)^2}{4 \cdot a} = \frac{4 \cdot a + (a-1)^2}{4 \cdot a} = \frac{a^2 + 2 \cdot a + 1}{4 \cdot a} = \frac{(a+1)^2}{4 \cdot a}.$$

Sendo $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$, onde todas as funções trigonométricas são positivas, conclui-se que

$$\cos\sec x = \frac{a+1}{2 \cdot \sqrt{a}}.$$

- $\operatorname{sen}x = \dfrac{1}{\cos\sec x} \Rightarrow \operatorname{sen}x = \dfrac{2 \cdot \sqrt{a}}{a+1}$;

- $\operatorname{tg}x = \dfrac{\operatorname{sen}x}{\cos x} \Rightarrow \cos x = \dfrac{\operatorname{sen}x}{\operatorname{tg}x} \Rightarrow \cos x = \dfrac{\dfrac{2 \cdot \sqrt{a}}{a+1}}{\dfrac{2 \cdot a}{(a-1) \cdot \sqrt{a}}} =$

$$= \frac{(a-1) \cdot a}{(a+1) \cdot a} = \frac{a-1}{a+1};$$

- $\sec x = \dfrac{1}{\cos x} \Rightarrow \sec x = \dfrac{a+1}{a-1}$.

4) Sabendo que $16 \cdot \cos^2 x + 3 \cdot \operatorname{sen}^2 x = 7$, calcular o valor de $\operatorname{tg}x$.

Valendo-se da relação fundamental $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$, obtém-se o sistema seguinte, que permite determinar os valores de $\operatorname{sen}^2 x$ e $\cos^2 x$:

$$\begin{cases} 16 \cdot \cos^2 x + 3 \cdot \operatorname{sen}^2 x = 7 \\ \cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 1 \end{cases};$$

resolvendo-se, vem: $\operatorname{sen}^2 x = \dfrac{9}{13}$ e $\cos^2 x = \dfrac{4}{13}$, de onde segue-se que $\operatorname{tg}^2 x = \dfrac{9}{4}$. Uma vez que não há informações sobre o quadrante no qual se localiza o arco **x**, conclui-se que $tgx = \pm\frac{3}{2}$.

5) Exprimir todas as funções circulares de um arco **x** em função de senx.

(a) $sen^2x + cos^2 x = 1 \Rightarrow cos^2 x = 1 - sen^2x \Rightarrow cos\,x = \pm\sqrt{1 - sen^2x}$

(b) $tgx = \frac{senx}{cos\,x} \Rightarrow tgx = \pm\frac{senx}{\sqrt{1 - sen^2x}}$

(c) $cot\,gx = \frac{cos\,x}{senx} \Rightarrow cot\,gx = \pm\frac{\sqrt{1 - sen^2x}}{cos\,x}$

(d) $sec\,x = \frac{1}{cos\,x} \Rightarrow sec\,x = \pm\frac{1}{\sqrt{1 - sen^2x}}$

(e) $cossec\,x = \frac{1}{senx}$

6) Sabendo que $senx = \frac{1 - a^2}{1 + a^2}$ e $0 < x < \frac{\pi}{2}$, calcular os valores das demais funções circulares do arco **x**.

Primeiramente, é preciso lembrar que $0 < senx < 1$, já que o arco **x** pertence ao primeiro quadrante. Então, vem:

$$0 < \frac{1 - a^2}{1 + a^2} < 1.$$

Resolve-se, assim, cada uma das duas desigualdades simultâneas separadamente e depois se faz a interseção das duas soluções. Tem-se:

(I) $0 < \frac{1 - a^2}{1 + a^2} \Rightarrow \frac{1 - a^2}{1 + a^2} > 0$

• função do numerador: $y = 1 - a^2$.

Esta função do 2º grau tem dois zeros distintos: a = -1 e a = 1. Assim, o estudo de sinais da função é o que está apresentado na Figura 8.

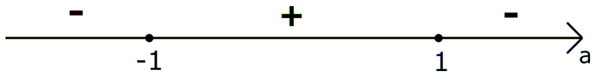

FIGURA 8

• função do denominador: $y = 1 + a^2$. Esta função do segundo grau não tem zeros reais e é positiva, para todo **a**. Assim, têm-se os sinais da Figura 9.

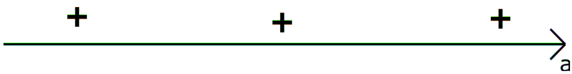

FIGURA 9

Considerando, agora, os sinais do numerador e do denominador, obtêm-se aqueles mostrados na Figura 10, de onde se conclui que os valores de **a** que satisfazem essa primeira inequação estão entre -1 e 1, excluindo-se estes valores.

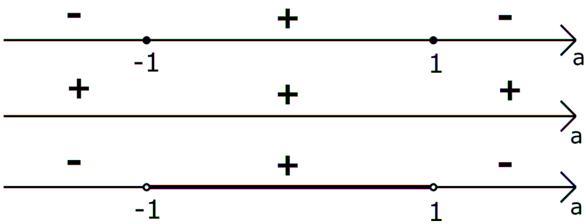

FIGURA 10

Assim, tomando valores de **a** entre -1 e 1 os valores da fração $\frac{1-a^2}{1+a^2}$ serão estritamente positivos.

Resolve-se, agora a inequação:

(II) $\frac{1-a^2}{1+a^2} < 1$.

Tem-se:

$$\frac{1-a^2}{1+a^2} < 1 \Rightarrow \frac{1-a^2}{1+a^2} - 1 < 0 \Rightarrow \frac{1-a^2-1-a^2}{1+a^2} < 0 \Rightarrow \frac{-2 \cdot a^2}{1+a^2} < 0 .$$

É fácil ver que o numerador da fração é sempre menor ou igual a zero e que o denominador é sempre estritamente positivo, Assim, para que a fração seja estritamente menor do que zero, basta que se tomem valores de **a** diferentes de zero. A Figura 11 mostra o estudo de sinais dessa inequação.

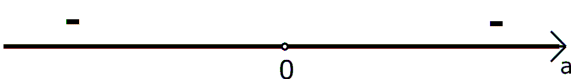

FIGURA 11

Usando os dois resultados apresentados nas Figuras 10 e 11, obtém-se a conclusão para os valores de **a** que podem ser considerados no cálculo das funções trigonométricas solicitadas, conforme mostra a Figura 12.

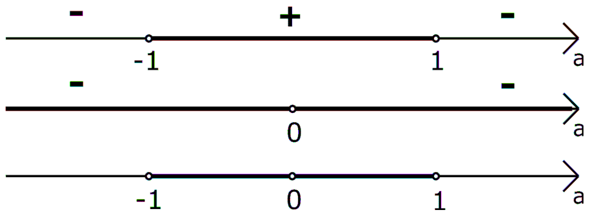

FIGURA 12

Logo, os valores de **a** que satisfazem as desigualdades $0 < \dfrac{1-a^2}{1+a^2} < 1$ são aqueles maiores do que -1 e menores do que 1, mas diferentes de zero, isto é: $-1 < a < 1$ e $a \neq 0$.

Pode-se, agora, calcular os valores das demais funções circulares de **x**:

$$\cos^2 x = 1 - \left(\frac{1-a^2}{1+a^2}\right)^2 = \frac{(1+a^2)^2 + (1-a^2)^2}{(1+a^2)^2} =$$

$$= \frac{1 + 2\cdot a^2 + a^4 - 1 + 2\cdot a^2 - a^4}{(1+a^2)^2} = \frac{4\cdot a^2}{(1+a^2)^2}.$$

Portanto,

$$\cos x = \pm\frac{2\cdot a}{1+a^2}.$$

Observe que, se $0 < a < 1$, vale o sinal positivo; se $-1 < a < 0$, vale o sinal negativo. Entretanto, lembrando que $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$, onde todas as funções trigonométricas são positivas, segue-se que $\cos x = \dfrac{2\cdot a}{1+a^2}$, ou seja, os valores de **a** devem ser tomados estritamente maiores do que 0 e estritamente menores do que 1.

Conhecendo-se $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$, calculam-se os valores das demais funções trigonométricas:

$$\text{tgx} = \frac{\frac{1-a^2}{1+a^2}}{\frac{2\cdot a}{1+a^2}} = \frac{1-a^2}{2\cdot a}$$

$$\cot\text{gx} = \frac{1}{\text{tgx}} = \frac{2\cdot a}{1-a^2}$$

$$\sec x = \frac{1}{\cos x} = \frac{1+a^2}{2\cdot a}$$

$$\cos\sec x = \frac{1}{\text{senx}} = \frac{1+a^2}{1-a^2}$$

7) Verificar as seguintes identidades trigonométricas:

(a) $\sec^2 x + \cos\sec^2 x = \sec^2 x \cdot \cos\sec^2 x$
Partindo do 1º membro, vem:

$$\sec^2 x + \cos\sec^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\text{sen}^2 x} = \frac{\text{sen}^2 x + \cos^2 x}{\text{sen}^2 x \cdot \cos^2 x} =$$

$$= \frac{1}{\text{sen}^2 x \cdot \cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} \cdot \frac{1}{\text{sen}^2 x} = \sec^2 x \cdot \cos\sec^2 x$$

(b) $\text{tg}^2 x + \text{tg}^4 x = \sec^4 x - \sec^2 x$
Tem-se:

$$\text{tg}^2 x + \text{tg}^4 x = \left(\sec^2 x - 1\right) + \left(\sec^2 x - 1\right)^2 =$$

$$\sec^2 x - 1 + \sec^4 x - 2\cdot\sec^2 x + 1 = \sec^2 x + \sec^4 x - 2\cdot\sec^2 x =$$

$$= \sec^4 x - \sec^2 x$$

Exercícios propostos.

1) Sabendo que $\text{tgx} = 5$, com $\pi < x < \frac{3\cdot\pi}{2}$, calcular o valor da expressão: $y = \frac{\cos x - \sec x}{\text{senx} - \cos\sec x}$. $\left(\text{R.: } y = 125\right)$

2) Calcular **m** de modo que se tenha $\text{senx} = 2\cdot m + 1$ e

$\cos x = 4 \cdot m + 1$. $\left(R.: m = -\dfrac{1}{10} \text{ ou } m = -\dfrac{1}{2} \right)$

3) Se $10 \cdot tgx + 16 \cdot \cos x = 17 \cdot \sec x$, com $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k \cdot \pi \ (k \in Z)$, calcular o valor de $senx$. $\left(R.: senx = \dfrac{1}{2} \text{ ou } senx = \dfrac{1}{8} \right)$

4) Sabendo que $tgx = \dfrac{b}{a}$, com $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$, provar que:
$\dfrac{a}{\cos x} + \dfrac{b}{senx} = 2 \cdot \sqrt{a^2 + b^2}$.

5) Sabendo que $5 \cdot tgx + \sec x = 5$, para $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k \cdot \pi \ (k \in Z)$, calcular o valor de $\cos x$. $\left(R.: \cos x = -\dfrac{3}{5} \text{ ou } \cos x = -\dfrac{4}{5} \right)$

6) Verificar a seguinte identidade trigonométrica:
$\sec x + \cot gx = \cos\sec x \cdot (\cos x + tgx)$.

5 REDUÇÃO DE ARCOS AO 1º QUADRANTE

Considerando-se, no ciclo trigonométrico, um arco orientado $\overset{\frown}{AM}$ de medida **x** (sendo esta a primeira determinação positiva do arco), quer-se encontrar, no 1º quadrante, um arco de medida $\mathbf{x_1}$, cujas funções trigonométricas tenham os mesmos valores das funções do arco dado, em <u>valor absoluto</u>.

Considerar-se-ão três casos, em cada um dos quais a primeira determinação positiva do arco **x** pertence ao 2º quadrante, ou ao 3º quadrante ou ao 4º quadrante.

(1) <u>o arco</u> $\overset{\frown}{AM}$ <u>tem extremidade no 2º quadrante</u>.

Seja $\overset{\frown}{AM}$, de medida **x**, com extremidade no 2º quadrante; o ponto M_1, simétrico do ponto M em relação ao eixo dos senos, determina o arco $\overset{\frown}{AM_1}$, de medida $\mathbf{x_1}$ (Figura 1). Tem-se: $x_1 = \pi - x$. Os arcos $\overset{\frown}{AM}$ e $\overset{\frown}{AM_1}$ são chamados <u>arcos complementares</u>.

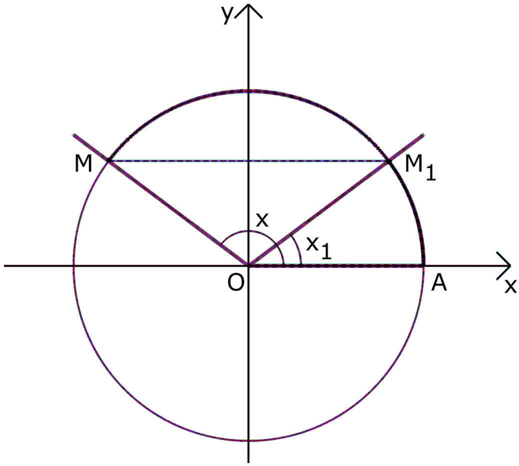

FIGURA 1

Tem-se: $\begin{cases} \operatorname{sen} x = \operatorname{sen}(\pi - x) \\ \cos x = -\cos(\pi - x) \\ \operatorname{tg} x = -\operatorname{tg}(\pi - x) \\ \operatorname{cotg} x = -\operatorname{cotg}(\pi - x) \\ \sec x = -\sec(\pi - x) \\ \operatorname{cossec} x = \operatorname{cossec}(\pi - x) \end{cases}$.

Essas relações são válidas sempre que $\frac{\pi}{2} < x < \pi$.

Exemplo: recorrendo a um arco do 1º quadrante, determinar os valores de $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$, para:

(a) $x = 135^{o}$

Observe que o arco dado tem extremidade no 2º quadrante, pois $90^{o} < 135^{o} < 180^{o}$; então:

$$\begin{cases} \operatorname{sen}(135^{o}) = \operatorname{sen}(180^{o} - 135^{o}) = \operatorname{sen}(45^{o}) = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \cos(135^{o}) = -\cos(180^{o} - 135^{o}) = -\cos(45^{o}) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}.$$

(b) $x = 840^{o}$

Nesse caso, não foi dada a primeira determinação positiva do arco, que deve ser determinada. Tem-se:

$$840^{o} = 2 \cdot 360^{o} + 120^{o}$$

e, portanto, a primeira determinação positiva do arco dado é 120^{o}, que é um arco com extremidade no segundo quadrante. Assim, vem:

$$\begin{cases} \operatorname{sen}(840^{o}) = \operatorname{sen}(120^{o}) = \operatorname{sen}(180^{o} - 120^{o}) = \operatorname{sen}(60^{o}) = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos(840^{o}) = -\cos(120^{o}) = -\cos(180^{o} - 120^{o}) = -\cos(60^{o}) = -\dfrac{1}{2} \end{cases}.$$

(c) $x = \frac{2 \cdot \pi}{3}$ rd

Uma vez que $\frac{\pi}{2} < \frac{2 \cdot \pi}{3} < \pi$, vem:

$$\begin{cases} \operatorname{sen}\left(\dfrac{2 \cdot \pi}{3}\right) = \operatorname{sen}\left(\pi - \dfrac{2 \cdot \pi}{3}\right) = \operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos\left(\dfrac{2 \cdot \pi}{3}\right) = -\cos\left(\pi - \dfrac{2 \cdot \pi}{3}\right) = -\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = -\dfrac{1}{2} \end{cases}.$$

(d) $x = -\dfrac{5 \cdot \pi}{4}$ rd

Deve-se determinar a primeira determinação positiva a_0 do arco; tem-se:

$$a_0 = 2 \cdot \pi - \frac{5 \cdot \pi}{4} = \frac{3 \cdot \pi}{4} \in 2^{o}Q.$$

Então:

$$\begin{cases} \text{sen}\left(-\dfrac{5 \cdot \pi}{4}\right) = \text{sen}\left(\dfrac{3 \cdot \pi}{4}\right) = \text{sen}\left(\pi - \dfrac{3 \cdot \pi}{4}\right) = \text{sen}\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \cos\left(-\dfrac{5 \cdot \pi}{4}\right) = \cos\left(\dfrac{3 \cdot \pi}{4}\right) = -\cos\left(\pi - \dfrac{3 \cdot \pi}{4}\right) = -\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}.$$

(2) <u>o arco</u> $\overset{\frown}{AM}$ <u>tem extremidade no 3^{o} quadrante</u>.

Seja $\overset{\frown}{AM}$, de medida **x**, com extremidade no 3^{o} quadrante; o ponto M_1, simétrico do ponto M em relação ao centro **O** do ciclo trigonométrico, determina o arco $\overset{\frown}{AM_1}$, de medida $\mathbf{x_1}$ (Figura 2). Tem-se: $x_1 = x - \pi$. Os arcos $\overset{\frown}{AM}$ e $\overset{\frown}{AM_1}$ são chamados <u>arcos explementares</u>.

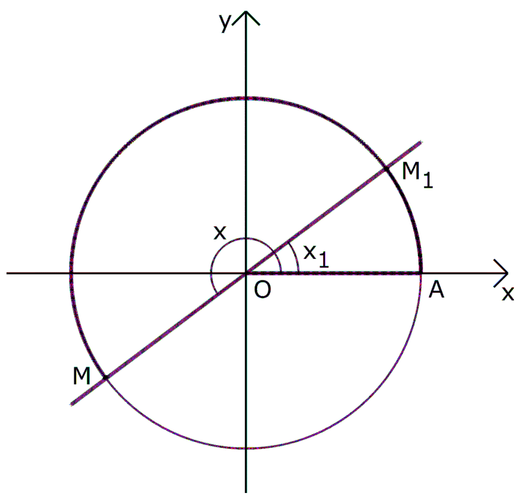

FIGURA 2

Então:

$$\begin{cases} \text{sen}x = -\text{sen}(\pi - x) \\ \cos x = -\cos(\pi - x) \\ \text{tg}x = \text{tg}(\pi - x) \\ \cot gx = \cot g(\pi - x) \\ \sec x = -\sec(\pi - x) \\ \text{cossec}\, x = -\text{cossec}(\pi - x) \end{cases}.$$

Essas relações são válidas sempre que $\pi < x < \dfrac{3 \cdot \pi}{2}$.

Exemplo: recorrendo a um arco do 1º quadrante, determinar os valores de $\text{sen}x$ e $\cos x$, para:

(a) $x = 240^{\circ}$

O arco dado tem extremidade no 3º quadrante, então:

$$\begin{cases} \text{sen}(240^{\circ}) = -\text{sen}(240^{\circ} - 180^{\circ}) = -\text{sen}(60^{\circ}) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos(240^{\circ}) = -\cos(240^{\circ} - 180^{\circ}) = -\cos(60^{\circ}) = -\dfrac{1}{2} \end{cases}.$$

(b) $x = -140^{\circ}$

A primeira determinação positiva do arco é:

$a_0 = 360^{\circ} - 140^{\circ} = 220^{\circ}$.

Então:

$$\begin{cases} \text{sen}(-140^{\circ}) = \text{sen}(220^{\circ}) = -\text{sen}(220^{\circ} - 180^{\circ}) = -\text{sen}(40^{\circ}) \\ \cos(-140^{\circ}) = \cos(220^{\circ}) = -\cos(220^{\circ} - 180^{\circ}) = -\cos(40^{\circ}) \end{cases}.$$

(c) $x = \dfrac{7 \cdot \pi}{6}$ rd

Uma vez que $\pi < \dfrac{7 \cdot \pi}{6} < \dfrac{3 \cdot \pi}{2}$, vem:

$$\begin{cases} \operatorname{sen}\left(\frac{7\cdot\pi}{6}\right) = -\operatorname{sen}\left(\frac{7\cdot\pi}{6}-\pi\right) = -\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2} \\ \cos\left(\frac{7\cdot\pi}{6}\right) = -\cos\left(\frac{7\cdot\pi}{6}-\pi\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}.$$

(3) o arco $\overset{\frown}{AM}$ tem extremidade no 4^o quadrante.

Seja $\overset{\frown}{AM}$, de medida **x**, com extremidade no 4^o quadrante; o ponto M_1, simétrico do ponto M em relação ao eixo dos cossenos, determina o arco $\overset{\frown}{AM_1}$, de medida $\mathbf{x_1}$ (Figura 3). Tem-se: $x_1 = 2\cdot\pi - x$.

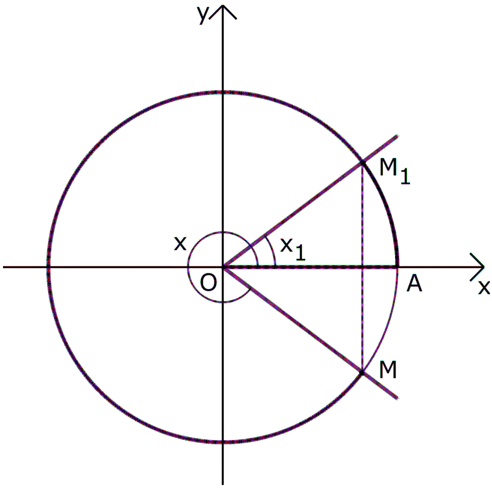

FIGURA 3

Os arcos $\overset{\frown}{AM}$ e $\overset{\frown}{AM_1}$ são chamados arcos replementares. Então:

$$\begin{cases} \operatorname{sen}x = -\operatorname{sen}(2\cdot\pi - x) \\ \cos x = \cos(2\cdot\pi - x) \\ \operatorname{tg}x = -\operatorname{tg}(2\cdot\pi - x) \\ \operatorname{cotg}x = -\operatorname{cotg}(2\cdot\pi - x) \\ \sec x = \sec(2\cdot\pi - x) \\ \operatorname{cossec}x = -\operatorname{cossec}(2\cdot\pi - x) \end{cases}.$$

Essas relações são verdadeiras sempre que $\frac{3\cdot\pi}{2} < x < 2\cdot\pi$.

Exemplo: recorrendo a um arco do 1º quadrante, determinar os valores de $\operatorname{sen}x$ e $\cos x$, para:

(a) $x = 675^o$

Tem-se: $675^o = 1 \cdot 360^o + 315^o$

Assim, a primeira determinação positiva do arco é: $a_0 = 315^o$. Então:

$$\begin{cases} \operatorname{sen}(675^o) = \operatorname{sen}(315^o) = -\operatorname{sen}(360^o - 315^o) = -\operatorname{sen}(45^o) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \cos(675^o) = \cos(315^o) = \cos(360^o - 315^o) = \cos(45^o) = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}.$$

(b) $x = \dfrac{5 \cdot \pi}{3}$ rd

Uma vez que $\dfrac{3 \cdot \pi}{2} < \dfrac{5 \cdot \pi}{3} < 2 \cdot \pi$, vem:

$$\begin{cases} \operatorname{sen}\left(\dfrac{5 \cdot \pi}{3}\right) = -\operatorname{sen}\left(2 \cdot \pi - \dfrac{5 \cdot \pi}{3}\right) = -\operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos\left(\dfrac{5 \cdot \pi}{3}\right) = \cos\left(2 \cdot \pi - \dfrac{5 \cdot \pi}{3}\right) = \cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{1}{2} \end{cases}.$$

(c) $x = \dfrac{9 \cdot \pi}{5}$ rd

Sendo $\dfrac{3 \cdot \pi}{2} < \dfrac{9 \cdot \pi}{5} < 2 \cdot \pi$, tem-se:

$$\begin{cases} \operatorname{sen}\left(\dfrac{9 \cdot \pi}{5}\right) = -\operatorname{sen}\left(2 \cdot \pi - \dfrac{9 \cdot \pi}{5}\right) = -\operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{5}\right) \\ \cos\left(\dfrac{9 \cdot \pi}{5}\right) = \cos\left(2 \cdot \pi - \dfrac{9 \cdot \pi}{5}\right) = \cos\left(\dfrac{\pi}{5}\right) \end{cases}.$$

Observação. Dois arcos do primeiro quadrante com extremidades simétricas em relação à bissetriz deste quadrante são chamados arcos complementares. Assim, se $\overset{\frown}{AM}$ tem medida **x**, com extremidade no 1º quadrante e o ponto M_1 do ciclo trigonométrico é simétrico a M em relação à bissetriz do 1º quadrante, tem-se que a medida $\mathbf{x_1}$ de $\overset{\frown}{AM_1}$ é $x_1 = \frac{\pi}{2} - x$ (Figura 4).

Então:

$$x_1 + x = \frac{\pi}{2} - x + x = \frac{\pi}{2}$$

e tem-se:

$$\begin{cases} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x \\ \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \operatorname{sen} x \end{cases}.$$

Conseqüências: se $x \in 1^{\text{o}}$ Q, vem:

$$\begin{cases} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \operatorname{sen}\left(\pi - \left(\frac{\pi}{2} + x\right)\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x \\ \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\cos\left(\pi - \left(\frac{\pi}{2} + x\right)\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\operatorname{sen} x \\ \operatorname{sen}\left(\frac{3 \cdot \pi}{2} - x\right) = -\operatorname{sen}\left(\frac{3 \cdot \pi}{2} - x - \pi\right) = -\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\cos x \\ \cos\left(\frac{3 \cdot \pi}{2} - x\right) = -\cos\left(\frac{3 \cdot \pi}{2} - x - \pi\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\operatorname{sen} x \\ \operatorname{sen}\left(\frac{3 \cdot \pi}{2} + x\right) = -\operatorname{sen}\left(2 \cdot \pi - \left(\frac{3 \cdot \pi}{2} + x\right)\right) = -\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\cos x \\ \cos\left(\frac{3 \cdot \pi}{2} + x\right) = \cos\left(2 \cdot \pi - \left(\frac{3 \cdot \pi}{2} + x\right)\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \operatorname{sen} x \end{cases}$$

Exemplo: sendo **x** a medida de um arco com extremidade no 1º quadrante, simplificar as expressões:

(a) $y = \dfrac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cdot \cos\left(\frac{3 \cdot \pi}{2} + x\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) \cdot \operatorname{sen}(\pi + x)}$

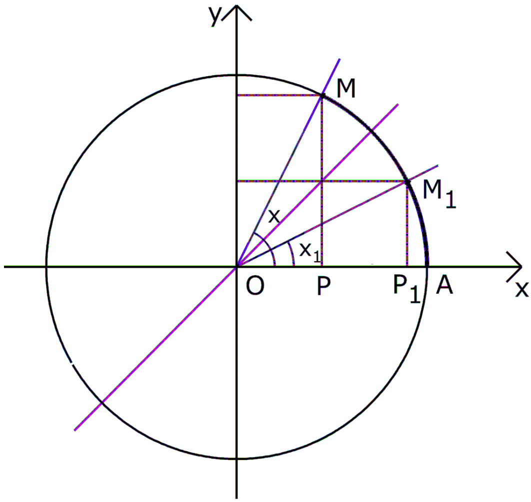

FIGURA 4

Tem-se:

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos x$$

$$\cos\left(\frac{3\cdot\pi}{2}+x\right)=\cos\left(2\cdot\pi-\left(\frac{3\cdot\pi}{2}+x\right)\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\operatorname{sen}x$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\cos\left(\pi-\left(\frac{\pi}{2}+x\right)\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=-\operatorname{sen}x$$

$$\operatorname{sen}(\pi+x)=-\operatorname{sen}(\pi+x-\pi)=-\operatorname{sen}x\ .$$

Assim, vem:

$$y=\frac{\cos x\cdot\operatorname{sen}x}{(-\operatorname{sen}x)\cdot(-\operatorname{sen}x)}=\cot gx\ .$$

(b) $$y=\frac{\operatorname{sen}\frac{4\cdot\pi}{3}\cdot\operatorname{tg}\frac{5\cdot\pi}{3}\cdot\cos\frac{5\cdot\pi}{6}}{\cot g\frac{7\cdot\pi}{4}\cdot\operatorname{cossec}\frac{11\cdot\pi}{6}}$$

Calculando separadamente os valores de cada função trigonométrica da expressão, vem:

$$\operatorname{sen}\frac{4\cdot\pi}{3}=-\operatorname{sen}\left(\frac{4\cdot\pi}{3}-\pi\right)=-\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{tg}\frac{5\cdot\pi}{3}=-\text{tg}\left(2\cdot\pi-\frac{5\cdot\pi}{3}\right)=-\text{tg}\frac{\pi}{3}=-\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}=-\sqrt{3}$$

$$\cos\frac{5\cdot\pi}{6}=-\cos\left(\pi-\frac{5\cdot\pi}{6}\right)=-\cos\frac{\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cot g\frac{7\cdot\pi}{4}=-\cot g\left(2\cdot\pi-\frac{7\cdot\pi}{4}\right)=-\cot g\frac{\pi}{4}=-1$$

$$\cos\sec\frac{11\cdot\pi}{6}=-\cos\sec\left(2\cdot\pi-\frac{11\cdot\pi}{6}\right)=-\cos\sec\frac{\pi}{6}=-\frac{1}{\frac{1}{2}}=-2$$

Então:

$$y=\frac{\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cdot\left(-\sqrt{3}\right)\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{(-1)\cdot(-2)}=-\frac{3\cdot\sqrt{3}}{8}.$$

(c) $$y=\frac{\text{sen}(\pi+x)\cdot\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\cdot\text{tg}\left(\frac{11\cdot\pi}{2}+x\right)}{\cos(3\cdot\pi+x)\cdot\text{sen}\left(\frac{3\cdot\pi}{2}+x\right)\cdot\text{tg}(2\cdot\pi-x)}$$

Tem-se:

$$\text{sen}(\pi+x)=-\text{sen}(\pi+x-\pi)=-\text{sen}x$$

$$\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\text{sen}x$$

$$\text{tg}\left(\frac{11\cdot\pi}{2}+x\right)=\text{tg}\left(\frac{3\cdot\pi}{2}+x\right)=-\text{tg}\left(2\cdot\pi-\left(\frac{3\cdot\pi}{2}+x\right)\right)=-\text{tg}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=-\cot gx$$

$$\cos(3\cdot\pi+x)=\cos(\pi+x)=-\cos(\pi+x-\pi)=-\cos x$$

$$\text{sen}\left(\frac{3\cdot\pi}{2}+x\right)=-\text{sen}\left(2\cdot\pi-\left(\frac{3\cdot\pi}{2}+x\right)\right)=-\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=-\cos x$$

$$\text{tg}(2\cdot\pi-x)=-\text{tg}(2\cdot\pi-(2\cdot\pi-x))=-\text{tg}x$$

Logo, vem:

$$y=\frac{(-\operatorname{sen}x)\cdot \operatorname{sen}x\cdot(-\cot gx)}{(-\cos x)\cdot(-\cos x)\cdot(-\operatorname{tg}x)}=-\frac{\operatorname{sen}^2 x\cdot\dfrac{\cos x}{\operatorname{sen}x}}{\cos^2 x\cdot\dfrac{\operatorname{sen}x}{\cos x}}=$$

$$=-\frac{\operatorname{sen}x\cdot\cos x}{\operatorname{sen}x\cdot\cos x}=-1\,.$$

Exercícios propostos: sendo **x** a medida de um arco com extremidade no 1º quadrante, simplificar as expressões:

(a) $y=\dfrac{\cos\sec(5\cdot\pi+x)\cdot\cos(\pi-x)\cdot\operatorname{sen}(2\cdot\pi-x)}{\sec(2\cdot\pi+x)\cdot\operatorname{tg}(\pi+x)\cdot\cot g(4\cdot\pi-x)}$ $\left(\text{R.}: y=\cos^2 x\right)$

(b) $y=\dfrac{\operatorname{sen}(\pi+x)\cdot\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)\cdot\operatorname{tg}\left(\dfrac{3\cdot\pi}{2}-x\right)}{\cot g(\pi-x)\cdot\cos\sec\left(\dfrac{3\cdot\pi}{2}+x\right)\cdot\sec\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right)}$

$\left(\text{R.}: y=\operatorname{sen}^3 x\cdot\cos x\right)$

6 FÓRMULAS DE TRANSFORMAÇÃO

6.1 Adição e subtração de arcos

O problema da adição de arcos consiste em calcular as funções circulares da soma de dois ou mais arcos, em função das funções circulares desses arcos. Estudar-se-á o problema apenas para as funções seno, cosseno e tangente, visto que as demais funções trigonométricas podem ser obtidas a partir destas.

Considere-se, no ciclo trigonométrico, um arco orientado $\overset{\frown}{AP}$, de medida **a**, e, a partir da extremidade P, um arco $\overset{\frown}{PM}$, cuja medida seja **b**. Então, a medida algébrica do arco $\overset{\frown}{AM}$ será **a + b**. Considere-se, ainda, o arco $\overset{\frown}{AQ}$, cuja medida é **2.π - b**, ou, equivalentemente. **–b** (Figura 1).

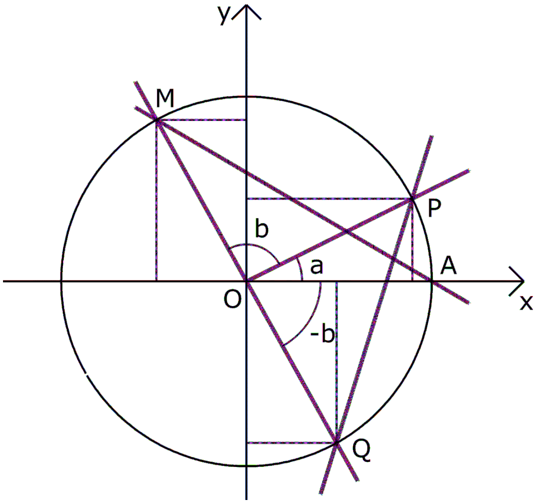

FIGURA 1

Em relação ao sistema cartesiano Oxy, as coordenadas dos pontos da Figura 1 são: $A(1{,}0)$, $P(\cos a, \operatorname{sen} a)$, $Q(\cos(-b), \operatorname{sen}(-b))$ ou $Q(\cos b, -\operatorname{sen} b)$ e $M(\cos(a+b), \operatorname{sen}(a+b))$.

As cordas AM e PQ são iguais. Então, tem-se que $d_{AM}^2 = d_{PQ}^2$. Calculando cada uma dessas distâncias separadamente, vem:

$$d_{AM}^2 = (\cos(a+b)-1)^2 + (\text{sen}(a+b)-0)^2 =$$

$$\cos^2(a+b) - 2\cdot\cos(a+b) + 1 + \text{sen}^2(a+b) = 2 - 2\cdot\cos(a+b)$$

$$d_{PQ}^2 = (\cos a - \cos b)^2 + (\text{sen}a + \text{sen}b)^2 =$$

$$= \cos^2 a - 2\cdot\cos a\cdot\cos b + \cos^2 b + \text{sen}^2 a + 2\cdot\text{sen}a\cdot\text{sen}b + \text{sen}^2 b =$$

$$= 2 - 2\cdot\cos a\cdot\cos b + 2\cdot\text{sen}a\cdot\text{sen}b$$

Então, vem:

$$2 - 2\cdot\cos(a+b) = 2 - 2\cdot\cos a\cdot\cos b + 2\cdot\text{sen}a\cdot\text{sen}b,$$

de onde se conclui que

$$\cos(a+b) = \cos a\cdot\cos b - \text{sen}a\cdot\text{sen}b$$

Conseqüências:

1) $\cos(a-b) = \cos(a+(-b)) = \cos a\cdot\cos(-b) - \text{sen}a\cdot\text{sen}(-b) =$

$= \cos a\cdot\cos b + \text{sen}a\cdot\text{sen}b$

2) $\text{sen}(a+b) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - (a+b)\right) = \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - a\right) - b\right) =$

$= \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right)\cdot\cos b + \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - a\right)\cdot\text{sen}b = \text{sen}a\cdot\cos b + \cos a\cdot\text{sen}b$

3) $\text{sen}(a-b) = \text{sen}(a+(-b)) = \text{sen}a\cdot\cos(-b) + \cos a\cdot\text{sen}(-b) =$

$= \text{sen}a\cdot\cos b - \cos a\cdot\text{sen}b$

4) Se $a+b \neq \frac{\pi}{2} + k\cdot\pi$, $a \neq \frac{\pi}{2} + k\cdot\pi$ e $b \neq \frac{\pi}{2} + k\cdot\pi$, para todo $k \in Z$, tem-se:

$$\text{tg}(a+b) = \frac{\text{sen}(a+b)}{\cos(a+b)} = \frac{\text{sen}a\cdot\cos b + \cos a\cdot\text{sen}b}{\cos a\cdot\cos b - \text{sen}a\cdot\text{sen}b} =$$

$$= \frac{\dfrac{\text{sen}a\cdot\cos b}{\cos a\cdot\cos b} + \dfrac{\cos a\cdot\text{sen}b}{\cos a\cdot\cos b}}{\dfrac{\cos a\cdot\cos b}{\cos a\cdot\cos b} - \dfrac{\text{sen}a\cdot\text{sen}b}{\cos a\cdot\cos b}} = \frac{\text{tg}a + \text{tg}b}{1 - \text{tg}a\cdot\text{tg}b}$$

5) Se $a-b \neq \frac{\pi}{2}+k\cdot\pi$, $a \neq \frac{\pi}{2}+k\cdot\pi$ e $b \neq \frac{\pi}{2}+k\cdot\pi$, para todo $k \in Z$, tem-se:

$$\operatorname{tg}(a-b)=\operatorname{tg}(a+(-b))=\frac{\operatorname{tg}a+\operatorname{tg}(-b)}{1-\operatorname{tg}a\cdot\operatorname{tg}(-b)}=\frac{\operatorname{tg}a-\operatorname{tg}b}{1+\operatorname{tg}a\cdot\operatorname{tg}b}$$

Observação: é possível deduzir as fórmulas de $\operatorname{sen}(a+b)$ e $\cos(a+b)$ utilizando-se apenas semelhança de triângulos, como se segue (Figura 2).

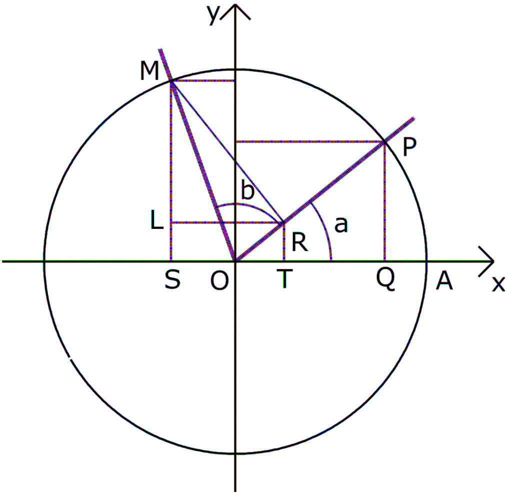

FIGURA 2

O objetivo é determinar $\overline{MS}=\operatorname{sen}(a+b)$ e $\overline{OS}=\cos(a+b)$. Tem-se:

- do triângulo OMR:

$$\operatorname{sen}b=\frac{\overline{MR}}{\overline{OM}} \Rightarrow \operatorname{sen}b=\overline{MR}$$

$$\cos b=\frac{\overline{OR}}{\overline{OM}} \Rightarrow \cos b=\overline{OR}$$

- do triângulo LMR:

$$\operatorname{sen}a=\frac{\overline{LR}}{\overline{MR}} \Rightarrow \overline{LR}=\operatorname{sen}a\cdot\overline{MR} \Rightarrow \overline{LR}=\operatorname{sen}a\cdot\operatorname{sen}b$$

$$\cos a = \frac{\overline{ML}}{\overline{MR}} \Rightarrow \overline{ML} = \cos a \cdot \overline{MR} \Rightarrow \overline{ML} = \cos a \cdot \operatorname{sen} b$$

• do triângulo OTR:

$$\operatorname{sen} a = \frac{\overline{RT}}{\overline{OR}} \Rightarrow \overline{RT} = \operatorname{sen} a \cdot \overline{OR} \Rightarrow \overline{RT} = \operatorname{sen} a \cdot \cos b$$

$$\cos a = \frac{\overline{OT}}{\overline{OR}} \Rightarrow \overline{OT} = \cos a \cdot \overline{OR} \Rightarrow \overline{OT} = \cos a \cdot \cos b$$

Tem-se: $\overline{MS} = \overline{LS} + \overline{ML} = \overline{RT} + \overline{ML}$; então:

$$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \cdot \cos b + \cos a \cdot \operatorname{sen} b$$

Por outro lado, $\overline{OS} = \overline{LR} - \overline{OT}$, de onde se segue que:

$$|\cos(a+b)| = \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b - \cos a \cdot \cos b .$$

Uma vez que o arco de medida $(a+b)$ pertence ao 2º quadrante, tem-se:

$$\cos(a+b) < 0 \Rightarrow |\cos(a+b)| = -\cos(a+b);$$

logo, vem:

$$\cos(a+b) = \cos a \cdot \cos b - \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b .$$

Soma de três arcos: dados três arcos de medidas **a**, **b** e **c**, tem-se:

$$\cos(a+b+c) = \cos[(a+b)+c] = \cos(a+b) \cdot \cos c - \operatorname{sen}(a+b) \cdot \operatorname{sen} c =$$
$$= (\cos a \cdot \cos b - \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b) \cdot \cos c - (\operatorname{sen} a \cdot \cos b + \cos a \cdot \operatorname{sen} b) \cdot \operatorname{sen} c =$$
$$= \cos a \cdot \cos b \cdot \cos c - \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b \cdot \cos c +$$
$$+ \operatorname{sen} a \cdot \cos b \cdot \operatorname{sen} c - \cos a \cdot \operatorname{sen} b \cdot \operatorname{sen} c$$

Analogamente, calculam-se o seno e a tangente de $(a+b+c)$, de diferenças entre os arcos e generaliza-se o processo para mais do que três arcos.

Exercícios:

1) Calcular:

(a) $\operatorname{sen}(75^\circ)$

Tem-se:

$$\operatorname{sen}(75^\circ) = \operatorname{sen}(30^\circ + 45^\circ) = \operatorname{sen}(30^\circ) \cdot \cos(45^\circ) + \operatorname{sen}(45^\circ) \cdot \cos(30^\circ) =$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot (1+\sqrt{3})$$

(b) $\sec\left(345^o\right)$

<u>1^a forma</u>: uma vez que o arco dado pertence ao $4^{\underline{o}}$ quadrante, pode-se, primeiramente, reduzi-lo ao $1^{\underline{o}}$ quadrante, fazendo:

$$\sec\left(345^o\right)=\sec\left(360^o-345^o\right)=\sec\left(15^o\right)=\frac{1}{\cos\left(15^o\right)}$$

Calcula-se, agora, o valor de $\cos\left(15^o\right)$:

$$\cos\left(15^o\right)=\cos\left(45^o-30^o\right)=\cos\left(45^o\right)\cdot\cos\left(30^o\right)+\operatorname{sen}\left(45^o\right)\cdot\operatorname{sen}\left(30^o\right)=$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{2}}{4}\cdot\left(\sqrt{3}+1\right)$$

Assim, vem:

$$\sec\left(345^o\right)=\frac{4}{\sqrt{2}\cdot\left(\sqrt{3}+1\right)}=\frac{4}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}=\frac{4}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}=$$

$$=\frac{4\cdot\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)}{6-2}=\sqrt{6}-\sqrt{2}\quad\text{ou}\quad\sec\left(345^o\right)=\sqrt{2}\cdot\left(\sqrt{3}-1\right)$$

<u>2^a forma</u>: calculando diretamente o valor da secante do arco dado, sem reduzi-lo ao $1^{\underline{o}}$ quadrante:

$$\sec\left(345^o\right)=\sec\left(360^o-15^o\right)=\frac{1}{\cos\left(360^o-15^o\right)}$$

Calcula-se, agora, o valor de $\cos\left(360^o-15^o\right)$:

$$\cos\left(360^o-15^o\right)=\cos\left(360^o\right)\cdot\cos\left(15^o\right)+\operatorname{sen}\left(360^o\right)\cdot\operatorname{sen}\left(15^o\right)=$$

$$=1\cdot\cos\left(15^o\right)+0\cdot\operatorname{sen}\left(15^o\right)=\cos\left(15^o\right)$$

Portanto, obtém-se que

$$\sec\left(345^o\right)=\frac{1}{\cos\left(15^o\right)}.$$

O valor de $\cos\left(15^o\right)$ é, então calculado como acima e conclui-se como anteriormente.

<u>3^a forma</u>: novamente, calcula-se diretamente o valor da secante do arco dado, sem reduzi-lo ao $1^{\underline{o}}$ quadrante, mas escrevendo o arco dado de outra maneira:

$$\sec\left(345^o\right)=\sec\left(300^o+45^o\right)=\frac{1}{\cos\left(300^o+45^o\right)}$$

Calcula-se, agora, o valor de $\cos\left(300^o+45^o\right)$:

$$\cos\left(300^\circ+45^\circ\right)=\cos\left(300^\circ\right)\cdot\cos\left(45^\circ\right)-\operatorname{sen}\left(300^\circ\right)\cdot\operatorname{sen}\left(45^\circ\right)=$$

$$=\cos\left(300^\circ\right)\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-\operatorname{sen}\left(300^\circ\right)\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\left(\cos\left(300^\circ\right)-\operatorname{sen}\left(300^\circ\right)\right)$$

É preciso, agora, calcular $\cos\left(300^\circ\right)$ e $\operatorname{sen}\left(300^\circ\right)$. Tem-se:

$$\cos\left(300^\circ\right)=\cos\left(360^\circ-300^\circ\right)=\cos\left(60^\circ\right)=\frac{1}{2}$$

$$\operatorname{sen}\left(300^\circ\right)=-\operatorname{sen}\left(360^\circ-300^\circ\right)=-\operatorname{sen}\left(60^\circ\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Portanto, vem:

$$\cos\left(300^\circ+45^\circ\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\left(\cos\left(300^\circ\right)-\operatorname{sen}\left(300^\circ\right)\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{4}\cdot\left(1+\sqrt{3}\right)$$

Assim, a exemplo do que já se calculou anteriormente, conclui-se que

$$\sec\left(345^\circ\right)=\frac{1}{\cos\left(300^\circ+45^\circ\right)}=\frac{4}{\sqrt{2}\cdot\left(\sqrt{3}+1\right)}=\sqrt{2}\cdot\left(\sqrt{3}-1\right)$$

(c) $\cot g\left(105^\circ\right)$

Lembrando que

$$\cot g\left(105^\circ\right)=\frac{1}{tg\left(105^\circ\right)},$$

calcula-se $tg\left(105^\circ\right)$:

$$tg\left(105^\circ\right)=tg\left(60^\circ+45^\circ\right)=\frac{tg\left(60^\circ\right)+tg\left(45^\circ\right)}{1-tg\left(60^\circ\right)\cdot tg\left(45^\circ\right)}=\frac{\sqrt{3}+1}{1-\sqrt{3}\cdot 1}=\frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}$$

Logo,

$$\cot g\left(105^\circ\right)=\frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}\cdot\frac{1-\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}=\frac{\left(1-\sqrt{3}\right)^2}{1-3}=-\frac{\left(1-\sqrt{3}\right)^2}{2}$$

2) Dados: $\operatorname{sen}x=\frac{56}{65}$, com $0<x<\frac{\pi}{2}$, e $\operatorname{sen}y=\frac{4}{5}$, com $0<y<\frac{\pi}{2}$, calcular o valor de $\operatorname{sen}(x+y)$.

Tem-se:

$\text{sen}(x+y) = \text{sen}x \cdot \cos y - \cos x \cdot \text{sen}y$

É preciso, portanto, calcular os valores de cosy e cosx:

$$\cos^2 x = 1 - \text{sen}^2 x = 1 - \left(\frac{56}{65}\right)^2 = 1 - \frac{3136}{4225} = \frac{1089}{4225} \therefore \cos x = \frac{33}{65}$$

Por outro lado, vem:

$$\cos^2 y = 1 - \text{sen}^2 y = 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25} \therefore \cos y = \frac{3}{5}$$

Então:

$$\text{sen}(x+y) = \frac{56}{65} \cdot \frac{3}{5} - \frac{33}{65} \cdot \frac{4}{5} = \frac{1}{65 \cdot 5} \cdot (168 + 132) = \frac{300}{65 \cdot 5} = \frac{12}{13}.$$

3) É verdadeira ou falsa a afirmação: $\cos(90^0) - \cos(1^0) = \cos(89^0)$?

É falsa. Observa-se, inicialmente, que:

$\cos(90^0) - \cos(1^0) = 0 - \cos(1^0) = -\cos(1^0)$;

portanto, se a equação dada fosse verdadeira, ter-se-ia que $\cos(89^0) = -\cos(1^0)$.

É claro que essa igualdade não é verdadeira, pois $\cos(89^0) > 0$, já que 89^0 é um arco com extremidade no primeiro quadrante.

Outra forma de mostrar que a igualdade dada é falsa é utilizar uma das fórmulas de adição de arcos:

$\cos(a - b) = \cos a \cdot \cos b + \text{sen}a \cdot \text{sen}b$;

assim, vem:

$$\cos(89^0) = \cos(90^0 - 1^0) = \cos(90^0) \cdot \cos(1^0) + \text{sen}(90^0) \cdot \text{sen}(1^0) = \\ = 0 + \text{sen}(1^0) = \text{sen}(1^0).$$

É claro que $\text{sen}(1^0) \neq -\cos(1^0)$, ou seja, a afirmação é falsa.

6.2 Multiplicação de arcos

Um caso particular importante ocorre quando, nas fórmulas de adição de arcos, tem-se a = b. Neste caso, vem:

$$\text{sen}(2 \cdot a) = \text{sen}(a + a) = \text{sen}a \cdot \cos a + \cos a \cdot \text{sen}a = 2 \cdot \text{sen}a \cos a$$

$$\cos(2 \cdot a) = \cos(a + a) = \cos a \cdot \cos a - \text{sen}a \cdot \text{sen}a = \cos^2 a - \text{sen}^2 a$$

$$\text{tg}(2 \cdot a) = \text{tg}(a + a) = \frac{\text{tga} + \text{tga}}{1 - \text{tga} \cdot \text{tga}} = \frac{2 \cdot \text{tga}}{1 - \text{tg}^2 a}$$

Conseqüências importantes:

1) $\cos(2\cdot a)=\cos^2 a-\text{sen}^2 a=1-\text{sen}^2 a-\text{sen}^2 a=1-2\cdot\text{sen}^2 a$

Assim, tem-se:

$$\text{sen}^2 a=\frac{1-\cos(2\cdot a)}{2}.$$

2) $\cos(2\cdot a)=\cos^2 a-\text{sen}^2 a=\cos^2 a-(1-\cos^2 a)=2\cdot\cos^2 a-1$

Então:

$$\cos^2 a=\frac{1+\cos(2\cdot a)}{2}.$$

Exercícios:

1) Calcular $\text{sen}(3\cdot a)$, $\cos(3\cdot a)$ e $\text{tg}(3\cdot a)$.

$$\text{sen}(3\cdot a)=\text{sen}(2\cdot a+a)=\text{sen}(2\cdot a)\cdot\cos a+\cos(2\cdot a)\cdot\text{sena}=$$
$$=2\cdot\text{sena}\cdot\cos a\cdot\cos a+\text{sena}\cdot(\cos^2 a-\text{sen}^2 a)=$$
$$=2\cdot\text{sena}\cdot\cos^2 a+\text{sena}\cdot\cos^2 a-\text{sen}^3 a=$$
$$=3\cdot\text{sena}\cdot\cos^2 a-\text{sen}^3 a=3\cdot\text{sena}\cdot(1-\text{sen}^2 a)-\text{sen}^3 a=$$
$$=3\cdot\text{sena}-3\cdot\text{sen}^3 a-\text{sen}^3 a$$
$$\therefore\text{sen}(3\cdot a)=3\cdot\text{sena}-4\cdot\text{sen}^3 a$$

$$\cos(3\cdot a)=\cos(2\cdot a+a)=\cos(2\cdot a)\cdot\cos a-\text{sen}(2\cdot a)\cdot\text{sena}=$$
$$=(\cos^2 a-\text{sen}^2 a)\cdot\cos a-2\cdot\text{sena}\cdot\cos a\cdot\text{sena}=$$
$$=\cos^3 a-(1-\cos^2 a)\cdot\cos a-2\cdot\cos a\cdot(1-\cos^2 a)=$$
$$=\cos^3 a-3\cdot\cos a+3\cdot\cos^3 a$$
$$\therefore\cos(3\cdot a)=4\cdot\text{sen}^3 a-3\cdot\cos a$$

$$\text{tg}(3\cdot a)=\text{tg}(2\cdot a+a)=\frac{\text{tg}(2\cdot a)+\text{tga}}{1-\text{tg}(2\cdot a)\cdot\text{tga}}=\frac{\dfrac{2\cdot\text{tga}}{1-\text{tg}^2 a}+\text{tga}}{1-\dfrac{2\cdot\text{tga}}{1-\text{tg}^2 a}\cdot\text{tga}}=$$

$$=\frac{2\cdot tga+tga-tg^3a}{1-tg^2a-2\cdot tg^2a}$$

$$\therefore tg(3\cdot a)=\frac{3\cdot tga-tg^3a}{1-3\cdot tg^2a}$$

2) Calcule $sen(2\cdot x)$, sabendo que $senx-\cos x=\frac{1}{5}$.

<u>1ª forma</u>: tem-se:

$$(senx-\cos x)^2=\frac{1}{25}\Rightarrow sen^2x-2\cdot senx\cdot\cos x+\cos^2 x=\frac{1}{25}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1-2\cdot senx\cdot\cos x=\frac{1}{25}\Rightarrow 1-sen(2\cdot x)=\frac{1}{25}\Rightarrow sen(2\cdot x)=\frac{24}{25}$$

<u>2ª forma</u>: resolve-se o sistema:

$$\begin{cases} senx-\cos x=\dfrac{1}{5} \\ \cos^2 x+sen^2x=1 \end{cases}.$$

Da primeira equação, tem-se que $senx=\cos x+\frac{1}{5}$; substituindo na segunda, vem:

$$\cos^2 x+\cos^2 x+\frac{2}{5}\cdot\cos x+\frac{1}{25}=1,$$

ou seja, tem-se uma equação do 2º grau na variável $\cos x$:

$$2\cdot\cos^2 x+\frac{2}{5}\cdot\cos x-\frac{24}{25}=0 \text{ ou } 50\cdot\cos^2 x+10\cdot\cos x-24=0.$$

A resolução dessa equação resulta em:

$$\cos x=-\frac{4}{5} \text{ ou } \cos x=\frac{3}{5}.$$

Se $\cos x=-\frac{4}{5}$, tem-se que $senx=-\frac{4}{5}+\frac{1}{5}=-\frac{3}{5}$;

se $\cos x=\frac{3}{5}$, tem-se que $senx=\frac{3}{5}+\frac{1}{5}=\frac{4}{5}$.

Da primeira solução, vem:

$$sen(2\cdot x)=2\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)\cdot\left(-\frac{4}{5}\right)=\frac{24}{25};$$

da segunda solução, vem:

$$\operatorname{sen}(2 \cdot x) = 2 \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{24}{25},$$

que é a solução encontrada na primeira forma de resolução.

3) A Figura 3 mostra um arco $\overset{\frown}{AM}$ do ciclo trigonométrico, de medida **a**. Determinar:

(a) $\operatorname{sen}(2 \cdot a)$

(b) $\cos(2 \cdot a)$

(c) em que quadrante está a extremidade do arco de medida $(2 \cdot a)$

(d) $\operatorname{sen}(3 \cdot a)$

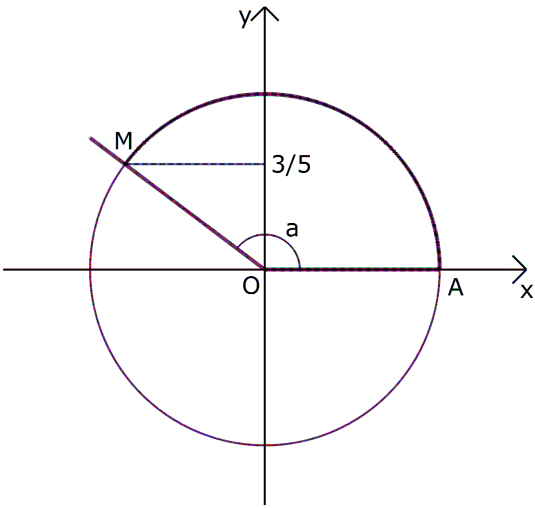

FIGURA 3

(a) $\operatorname{sen}(2 \cdot a) = 2 \cdot \operatorname{sen} a \cdot \cos a$

De acordo com a Figura 3, tem-se que $\operatorname{sen} a = \frac{3}{5}$, sendo **a** um arco do 2º quadrante; então:

$$\cos^2 a = 1 - \operatorname{sen}^2 a = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25} \Rightarrow \cos a = -\frac{4}{5}.$$

Assim, vem:

$$\operatorname{sen}(2 \cdot a) = 2 \cdot \frac{3}{5} \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) = -\frac{24}{25}.$$

(b) $\cos(2\cdot a)=\cos^2 a-\text{sen}^2 a=\dfrac{16}{25}-\dfrac{9}{25}=\dfrac{7}{25}$

(c) De acordo com os resultados encontrados em (a) e (b), tem-se que $\text{sen}(2\cdot a)<0$ e $\cos(2\cdot a)>0$. Conclui-se, assim, que o arco de medida $(2\cdot a)$ tem extremidade no 4º quadrante.

(d) Conforme se viu anteriormente, tem-se:

$\text{sen}(3\cdot a)=3\cdot\text{sen}a-4\cdot\text{sen}^3 a$

Então:

$$\text{sen}(3\cdot a)=3\cdot\frac{3}{5}-4\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^3=\frac{9}{5}-\frac{108}{125}=\frac{225-108}{125}=\frac{117}{125}\ .$$

6.3 Exercícios

1) Sabendo que $\text{tg}\left(\dfrac{a}{2}\right)=2-\sqrt{3}$, calcular:

(a) $\text{sen}(2\cdot a)$

Tem-se que $\text{sen}(2\cdot a)=2\cdot\text{sen}a\cdot\cos a$; então, usando as expressões de sena e cosa em função de $\text{tg}\left(\dfrac{a}{2}\right)$, vem:

$$\text{sen}a=\frac{2\cdot\text{tg}\left(\frac{a}{2}\right)}{1+\text{tg}^2\left(\frac{a}{2}\right)}=\frac{2\cdot\left(2-\sqrt{3}\right)}{1+\left(2-\sqrt{3}\right)^2}=\frac{4-2\cdot\sqrt{3}}{1+4-4\cdot\sqrt{3}+3}=\frac{4-2\cdot\sqrt{3}}{8-4\cdot\sqrt{3}}=$$

$$=\frac{2-\sqrt{3}}{4-2\cdot\sqrt{3}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2-\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}=\frac{1}{2}$$

$$\cos a=\frac{1-\text{tg}^2\left(\frac{a}{2}\right)}{1+\text{tg}^2\left(\frac{a}{2}\right)}=\frac{1-\left(2-\sqrt{3}\right)^2}{1+\left(2-\sqrt{3}\right)^2}=\frac{1-\left(4-4\cdot\sqrt{3}+3\right)}{1+4-4\cdot\sqrt{3}+3}=$$

$$=\frac{-6+4\cdot\sqrt{3}}{8-4\cdot\sqrt{3}}=\frac{-2\cdot\left(3-2\cdot\sqrt{3}\right)}{4\cdot\left(2-\sqrt{3}\right)}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{3-2\cdot\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}=$$

$$=-\frac{1}{2}\cdot\frac{3-2\cdot\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}\cdot\frac{2+\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{6+3\cdot\sqrt{3}-4\cdot\sqrt{3}-6}{4-3}=$$

$$=-\frac{1}{2}\cdot\left(-\sqrt{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Portanto, vem:

$$\operatorname{sen}(2\cdot a)=2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\ .$$

(b) $\cos(2\cdot a)$

Aqui, tem-se:

$$\cos(2\cdot a)=\cos^2 a-\operatorname{sen}^2 a\ ;$$

então:

$$\cos(2\cdot a)=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{4}-\frac{1}{4}=\frac{1}{2}\ .$$

2) Demonstre as identidades trigonométricas:

(a) $\sec(2\cdot x)=\dfrac{\operatorname{cossec}^2 x}{\operatorname{cotg}^2 x-1}$

Partindo do 2º membro, tem-se:

$$\frac{\operatorname{cossec}^2 x}{\operatorname{cotg}^2 x-1}=\frac{\operatorname{cotg}^2 x+1}{\operatorname{cotg}^2 x-1}=\frac{1+\dfrac{1}{\operatorname{cotg}^2 x}}{1-\dfrac{1}{\operatorname{cotg}^2 x}}=\frac{1+\operatorname{tg}^2 x}{1-\operatorname{tg}^2 x}=$$

$$=\frac{1}{\dfrac{1-\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x}}=\frac{1}{\cos(2\cdot x)}=\sec(2\cdot x)$$

(b) $1+\dfrac{2\cdot\operatorname{sen}x-\operatorname{sen}(2\cdot x)}{2\cdot\operatorname{sen}x+\operatorname{sen}(2\cdot x)}=\sec^2\left(\dfrac{x}{2}\right)$

Partindo do 1º membro, vem:

$$1+\frac{2\cdot\operatorname{sen}x-\operatorname{sen}(2\cdot x)}{2\cdot\operatorname{sen}x+\operatorname{sen}(2\cdot x)}=\frac{2\cdot\operatorname{sen}x+\operatorname{sen}(2\cdot x)+2\cdot\operatorname{sen}x-\operatorname{sen}(2\cdot x)}{2\cdot\operatorname{sen}x+\operatorname{sen}(2\cdot x)}=$$

$$=\frac{4\cdot \operatorname{sen}x}{2\cdot \operatorname{sen}x+\operatorname{sen}(2\cdot x)}=\frac{4\cdot \operatorname{sen}x}{2\cdot \operatorname{sen}x+2\cdot \operatorname{sen}x\cdot \cos x}=$$

$$=\frac{4\cdot \operatorname{sen}x}{2\cdot \operatorname{sen}x\cdot(1+\cos x)}=\frac{2}{1+\cos x}=\frac{1}{\frac{1+\cos x}{2}}=\frac{1}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}=\sec^2\left(\frac{x}{2}\right)$$

3) Calcular $\operatorname{sen}(15^{o})$ e $\cos(15^{o})$.

Ao invés de se utilizar as fórmulas de adição de arcos, podem-se u-sar as fórmulas do arco metade, como segue:

$$\operatorname{sen}(15^{o})=\operatorname{sen}\left(\frac{30^{o}}{2}\right)=\sqrt{\frac{1-\cos(30^{o})}{2}}=\sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$$

$$\cos(15^{o})=\cos\left(\frac{30^{o}}{2}\right)=\sqrt{\frac{1+\cos(30^{o})}{2}}=\sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$$

4) Dado que $\operatorname{sen}x=\frac{5}{13}$, com $0<x<\frac{\pi}{2}$, calcular $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{x}{2}\right)$.

Como $0<x<\frac{\pi}{2}$, segue-se que $0<\frac{x}{2}<\frac{\pi}{4}$. Assim, o arco $\left(\frac{\pi}{2}+\frac{x}{2}\right)$ pertence ao 2º quadrante; então:

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{x}{2}\right)=\operatorname{sen}\left(\pi-\left(\frac{\pi}{2}+\frac{x}{2}\right)\right)=\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{x}{2}\right)=\cos\left(\frac{x}{2}\right)=\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$$

Tem-se:

$$\operatorname{sen}x=\frac{5}{13}\Rightarrow \cos^2 x=1-\frac{25}{169}=\frac{144}{169}\therefore \cos x=\frac{12}{13};$$

então, vem:

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{x}{2}\right)=\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}=\sqrt{\frac{1+\frac{12}{13}}{2}}=\sqrt{\frac{\frac{25}{13}}{2}}=\sqrt{\frac{25}{26}}=\frac{5}{\sqrt{26}}=$$

$$=\frac{5}{\sqrt{26}}\cdot\frac{\sqrt{26}}{\sqrt{26}}=\frac{5\cdot\sqrt{26}}{26}.$$

Exercícios propostos:

1) Demonstrar que $\operatorname{cossec} a = \operatorname{cotg}\left(\frac{a}{2}\right) - \operatorname{cotg} a$.

2) Demonstre a identidade trigonométrica:

$$\operatorname{cotg}(2 \cdot x) + \operatorname{cossec}(2 \cdot x) = \operatorname{cotg}\left(\frac{x}{2}\right) - \operatorname{cossec} x$$

3) Sabendo que $0 < a < \frac{\pi}{2}$, calcule $\operatorname{tg}\left(\frac{a}{2}\right) + \operatorname{cotg}\left(\frac{a}{2}\right)$ em função de funções trigonométricas do arco **a**.

$$\left(\text{R.: } \operatorname{tg}\left(\frac{a}{2}\right) + \operatorname{cotg}\left(\frac{a}{2}\right) = 2 \cdot \operatorname{cossec} a\right)$$

6.4 Transformação de soma em produto

Já se conhecem as fórmulas de adição e subtração de arcos. Combinando, de maneira conveniente, as fórmulas de seno e cosseno desses arcos, podem-se transformar alguns tipos de somas em produtos, obtendo fórmulas que são úteis em certos casos de equações trigonométricas, entre outras aplicações. Têm-se:

(1) $\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \cdot \cos b + \cos a \cdot \operatorname{sen} b$

(2) $\operatorname{sen}(a-b) = \operatorname{sen} a \cdot \cos b - \cos a \cdot \operatorname{sen} b$

(3) $\cos(a+b) = \cos a \cdot \cos b - \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b$

(4) $\cos(a-b) = \cos a \cdot \cos b + \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b$

Efetuam-se as operações:

(1) + (2): $\operatorname{sen}(a+b) + \operatorname{sen}(a-b) = 2 \cdot \operatorname{sen} a \cdot \cos b$

(1) – (2): $\operatorname{sen}(a+b) - \operatorname{sen}(a-b) = 2 \cdot \cos a \cdot \operatorname{sen} b$

(3) + (4): $\cos(a+b) + \cos(a-b) = 2 \cdot \cos a \cdot \cos b$

(3) – (4): $\cos(a+b) - \cos(a-b) = -2 \cdot \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b$

Fazendo:

$$\begin{cases} a+b=p \\ a-b=q \end{cases},$$

vem:

$$\begin{cases} a = \dfrac{p+q}{2} \\ b = \dfrac{p-q}{2} \end{cases}.$$

Então:

$$\operatorname{sen} p + \operatorname{sen} q = 2 \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{p+q}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\operatorname{sen} p - \operatorname{sen} q = 2 \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{p-q}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{p+q}{2}\right)$$

$$\cos p + \cos q = 2 \cdot \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\cos p - \cos q = -2 \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{p+q}{2}\right) \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

Essas quatro fórmulas permitem transformar as expressões dos tipos $\operatorname{sen} p \pm \operatorname{sen} q$ e $\cos p \pm \cos q$ em produtos. Quando se tratar da soma ou diferença de um seno e um cosseno, pode-se recair em uma das expressões anteriores substituindo-se pelo seno ou cosseno do arco complementar.

Exercícios:

1) Transformar em produto, sendo **x** um arco do $1^{\underline{o}}$ quadrante:

(a) $A = \operatorname{sen}(4 \cdot x) + \operatorname{sen}(6 \cdot x)$

Aqui, tem-se $4 \cdot x = p\,4.x = p$ e $6 \cdot x = q$; então:

$$A = \operatorname{sen}(4 \cdot x) + \operatorname{sen}(6 \cdot x) = 2 \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{4 \cdot x + 6 \cdot x}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{4 \cdot x - 6 \cdot x}{2}\right) =$$

$$= 2 \cdot \operatorname{sen}(5 \cdot x) \cdot \cos(-x) = 2 \cdot \operatorname{sen}(5 \cdot x) \cdot \cos x$$

(b) $y = \operatorname{sen}(2 \cdot x) - 1$

<u>1^{a} forma</u>: escreve-se:

$$y = \operatorname{sen}(2 \cdot x) - \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right).$$

Então:

$$y=\operatorname{sen}(2\cdot x)-\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)=2\cdot\operatorname{sen}\left(\frac{2\cdot x-\frac{\pi}{2}}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{2\cdot x+\frac{\pi}{2}}{2}\right)=$$

$$=2\cdot\operatorname{sen}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\cdot\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=2\cdot\operatorname{sen}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\cdot\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-x-\frac{\pi}{4}\right)=$$

$$=2\cdot\operatorname{sen}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\cdot\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=-2\cdot\operatorname{sen}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\cdot\operatorname{sen}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=$$

$$=-2\cdot\operatorname{sen}^2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$$

<u>2ª forma</u>: pode-se escrever:

$$y=\operatorname{sen}(2\cdot x)+(-1)=\operatorname{sen}(2\cdot x)+\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right).$$

Assim, vem:

$$y=\operatorname{sen}(2\cdot x)+\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\operatorname{sen}(2\cdot x)-\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)=1^{\text{a}}\ \text{forma}$$

<u>3ª forma</u>: escreve-se:

$$y=\operatorname{sen}(2\cdot x)+(-1)=\operatorname{sen}(2\cdot x)+\operatorname{sen}\left(\frac{3\cdot\pi}{2}\right).$$

Então:

$$y=\operatorname{sen}(2\cdot x)+\operatorname{sen}\left(\frac{3\cdot\pi}{2}\right)=2\cdot\operatorname{sen}\left(\frac{2\cdot x+\frac{3\cdot\pi}{2}}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{2\cdot x-\frac{3\cdot\pi}{2}}{2}\right)=$$

$$=2\cdot\operatorname{sen}\left(x+\frac{3\cdot\pi}{4}\right)\cdot\cos\left(x-\frac{3\cdot\pi}{4}\right)$$

Se $0<x<\frac{\pi}{2}$, então $\frac{3\cdot\pi}{4}<x+\frac{3\cdot\pi}{4}<\frac{\pi}{2}+\frac{3\cdot\pi}{4}$, ou seja, $\frac{3\cdot\pi}{4}<x+\frac{3\cdot\pi}{4}<\frac{5\cdot\pi}{4}$. Assim, o arco $\left(x+\frac{3\cdot\pi}{4}\right)$ pode pertencer ao 2º ou ao 3º quadrante.

Se $\left(x+\frac{3\cdot\pi}{4}\right)$ pertence ao 2º quadrante, vem:

$$\operatorname{sen}\left(x+\frac{3\cdot\pi}{4}\right)=\operatorname{sen}\left(\pi-x-\frac{3\cdot\pi}{4}\right)=\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=-\operatorname{sen}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$$

Se $\left(x+\frac{3\cdot\pi}{4}\right)$ pertence ao 3º quadrante, vem:

$$\operatorname{sen}\left(x+\frac{3\cdot\pi}{4}\right)=-\operatorname{sen}\left(x+\frac{3\cdot\pi}{4}-\pi\right)=-\operatorname{sen}\left(x-\frac{\pi}{4}\right).$$

Logo, independentemente do arco estar no 2º ou ao 3º quadrante, tem-se que

$$\operatorname{sen}\left(x+\frac{3\cdot\pi}{4}\right)=-\operatorname{sen}\left(x-\frac{\pi}{4}\right).$$

Por outro lado, tem-se:

$$\cos\left(x-\frac{3\cdot\pi}{4}\right)=\cos\left(\frac{3\cdot\pi}{4}-x\right)=\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\left(\frac{3\cdot\pi}{4}-x\right)\right)=$$

$$=\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{4}+x\right)=\operatorname{sen}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$$

Assim, a expressão dada inicialmente fica:

$$y=2\cdot\operatorname{sen}\left(x+\frac{3\cdot\pi}{4}\right)\cdot\cos\left(x-\frac{3\cdot\pi}{4}\right)=$$

$$=-2\cdot\operatorname{sen}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\cdot\operatorname{sen}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=-2\cdot\operatorname{sen}^2\left(x-\frac{\pi}{4}\right),$$

como se havia obtido nas duas formas anteriores de resolução.

(c) $y=\operatorname{sen}(7\cdot a)+2\cdot\operatorname{sen}(3\cdot a)-\operatorname{sen}a$

Pode-se escrever:

$$y=[\operatorname{sen}(7\cdot a)+\operatorname{sen}(3\cdot a)]+[\operatorname{sen}(3\cdot a)-\operatorname{sen}a]=$$

$$=2\cdot\operatorname{sen}\left(\frac{7\cdot a+3\cdot a}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{7\cdot a-3\cdot a}{2}\right)+2\cdot\operatorname{sen}\left(\frac{3\cdot a-a}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{3\cdot a+a}{2}\right)=$$

$$=2\cdot\operatorname{sen}(5\cdot a)\cdot\cos(2\cdot a)+2\cdot\operatorname{sen}(a)\cdot\cos(2\cdot a)=$$

$$=2\cdot\cos(2\cdot a)\cdot[\operatorname{sen}(5\cdot a)+\operatorname{sen}(a)]=$$

$$=2\cdot\cos(2\cdot a)\cdot 2\cdot\operatorname{sen}\left(\frac{5\cdot a+a}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{5\cdot a-a}{2}\right)=$$

$$=4\cdot\cos(2\cdot a)\cdot\operatorname{sen}(3\cdot a)\cdot\cos(2\cdot a)=4\cdot\cos^2(2\cdot a)\cdot\operatorname{sen}(3\cdot a)$$

2) Transformar as expressões seguintes em outras equivalentes, u-

sando as fórmulas de transformação de soma em produto:

(a) $y = \dfrac{\text{sen}a + \text{sen}b}{\text{sen}a - \text{sen}b}$

$$y = \frac{2 \cdot \text{sen}\left(\dfrac{a+b}{2}\right) \cdot \cos\left(\dfrac{a-b}{2}\right)}{2 \cdot \text{sen}\left(\dfrac{a-b}{2}\right) \cdot \cos\left(\dfrac{a+b}{2}\right)} = \frac{\text{sen}\left(\dfrac{a+b}{2}\right)}{\cos\left(\dfrac{a+b}{2}\right)} \cdot \frac{\cos\left(\dfrac{a-b}{2}\right)}{\text{sen}\left(\dfrac{a-b}{2}\right)} =$$

$$= \text{tg}\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot \cot g\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

(b) $y = \text{sen}A + \text{sen}B + \text{sen}C - \text{sen}(A+B+C)$

Tem-se:

$$\text{sen}A + \text{sen}B = 2 \cdot \text{sen}\left(\frac{A+B}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

$$\text{sen}C - \text{sen}(A+B+C) =$$

$$= 2 \cdot \text{sen}\left(\frac{C-(A+B+C)}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{C+(A+B+C)}{2}\right) =$$

$$= 2 \cdot \text{sen}\left(-\frac{A+B}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{A+B+2 \cdot C}{2}\right) =$$

$$= -2 \cdot \text{sen}\left(\frac{A+B}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{A+B+2 \cdot C}{2}\right)$$

Então, vem:

$$y = 2 \cdot \text{sen}\left(\frac{A+B}{2}\right) \cdot \left[\cos\left(\frac{A-B}{2}\right) - \cos\left(\frac{A+B+2 \cdot C}{2}\right)\right] =$$

$$= 2 \cdot \text{sen}\left(\frac{A+B}{2}\right) \cdot (-2) \cdot \text{sen}\left(\frac{\dfrac{A-B}{2} + \dfrac{A+B+2 \cdot C}{2}}{2}\right) \cdot \text{sen}\left(\frac{\dfrac{A-B}{2} - \dfrac{A+B+2 \cdot C}{2}}{2}\right) =$$

$$= -4 \cdot \text{sen}\left(\frac{A+B}{2}\right) \cdot \text{sen}\left(\frac{A+C}{2}\right) \cdot \text{sen}\left(-\frac{B+C}{2}\right) =$$

$$= 4 \cdot \text{sen}\left(\frac{A+B}{2}\right) \cdot \text{sen}\left(\frac{A+C}{2}\right) \cdot \text{sen}\left(\frac{B+C}{2}\right)$$

(c) $y = \text{sen}(70^{o}) - \cos(60^{o})$

<u>1ª forma</u>:

$$y=\operatorname{sen}(70^\circ)-\operatorname{sen}(90^\circ-60^\circ)=\operatorname{sen}(70^\circ)-\operatorname{sen}(30^\circ)=$$

$$=2\cdot\operatorname{sen}\left(\frac{70^\circ-30^\circ}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{70^\circ+30^\circ}{2}\right)=2\cdot\operatorname{sen}(20^\circ)\cdot\cos(50^\circ)$$

<u>2ª forma</u>:

$$y=\cos(90^\circ-70^\circ)-\cos(60^\circ)=\cos(20^\circ)-\cos(60^\circ)=$$

$$=-2\cdot\operatorname{sen}\left(\frac{20^\circ+60^\circ}{2}\right)\cdot\operatorname{sen}\left(\frac{20^\circ-60^\circ}{2}\right)=$$

$$=-2\cdot\operatorname{sen}(40^\circ)\cdot\operatorname{sen}(-20^\circ)=$$

$$=2\cdot\operatorname{sen}(40^\circ)\cdot\operatorname{sen}(20^\circ)=2\cdot\operatorname{sen}(20^\circ)\cdot\cos(90^\circ-40^\circ)=$$

$$=2\cdot\operatorname{sen}(20^\circ)\cdot\cos(50^\circ)$$

(d) $y=2\cdot\operatorname{sen}x+\dfrac{1}{\cos x}$

$$y=\frac{2\cdot\operatorname{sen}x\cdot\cos x+1}{\cos x}=\frac{\operatorname{sen}(2\cdot x)+1}{\cos x}=$$

$$=\frac{1}{\cos x}\cdot\left(\operatorname{sen}(2\cdot x)+\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{\cos x}\cdot 2\cdot\operatorname{sen}\left(\frac{2\cdot x+\frac{\pi}{2}}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{2\cdot x-\frac{\pi}{2}}{2}\right)=$$

$$=\frac{1}{\cos x}\cdot 2\cdot\operatorname{sen}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\cdot\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=$$

$$=\frac{1}{\cos x}\cdot 2\cdot\operatorname{sen}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=$$

$$=\frac{1}{\cos x}\cdot 2\cdot\operatorname{sen}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\cdot\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{\cos x}\cdot 2\cdot\operatorname{sen}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\cdot\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{\cos x} \cdot \operatorname{sen}^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{2 \cdot \operatorname{sen}^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}{\cos x}$$

3) Transformar $N = 2 \cdot \operatorname{sen}(6 \cdot x) \cdot \cos x$ em uma soma ou diferença de funções trigonométricas.

<u>1ª forma</u>: faz-se

$$\begin{cases} \dfrac{p+q}{2} = 6 \cdot x \\ \dfrac{p-q}{2} = x \end{cases},$$

de onde vem que $p = 7 \cdot x$ e $q = 5 \cdot x$. Então:

$$N = 2 \cdot \operatorname{sen}(6 \cdot x) \cdot \cos x = \operatorname{sen}(7 \cdot x) + \operatorname{sen}(5 \cdot x)$$

<u>2ª forma</u>: faz-se

$$\begin{cases} \dfrac{p-q}{2} = 6 \cdot x \\ \dfrac{p+q}{2} = x \end{cases},$$

de onde vem que $p = 7 \cdot x$ e $q = -5 \cdot x$. Então:

$$N = 2 \cdot \operatorname{sen}(6 \cdot x) \cdot \cos x = \operatorname{sen}(7 \cdot x) - \operatorname{sen}(-5 \cdot x) = \operatorname{sen}(7 \cdot x) + \operatorname{sen}(5 \cdot x)$$

4) Calcular o valor numérico da expressão:

$$y = 2 \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{7 \cdot \pi}{12}\right) \cdot \cos\left(\frac{5 \cdot \pi}{12}\right).$$

Fazendo

$$\begin{cases} \dfrac{p+q}{2} = \dfrac{7 \cdot \pi}{12} \\ \dfrac{p-q}{2} = \dfrac{5 \cdot \pi}{12} \end{cases},$$

obtêm-se $p = \pi$ e $q = \frac{\pi}{6}$. Assim:

$$y = 2 \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{7 \cdot \pi}{12}\right) \cdot \cos\left(\frac{5 \cdot \pi}{12}\right) = \operatorname{sen}(\pi) + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Exercícios propostos:

1) Transformar em produto, sendo **x** um arco do 1º quadrante:

(a) $A = 1 + \cos x$ $\left(R.: A = 2 \cdot \cos^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)$

(b) $N = \operatorname{sen} x - \cos x$ $\left(R.: N = \sqrt{2} \cdot \operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right)$

2) Transformar a expressão $y = \operatorname{sen} a + \operatorname{sen} b + \operatorname{sen}(a + b)$ em outra equivalente, usando as fórmulas de transformação de soma em produto.

$$\left(R.: y = 4 \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{a}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{b}{2}\right)\right)$$

3) Transformar $N = -2 \cdot \operatorname{sen}(4 \cdot x) \cdot \operatorname{sen}(2 \cdot x)$ em uma soma ou diferença de funções trigonométricas. $(R.: N = \cos(6 \cdot x) - \cos(2 \cdot x))$

4) Calcular o valor numérico das expressões:

(a) $y = \operatorname{sen}\left(\frac{13 \cdot \pi}{12}\right) \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{7 \cdot \pi}{12}\right)$ $\left(R.: y = -\frac{1}{4}\right)$

(b) $y = \cos\left(\frac{7 \cdot \pi}{12}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ $\left(R.: y = -\frac{1}{4}\right)$

7 EQUAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

São equações nas quais a incógnita faz parte do arco de alguma função trigonométrica. Exemplos:

1) $\operatorname{sen} x = \operatorname{sen}\left(2 \cdot x - \frac{\pi}{4}\right)$

2) $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$

Resolver uma equação desse tipo significa encontrar os valores de **x**, caso existam, que a tornem uma sentença numérica verdadeira. Esses valores dos arcos (ou ângulos) que verificam uma equação trigonométrica chamam-se soluções da equação.

Como a um determinado valor de uma função circular corresponde uma infinidade de valores do arco, toda equação trigonométrica tem infinitas soluções, a menos que haja condições para a equação.

Não existe um método único para resolver todas as equações trigonométricas. Entretanto, a maioria delas pode ser transformada, por meio das relações já vistas, em outras mais simples, equivalentes, de mesma solução. Grande parte das equações trigonométricas pode ser solucionada resolvendo-se as equações fundamentais, indicadas a seguir:

(1) $\operatorname{sen} x = \operatorname{sen} a$

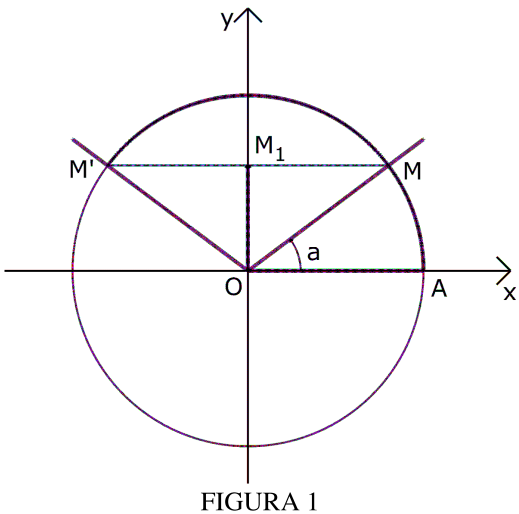

FIGURA 1

Considere-se, no ciclo trigonométrico, um arco orientado $\overset{\frown}{AM}$, de medida **a**. Todos os arcos de extremidade M possuem o mesmo seno do arco de medida **a**. Também possuem o mesmo seno de **a** todos os arcos de extremidade M', simétrico de M em relação ao eixo dos senos (Figura 1).
Então:

$$\operatorname{sen}x = \operatorname{sen}a \Leftrightarrow \begin{cases} x = a + 2 \cdot k \cdot \pi \\ \text{ou} \\ x = \pi - a + 2 \cdot k \cdot \pi \end{cases} ;\forall\ k \in Z.$$

Exemplos:

1) $\operatorname{sen}x = \dfrac{1}{2}$

Pode-se escrever:

$$\operatorname{sen}x = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{6} + 2 \cdot k \cdot \pi \\ \text{ou} \\ x = \pi - \dfrac{\pi}{6} + 2 \cdot k \cdot \pi \Rightarrow x = \dfrac{5 \cdot \pi}{6} + 2 \cdot k \cdot \pi \end{cases} ;\ \forall\ k \in Z$$

Logo, a solução da equação dada é:

$$S = \left\{ x \in R \,/\, x = \frac{\pi}{6} + 2 \cdot k \cdot \pi \text{ ou } x = \frac{5 \cdot \pi}{6} + 2 \cdot k \cdot \pi;\ \forall\ k \in Z \right\}.$$

2) $\operatorname{sen}x = -1$

Para todo $k \in Z$, a equação pode ser escrita na forma:

$$\operatorname{sen}x = \operatorname{sen}\left(\frac{3 \cdot \pi}{2}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{3 \cdot \pi}{2} + 2 \cdot k \cdot \pi \\ \text{ou} \\ x = \pi - \dfrac{3 \cdot \pi}{2} + 2 \cdot k \cdot \pi \Rightarrow x = -\dfrac{\pi}{2} + 2 \cdot k \cdot \pi \end{cases}$$

Os arcos $\dfrac{3 \cdot \pi}{2}$ e $-\dfrac{\pi}{2}$ têm a mesma extremidade no ciclo trigonométrico e, portanto, ambas as soluções são iguais. Logo, a solução da equação dada é:

$$S=\left\{x\in R \,/\, x=\frac{3\cdot\pi}{2}+2\cdot k\cdot\pi;\ \forall\ k\in Z\right\}.$$

3) $\operatorname{sen}(2\cdot x)=\operatorname{sen}x$

Aqui, tem-se:

$$\begin{cases}2\cdot x=x+2\cdot k\cdot\pi\\ \text{ou}\\ 2\cdot x=\pi-x+2\cdot k\cdot\pi\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=2\cdot k\cdot\pi\\ \text{ou}\\ 3\cdot x=\pi+2\cdot k\cdot\pi\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=2\cdot k\cdot\pi\\ \text{ou}\\ x=\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{2\cdot k\cdot\pi}{3}\end{cases}$$

$$\therefore S=\left\{x\in R \,/\, x=2\cdot k\cdot\pi\ \text{ ou }\ x=\frac{\pi}{3}+\frac{2\cdot k\cdot\pi}{3};\ \forall\ k\in Z\right\}.$$

Para se conhecerem algumas soluções particulares da equação dada, basta que se atribuam valores inteiros a **k**, como segue:

• da solução $x=2\cdot k\cdot\pi$ obtêm-se, por exemplo, as soluções:

$k=0\Rightarrow x=0$

$k=1\Rightarrow x=2\cdot\pi$

$k=-1\Rightarrow x=-2\cdot\pi$

$\vdots$

• da solução $x=\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{2\cdot k\cdot\pi}{3}$ obtêm-se, por exemplo, as soluções:

$k=0\Rightarrow x=\dfrac{\pi}{3}$

$k=1\Rightarrow x=\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{2\cdot\pi}{3}=\pi$

$k=2\Rightarrow x=\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{4\cdot\pi}{3}=\dfrac{5\cdot\pi}{3}$

$k=-1\Rightarrow x=\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{2\cdot\pi}{3}=-\dfrac{\pi}{3}$

$k=-2\Rightarrow x=\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{4\cdot\pi}{3}=-\pi$

$\vdots$

4) $2\cdot\operatorname{sen}(3\cdot x)+\sqrt{2}=0$

Nesse caso, pode-se escrever:

$$2 \cdot \text{sen}(3 \cdot x) + \sqrt{2} = 0 \Rightarrow \text{sen}(3 \cdot x) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \text{sen}(3 \cdot x) = \text{sen}\left(-\frac{\pi}{4}\right).$$

Então:

$$\begin{cases} 3 \cdot x = -\dfrac{\pi}{4} + 2 \cdot k \cdot \pi \\ \text{ou} \\ 3 \cdot x = \pi - \left(-\dfrac{\pi}{4}\right) + 2 \cdot k \cdot \pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3 \cdot x = -\dfrac{\pi}{4} + 2 \cdot k \cdot \pi \\ \text{ou} \\ 3 \cdot x = \dfrac{5 \cdot \pi}{4} + 2 \cdot k \cdot \pi \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{\pi}{12} + \dfrac{2 \cdot k \cdot \pi}{3} \\ \text{ou} \\ x = \dfrac{5 \cdot \pi}{12} + \dfrac{2 \cdot k \cdot \pi}{3} \end{cases}$$

$$\therefore S = \left\{ x \in R \,/\, x = -\frac{\pi}{12} + \frac{2 \cdot k \cdot \pi}{3} \;\; \text{ou} \;\; x = \frac{5 \cdot \pi}{12} + \frac{2 \cdot k \cdot \pi}{3};\ \forall\, k \in Z \right\}.$$

5) $\text{sen}x + \cos x = 1$

Aqui, tem-se:

$$\text{sen}x + \cos x = 1 \Rightarrow \cos x = 1 - \text{sen}x \Rightarrow \cos^2 x = 1 - 2 \cdot \text{sen}x + \text{sen}^2 x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 - \text{sen}^2 x = 1 - 2 \cdot \text{sen}x + \text{sen}^2 x \Rightarrow 2 \cdot \text{sen}^2 x - 2 \cdot \text{sen}x = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{sen}x \cdot (\text{sen}x - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \text{sen}x = 0 \;\; (\text{I}) \\ \text{ou} \\ \text{sen}x = 1 \;\; (\text{II}) \end{cases}$$

De (I), vem:

$$\text{sen}x = 0 \Leftrightarrow \text{sen}x = \text{sen}0$$

$$\therefore \begin{cases} x = 0 + 2 \cdot k \cdot \pi \Rightarrow x = 2 \cdot k \cdot \pi \\ \text{ou} \\ x = \pi - 0 + 2 \cdot k \cdot \pi \Rightarrow x = \pi + 2 \cdot k \cdot \pi \Rightarrow x = (2 \cdot k + 1) \cdot \pi \end{cases}$$

De (II), vem:

$$\text{sen}x = 1 \Leftrightarrow \text{sen}x = \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\therefore \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{2} + 2 \cdot k \cdot \pi \\ \text{ou} \\ x = \pi - \dfrac{\pi}{2} + 2 \cdot k \cdot \pi \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + 2 \cdot k \cdot \pi \end{cases}$$

Uma vez que a equação dada inicialmente foi elevada ao quadrado, é preciso verificar se as soluções obtidas a satisfazem. Faz-se, assim, a verificação:

• de $x = 2 \cdot k \cdot \pi$, vem:

$\operatorname{sen}(2 \cdot k \cdot \pi) + \cos(2 \cdot k \cdot \pi) = 0 + 1 = 1$,

ou seja, esta é uma solução da equação dada;

• de $x = (2 \cdot k + 1) \cdot \pi$, vem:

$\operatorname{sen}[(2 \cdot k + 1) \cdot \pi] + \cos[(2 \cdot k + 1) \cdot \pi] = 0 - 1 = -1$,

e, portanto, esta não é solução da equação dada;

• de $x = \dfrac{\pi}{2} + 2 \cdot k \cdot \pi$, vem:

$\operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{2} + 2 \cdot k \cdot \pi\right) + \cos\left(\dfrac{\pi}{2} + 2 \cdot k \cdot \pi\right) = 1 + 0 = 1$,

ou seja, esta também é uma solução da equação dada.

Logo, o conjunto solução da equação é:

$$S = \left\{ x \in R \,/\, x = 2 \cdot k \cdot \pi \text{ ou } x = \dfrac{\pi}{2} + 2 \cdot k \cdot \pi ; k \in Z \right\}.$$

(2) $\cos x = \cos a$

Considere-se, no ciclo trigonométrico, um arco orientado $\overset{\frown}{AM}$, de medida **a**. Todos os arcos de extremidade M possuem o mesmo cosseno do arco de medida **a**, assim como todos os arcos de extremidade M', simétrico de M em relação ao eixo dos cossenos (Figura 2). Então:

$$\cos x = \cos a \Leftrightarrow \begin{cases} x = a + 2 \cdot k \cdot \pi \\ \text{ou} \\ x = 2 \cdot \pi - a + 2 \cdot k \cdot \pi \end{cases} ; \forall\, k \in Z,$$

ou:

$$\cos x = \cos a \Leftrightarrow \begin{cases} x = a + 2 \cdot k \cdot \pi \\ \text{ou} \\ x = -a + 2 \cdot k \cdot \pi \end{cases} ;\forall\ k \in Z\ ,$$

ou, ainda:

$\cos x = \cos a \Leftrightarrow x = \pm a + 2 \cdot k \cdot \pi; \forall\ k \in Z$.

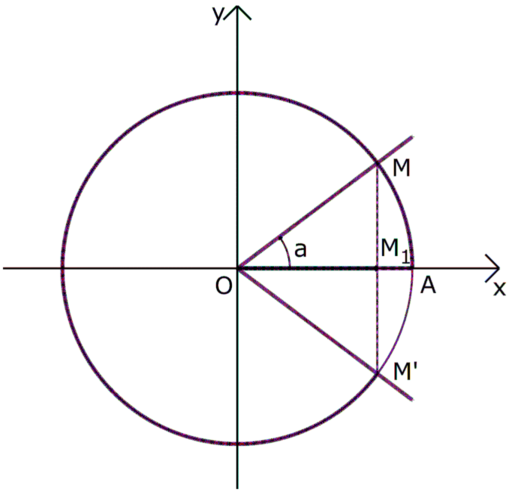

FIGURA 2

Exemplos:

1) $\cos x = -1$

A equação pode ser escrita ma forma:

$\cos x = \cos \pi \Leftrightarrow x = \pm \pi + 2 \cdot k \cdot \pi$

$\therefore\ x = \pi + 2 \cdot k \cdot \pi = (2 \cdot k + 1) \cdot \pi;\ \forall\ k \in Z$

Logo, a solução da equação dada é:

$S = \{x \in R \,/\, x = (2 \cdot k + 1) \cdot \pi;\ \forall\ k \in Z\}$.

2) $\sec x = \sec\left(\frac{2 \cdot \pi}{3}\right)$

Escreve-se:

$$\frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\cos\left(\frac{2 \cdot \pi}{3}\right)} \Rightarrow \cos x = \cos\left(\frac{2 \cdot \pi}{3}\right) \Leftrightarrow x = \pm \frac{2 \cdot \pi}{3} + 2 \cdot k \cdot \pi$$

$$\therefore S = \left\{ x \in R \,/\, x = \pm \frac{2 \cdot \pi}{3} + 2 \cdot k \cdot \pi;\ \forall\ k \in Z \right\}.$$

3) $\operatorname{sen}^2 x = 1 + \cos x$

Da equação dada, vem:

$$1 - \cos^2 x = 1 + \cos x \Rightarrow (1 - \cos x) \cdot (1 + \cos x) = 1 + \cos x \qquad \text{(I)}$$

Há duas possibilidades a considerar:

$$\begin{cases} 1 + \cos x = 0 \\ \text{ou} \\ 1 + \cos x \neq 0 \end{cases}, \text{ ou seja, } \begin{cases} \cos x = -1 \\ \text{ou} \\ \cos x \neq -1 \end{cases}.$$

Se $\cos x = -1$, vem, pelo exemplo 1, que $x = (2 \cdot k + 1) \cdot \pi$.

Se $\cos x \neq -1$, pode-se dividir ambos os membros da equação (I) pela expressão $(1 + \cos x)$ e, portanto, tem-se:

$$1 - \cos x = 1 \Rightarrow \cos x = 0 \Rightarrow \cos x = \cos \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{2} + 2 \cdot k \cdot \pi.$$

A solução $x = \pm \frac{\pi}{2} + 2 \cdot k \cdot \pi$ pode ser escrita na forma $x = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$.

Assim, o conjunto solução da equação é:

$$S = \left\{ x \in R \,/\, x = (2 \cdot k + 1) \cdot \pi \text{ ou } x = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi; k \in Z \right\}.$$

4) $2 \cdot \cos(5 \cdot x) = 1, \text{para } 0 < x < \frac{\pi}{2}$.

Pode-se escrever:

$$\cos(5 \cdot x) = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos(5 \cdot x) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\therefore 5 \cdot x = \pm \frac{\pi}{3} + 2 \cdot k \cdot \pi \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{15} + \dfrac{2 \cdot k \cdot \pi}{5} \\ \text{ou} \\ x = -\dfrac{\pi}{15} + \dfrac{2 \cdot k \cdot \pi}{5} \end{cases}.$$

Para que os arcos provenientes das soluções obtidas satisfaçam a condição inicial, devem-se atribuir valores inteiros a **k**. Assim, vem:

$$k=-1 \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{\pi}{15}-\dfrac{2\cdot\pi}{5}<0 \\ \text{ou} \\ x=-\dfrac{\pi}{15}-\dfrac{2\cdot\pi}{5}<0 \end{cases} \quad \therefore \text{ não serve;}$$

É fácil ver que para todo k < 0, tem-se x < 0, que não satisfaz a condição inicial. Tomam-se, assim, valores não negativos de **k**:

$$k=0 \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{\pi}{15} \text{ (serve)} \\ \text{ou} \\ x=-\dfrac{\pi}{15} \text{ (não serve)} \end{cases}$$

$$k=1 \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{\pi}{15}+\dfrac{2\cdot\pi}{5}=\dfrac{7\cdot\pi}{15} \text{ (serve)} \\ \text{ou} \\ x=-\dfrac{\pi}{15}+\dfrac{2\cdot\pi}{5}=\dfrac{5\cdot\pi}{15}=\dfrac{\pi}{3} \text{ (serve)} \end{cases}$$

$$k=2 \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{\pi}{15}+\dfrac{4\cdot\pi}{5}=\dfrac{13\cdot\pi}{15}>\dfrac{\pi}{2} \text{ (não serve)} \\ \text{ou} \\ x=-\dfrac{\pi}{15}+\dfrac{4\cdot\pi}{5}=\dfrac{11\cdot\pi}{15}>\dfrac{\pi}{2} \text{ (não serve)} \end{cases}.$$

Constata-se, assim, que há apenas três valores de **x** que satisfazem a equação dada, com a condição exigida:

$$S=\left\{\frac{\pi}{15};\frac{7\cdot\pi}{15};\frac{\pi}{3}\right\}.$$

5) $2\cdot\cos^2 x-3\cdot\cos x+1=0$

Tem-se, aqui, uma equação do 2º grau na variável cosx que, resolvida, fornece as soluções:

$$\begin{cases} \cos x=1 \text{ (I)} \\ \text{ou} \\ \cos x=\dfrac{1}{2} \text{ (II)} \end{cases}.$$

De (I), vem:

$\cos x = 1 \Rightarrow \cos x = \cos 0 \Leftrightarrow x = 2 \cdot k \cdot \pi$

De (II), vem:

$\cos x = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \cos x = \cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow x = \pm\dfrac{\pi}{3} + 2 \cdot k \cdot \pi$.

Portanto, tem-se:

$$S = \left\{ x \in R \,/\, x = 2 \cdot k \cdot \pi \text{ ou } x = \pm\frac{\pi}{3} + 2 \cdot k \cdot \pi ; k \in Z \right\}$$

(3) $tgx = tga$

Considere-se, no ciclo trigonométrico, um arco orientado $\overset{\frown}{AM}$, de medida **a**. Todos os arcos de extremidade M possuem a mesma tangente do arco de medida **a**, assim como todos os arcos de extremidade M', simétrico de M em relação ao centro do ciclo (Figura 3).

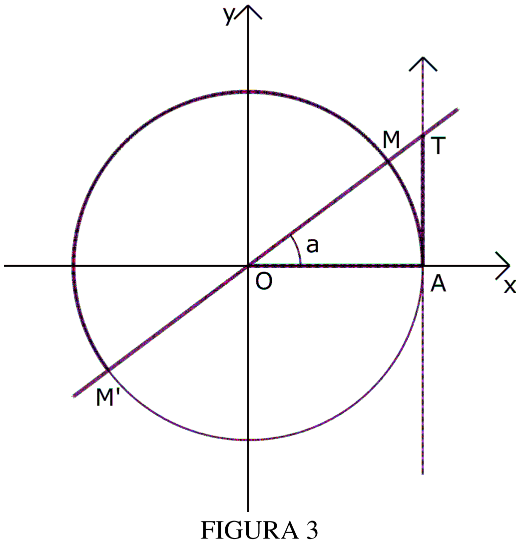

FIGURA 3

Então:

$$tgx = tga \Leftrightarrow \begin{cases} x = a + 2 \cdot k \cdot \pi \\ \text{ou} \\ x = \pi + a + 2 \cdot k \cdot \pi = a + (2 \cdot k + 1) \cdot \pi \end{cases} ; \forall\, k \in Z.$$

As soluções anteriores podem ser escritas em uma só, da seguinte forma:

$\text{tg}x = \text{tg}a \Leftrightarrow x = a + k \cdot \pi; \forall\ k \in Z.$

Exemplos:

1) $\text{tg}(2 \cdot x) = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

Escreve-se a equação na forma:

$$\text{tg}(2 \cdot x) = \text{tg}\left(\frac{5 \cdot \pi}{6}\right) \Leftrightarrow 2 \cdot x = \frac{5 \cdot \pi}{6} + k \cdot \pi \Rightarrow x = \frac{5 \cdot \pi}{12} + \frac{k \cdot \pi}{2}$$

Logo, a solução da equação dada é:

$$S = \left\{x \in R \,/\, x = \frac{5 \cdot \pi}{12} + \frac{k \cdot \pi}{2};\ \forall\ k \in Z\right\}.$$

Pode-se resolver essa equação de outra forma, escrevendo:

$$\text{tg}(2 \cdot x) = \text{tg}\left(-\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow 2 \cdot x = -\frac{\pi}{6} + k \cdot \pi \Rightarrow x = -\frac{\pi}{12} + \frac{k \cdot \pi}{2}.$$

As duas soluções, embora escritas de forma diferente, são equivalentes, isto é, geram os mesmo arcos, dependendo do número inteiro **k** que se utilize. Usando a primeira solução obtida, têm-se, por exemplo, os arcos:

$$k = 0 \Rightarrow x = \frac{5 \cdot \pi}{12}$$

$$k = 1 \Rightarrow x = \frac{5 \cdot \pi}{12} + \frac{\pi}{2} = \frac{11 \cdot \pi}{12}$$

$$k = 2 \Rightarrow x = \frac{5 \cdot \pi}{12} + \pi = \frac{17 \cdot \pi}{12}$$

$$k = -1 \Rightarrow x = \frac{5 \cdot \pi}{12} - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{12}$$

$$k = -2 \Rightarrow x = \frac{5 \cdot \pi}{12} - \pi = -\frac{7 \cdot \pi}{12}$$

$\vdots$

Já da segunda solução, têm-se:

$$k = 0 \Rightarrow x = -\frac{\pi}{12}$$

$$k = 1 \Rightarrow x = -\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2} = \frac{5 \cdot \pi}{12}$$

$$k = 2 \Rightarrow x = -\frac{\pi}{12} + \pi = \frac{11 \cdot \pi}{12}$$

$$k = -1 \Rightarrow x = -\frac{\pi}{12} - \frac{\pi}{2} = -\frac{7 \cdot \pi}{12}$$

$$k = -2 \Rightarrow x = -\frac{\pi}{12} - \pi = -\frac{13 \cdot \pi}{12}$$

$\vdots$

É fácil ver que se obterão os mesmos valores para o arco **x**, conforme se variam os valores de **k**.

2) $\operatorname{tgx} + \cot \operatorname{gx} = 2$

Faz-se:

$$\operatorname{tgx} + \frac{1}{\operatorname{tgx}} = 2 \Rightarrow \frac{\operatorname{tg}^2 x + 1}{\operatorname{tgx}} = 2 \Rightarrow \operatorname{tg}^2 x - 2 \cdot \operatorname{tgx} + 1 = 0 \Rightarrow (\operatorname{tgx} - 1)^2 = 0$$

.

Assim, tgx = 1 é uma raiz dupla da equação do 2º grau na variável tgx. Portanto, vem:

$$\operatorname{tgx} = 1 \Rightarrow \operatorname{tgx} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k \cdot \pi$$

$$\therefore S = \left\{ x \in R / x = \frac{\pi}{4} + k \cdot \pi; \forall\ k \in Z \right\}.$$

3) $\sec^2 x = 1 - \operatorname{tgx}$

Tem-se:

$$1 + \operatorname{tg}^2 x = 1 - \operatorname{tgx} \Rightarrow \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tgx} = 0 \Rightarrow \operatorname{tgx} \cdot (\operatorname{tgx} + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \operatorname{tgx} = 0 \\ \text{ou} \\ \operatorname{tgx} = -1 \end{cases}.$$

Assim, vem:

$$\operatorname{tgx} = 0 \Rightarrow \operatorname{tgx} = \operatorname{tg}0 \Leftrightarrow x = k \cdot \pi$$

$$\operatorname{tgx} = -1 \Rightarrow \operatorname{tgx} = \operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k \cdot \pi$$

$$\therefore S = \left\{ x \in R / x = k \cdot \pi \ \text{ ou } \ x = -\frac{\pi}{4} + k \cdot \pi; \forall\ k \in Z \right\}.$$

4) $\text{tg}\left(x-\dfrac{\pi}{8}\right)=\text{tg}(2\cdot x)$

Tem-se:

$$x-\frac{\pi}{8}=2\cdot x+k\cdot\pi \Rightarrow -x=\frac{\pi}{8}+k\cdot\pi \Rightarrow x=-\frac{\pi}{8}-k\cdot\pi$$

Como **k** é um número inteiro, que ora é positivo, ora é negativo, pode-se escrever: $x=-\dfrac{\pi}{8}+k\cdot\pi$. Assim:

$$S=\left\{x\in R\,/\,x=-\frac{\pi}{8}+k\cdot\pi;\ \forall\ k\in Z\right\}.$$

8 FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

8.1 Introdução. Conceitos importantes no estudo de funções são os de função <u>*injetora*</u> e função <u>*sobrejetora*</u>. Dados dois conjuntos não vazios A e B e uma função f de A em B, define-se:

- y = f(x) é *injetora* se:

$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$, ou seja, $y_1 = y_2 \Rightarrow x_1 = x_2$.

Isto significa que *cada y pertencente ao conjunto Im(f) é imagem de um único x do domínio de* f.

Equivalentemente, tem-se: $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$. Assim, elementos distintos do domínio de f têm imagens diferentes.

Por outro lado, tem-se:

- y = f(x) é *sobrejetora* se ∀ y ∈ CD(f), ∃ x ∈ D(f) / y = f(x), isto é: Im(f) = CD(f).

Isto significa que *todo elemento de B é imagem de pelo menos um x do domínio de* f.

Se f é uma função de R em R, tem-se, graficamente, que:

- se f é injetora, <u>toda</u> reta horizontal que intercepta o gráfico de f o faz em um <u>único</u> ponto;
- se f é sobrejetora, toda reta horizontal intercepta o gráfico de f em <u>pelo menos um</u> ponto.

Assim, para que f seja ao mesmo tempo injetora em sobrejetora, <u>toda</u> reta horizontal deve interceptar seu gráfico em um <u>único ponto</u> (Figura 1).

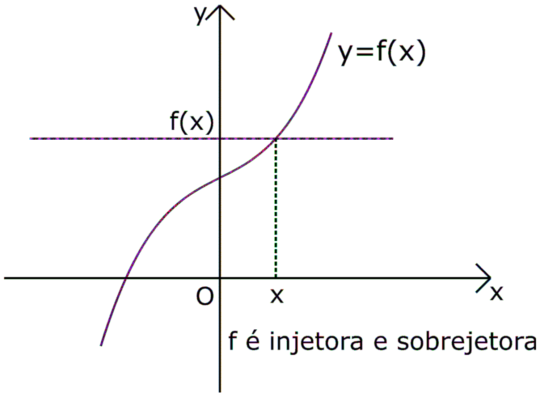

FIGURA 1

É fácil ver que uma função que é sempre crescente ou sempre decrescente em seu domínio é injetora. A Figura 2 mostra uma função que não é sobrejetora, nem injetora.

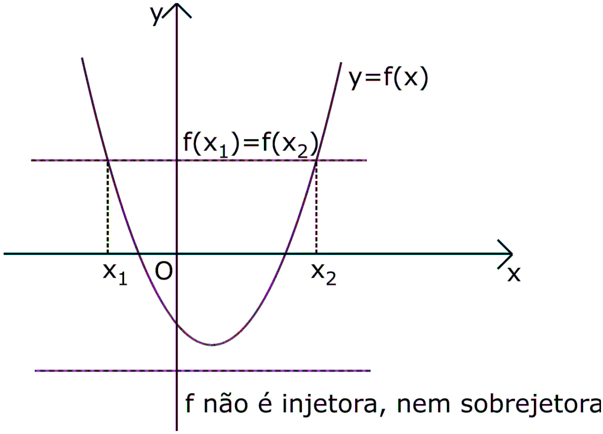

FIGURA 2

Quando a função é, ao mesmo tempo, injetora e sobrejetora, diz-se que ela é *bijetora*. Assim, uma função é bijetora quando cada elemento do contra-domínio é imagem de um único elemento de seu domínio.

8.2 Função inversa. Se uma função f é bijetora, ela admite *inversa*, ou seja, é *inversível*. Isto acontece porque se cada $y \in CD(f)$ é imagem de um único $x \in D(f)$, então entre os valores de **x** e de **y** se estabelece uma relação biunívoca. Assim, interpretando os valores de **y** como valores da variável independente e os valores de **x** como valores da função, obtém-se **x** como função de **y**: $x = g(y)$. Esta função chama-se *inversa* da função $y = f(x)$.

Notação: $f^{-1} \therefore x = f^{-1}(y)$.

Formalmente, tem-se:

Dada a função bijetora $f : A \to B$, chama-se função inversa de f, indicada por f^{-1}, a função $f^{-1} : B \to A$ que associa cada $y \in B$ ao elemento $x \in A$, tal que $y = f(x)$.

Logo, como conseqüência imediata, tem-se que o domínio de f passa a ser a imagem de f^{-1} e a imagem de f torna-se o domínio de f^{-1}: $D(f^{-1}) = Im(f)$ e $Im(f^{-1}) = D(f)$ (Figura 3).

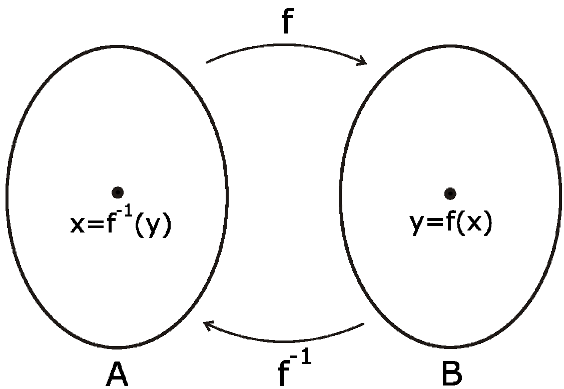

FIGURA 3

Para se determinar analiticamente a inversa de uma função bijetora f, utiliza-se o seguinte procedimento:

- isola-se a variável **x** na expressão dada de f;
- troca-se **y** por **x** e **x** por **y**.

Os gráficos de f e de f^{-1} são simétricos em relação à reta y = x.

8.3 Funções trigonométricas inversas

8.3.1 Função arco-seno

Da forma como foi definida anteriormente, a função seno não é sobrejetora, já que seu contra-domínio não é igual à sua imagem. Para torná-la sobrejetora, basta que se tome seu contra-domínio como sendo o intervalo $[-1,1]$, ou seja, a função passa a ser definida da seguinte forma:

$$\begin{aligned} f : R &\to [-1,1] \\ x &\mapsto y = \operatorname{sen}(x) \end{aligned}.$$

Seu gráfico é apresentado na Figura 4.

Entretanto, o gráfico mostra que f não é injetora em seu domínio, já que um **y** da imagem de f é imagem de pelo menos dois valores distintos de **x**. Na verdade, considerando-se o domínio de f, cada **y** do intervalo $[-1,1]$ é imagem de infinitos valores de **x**. Logo, f não é bijetora em seu domínio e, portanto, não admite inversa. Para que seja possível inverter a função, é preciso fazer restrições em seu domínio. Uma vez que funções que são sempre crescentes ou sempre decrescentes são injetoras, deve-se restringir o domínio a um intervalo onde isso ocorra.

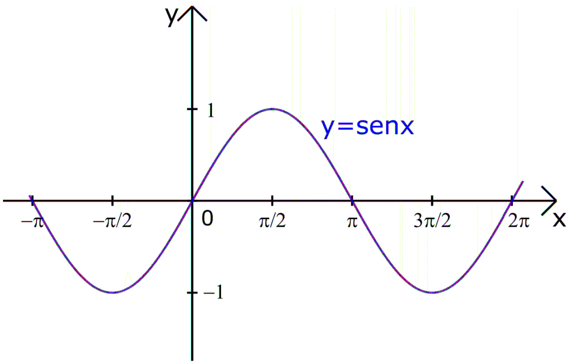

FIGURA 4

Por definição, adota-se o intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, no qual a função é crescente e, portanto, injetora. Logo, a função passa a ser definida da seguinte forma:

$$f : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1,1]$$
$$x \quad \mapsto \quad y = \mathrm{sen}(x)$$,

sendo bijetora e, portanto, admitindo inversa.

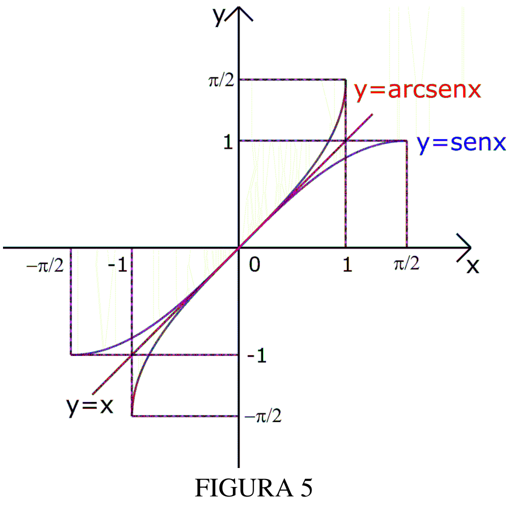

FIGURA 5

Se $y = \text{sen}x$, então ***x é o arco cujo seno vale y***; escrevemos: $x = \text{arcsen}y$. Trocando **x** por **y**, obtém-se $y = \text{arcsen}x$, isto é, a função inversa de f é: $f^{-1}(x) = \text{arcsen}x$.

Tem-se: $D(f^{-1}) = \text{Im}(f) = [-1,1]$ e $\text{Im}(f^{-1}) = D(f) = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Assim, tem-se:

$$y = \text{arcsen}x \Leftrightarrow \left\{ \text{sen}y = x \ \text{ e } \ y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \right\}.$$

Os gráficos de f e de sua inversa f^{-1} são apresentados na Figura 5.

Observe que o gráfico de $f(x) = \text{sen}x$ contém os pontos $\left(-\frac{\pi}{2}, -1\right)$ e $\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$, enquanto que o gráfico de $f^{-1}(x) = \text{arcsen}x$ contém os pontos $\left(-1, -\frac{\pi}{2}\right)$ e $\left(1, \frac{\pi}{2}\right)$.

Exemplos:

1) Se $y = \text{arcsen}\left(\frac{1}{2}\right)$, então:

$$y = \text{arcsen}\left(\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow \left\{ \text{sen}y = \frac{1}{2} \ \text{ e } \ y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \right\}.$$

O <u>único</u> arco que pertence ao intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ cujo seno é igual a $\frac{1}{2}$ é o arco $\frac{\pi}{6}$. Logo, $y = \frac{\pi}{6}$.

2) Se $\alpha = \text{arcsen}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, então:

$$\alpha = \text{arcsen}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \Leftrightarrow \left\{ \text{sen}\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2} \ \text{ e } \ \alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \right\}.$$

O <u>único</u> arco que pertence ao intervalo $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ cujo seno é igual a $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ é o arco $-\frac{\pi}{4}$. Portanto, $\alpha=-\frac{\pi}{4}$.

3) Calcular $\alpha=2\cdot\text{arcsen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Tem-se:

$$\frac{\alpha}{2}=\text{arcsen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\Leftrightarrow\left\{\text{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\ \text{ e }\ \frac{\alpha}{2}\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\right\}.$$

Conclui-se, assim, que:

$$\frac{\alpha}{2}=\frac{\pi}{3}\ \therefore\ \alpha=\frac{2\cdot\pi}{3}.$$

4) Calcular $y=\text{arcsen}(-1)$.

Tem-se:

$$y=\text{arcsen}(-1)\Leftrightarrow\left\{\text{sen}y=-1\ \text{ e }\ y\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\right\}.$$

O <u>único</u> arco que pertence ao intervalo $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ cujo seno é igual a -1 é o arco $-\frac{\pi}{2}$. Logo, $y=-\frac{\pi}{2}$.

8.3.2 Função arco-cosseno

A exemplo do que ocorre com a função seno, a função cosseno não é sobrejetora, nem injetora, como é fácil ver pelo seu gráfico (Figura 6).

Para torná-la sobrejetora, basta que se tome seu contra-domínio como sendo o intervalo $[-1,1]$; para torná-la injetora, adota-se, por definição, o intervalo $[0,\pi]$, no qual a função é decrescente. Logo, a função passa a ser definida da seguinte forma:

$$\begin{aligned} f:[0,\pi]&\to[-1,1]\\ x\ &\mapsto\ y=\cos(x) \end{aligned},$$

sendo bijetora e, portanto, admitindo inversa.

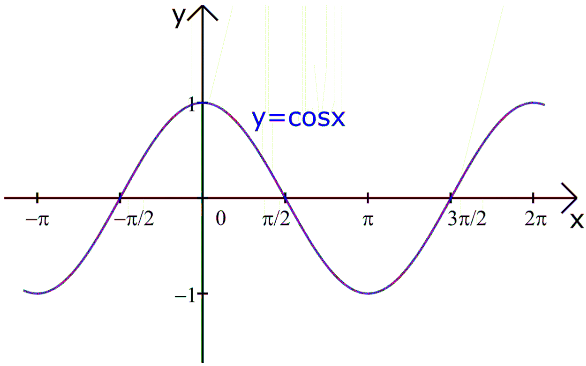

FIGURA 6

Se $y = \cos x$, então ***x é o arco cujo cosseno vale y***; escrevemos: $x = \arccos y$. Trocando **x** por **y**, obtém-se $y = \arccos x$, isto é, a função inversa de f é: $f^{-1}(x) = \arccos x$.

Tem-se: $D(f^{-1}) = Im(f) = [-1,1]$ e $Im(f^{-1}) = D(f) = [0\,,\,\pi]$.

Assim, tem-se:

$y = \arccos x \Leftrightarrow \{\cos y = x \;\text{ e }\; y \in [0,\pi]\}$.

A Figura 7 mostra os gráficos de f e de sua inversa f^{-1}.

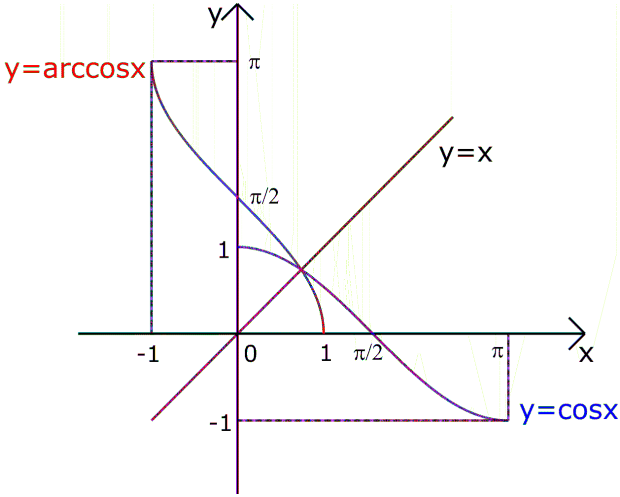

FIGURA 7

Exemplos:

1) Determinar **a** tal que $a = \arccos\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Tem-se:

$$a = \arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \Leftrightarrow \left\{\cos a = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ e } a \in [0, \pi]\right\}.$$

O <u>único</u> arco que pertence ao intervalo $[0, \pi]$ cujo cosseno é igual a $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ é o arco $\dfrac{\pi}{6}$. Logo, $a = \dfrac{\pi}{6}$.

2) Se $\alpha = \arccos(-1)$, então:

$$\alpha = \arccos(-1) \Leftrightarrow \{\cos\alpha = -1 \text{ e } \alpha \in [0, \pi]\}.$$

Portanto, $\alpha = \pi$.

3) Calcular $y = \operatorname{sen}\left[\arccos\left(\dfrac{1}{3}\right)\right]$.

Chamando: $\alpha = \arccos\left(\dfrac{1}{3}\right)$, quer-se calcular $y = \operatorname{sen}\alpha$. Tem-se:

$$\alpha = \arccos\left(\frac{1}{3}\right) \Leftrightarrow \left\{\cos\alpha = \frac{1}{3} \text{ e } \alpha \in [0, \pi]\right\}.$$

Uma vez que $\cos\alpha > 0$, conclui-se que $\alpha \in 1^{o}Q$ e vem:

$$\operatorname{sen}^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9} \;\therefore\; \operatorname{sen}\alpha = \frac{2\cdot\sqrt{2}}{3},$$

ou seja,

$$y = \frac{2\cdot\sqrt{2}}{3}.$$

4) Calcular $y = \arccos\left(-\dfrac{1}{2}\right)$.

Tem-se:

$$y = \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow \left\{\cos y = -\frac{1}{2} \text{ e } y \in [0, \pi]\right\}.$$

Portanto, $y = \dfrac{2\cdot\pi}{3}$.

8.3.3 Função arco-tangente

A função tangente tem domínio $D = \left\{ x \in R \;/\; x \neq \dfrac{\pi}{2} + k \cdot \pi \; (k \in Z) \right\}$.

Em seu domínio, a função é sobrejetora, mas não é injetora, como se pode ver facilmente pelo seu gráfico (Figura 8). Para torná-la injetora, considera-se, por definição, o intervalo $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2} \right)$ como sendo seu domínio, pois nele a função não tem pontos de descontinuidade e é crescente.

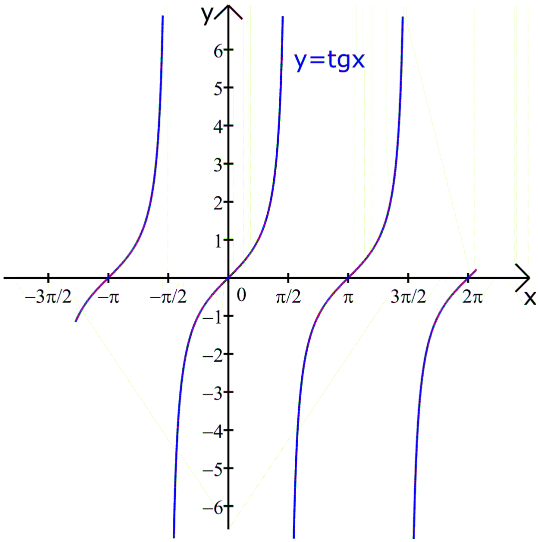

FIGURA 8

Ou seja, a função passa a ser definida da seguinte forma:

$$f : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right) \to R \quad , \qquad x \mapsto y = tg(x)$$

sendo bijetora e, portanto, admitindo inversa.

Se $y = tgx$, então ***x é o arco cuja tangente vale y***; escrevemos: $x = arctgy$. Trocando **x** por **y**, obtém-se $y = arctgx$, isto é, a função inversa de f é: $f^{-1}(x) = arctgx$.

Tem-se: $D\left(f^{-1}\right)=\operatorname{Im}(f)=R$ e $\operatorname{Im}\left(f^{-1}\right)=D(f)=\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$.

Assim, tem-se:

$$y=\operatorname{arctg}x \Leftrightarrow \left\{\operatorname{tg}y=x \ \text{ e } \ y\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\right\}.$$

Os gráficos de f e de sua inversa f^{-1} são mostrados na Figura 9.

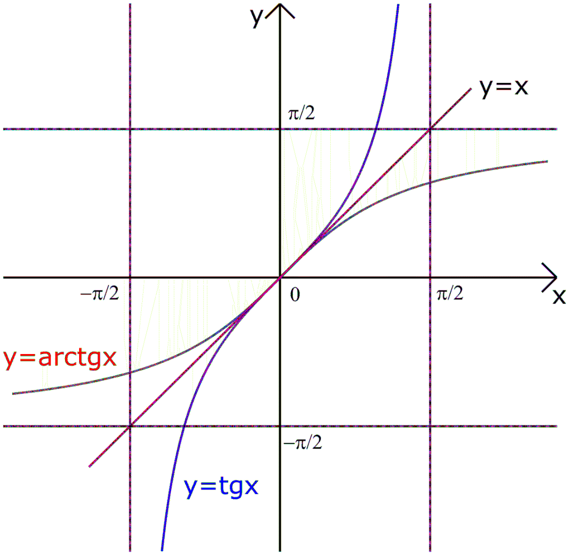

FIGURA 9

Exemplos:

1) Se $\alpha=\operatorname{arctg}0$, então:

$$\alpha=\operatorname{arctg}0 \Leftrightarrow \left\{\operatorname{tg}\alpha=0 \ \text{ e } \ \alpha\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\right\}.$$

O <u>único</u> arco que pertence ao intervalo $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ cuja tangente é i-gual a zero é $\alpha=0$.

2) Calcular $y=\operatorname{sen}\left[\operatorname{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right]$.

Chamando: $\alpha = \operatorname{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$, quer-se calcular $y = \operatorname{sen}\alpha$. Tem-se:

$$\alpha = \operatorname{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \Leftrightarrow \left\{ \operatorname{tg}\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{3} \text{ e } \alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)\right\}.$$

Segue-se que $\alpha = -\frac{\pi}{6}$ e vem:

$$y = \operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}.$$

3) Se $\alpha = \operatorname{arctg} 1$, então:

$$\alpha = \operatorname{arctg} 1 \Leftrightarrow \left\{ \operatorname{tg}\alpha = 1 \text{ e } \alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)\right\}.$$

Portanto, $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

8.3.4 Função arco-cotangente

A função cotangente tem domínio $D = \{x \in R \; / \; x \neq k \cdot \pi \; (k \in Z)\}$. Em seu domínio, a função é sobrejetora, mas não é injetora, como se pode ver facilmente pelo seu gráfico (Figura 10). Para torná-la injetora, considera-se, por definição, o intervalo $(0, \pi)$ como sendo seu domínio, pois nele a função não tem pontos de descontinuidade e é decrescente. Ou seja, a função passa a ser definida da seguinte forma:

$$\begin{aligned} f : (0, \pi) &\to R \\ x &\mapsto y = \cot g(x) \end{aligned},$$

sendo bijetora e, portanto, admitindo inversa.

Se $y = \cot gx$, então ***x é o arco cuja cotangente vale y***; escrevemos: $x = \operatorname{arc}\cot gy$. Trocando **x** por **y**, obtém-se $y = \operatorname{arc}\cot gx$, isto é, a função inversa de f é: $f^{-1}(x) = \operatorname{arc}\cot gx$.

Tem-se: $D(f^{-1}) = \operatorname{Im}(f) = R$ e $\operatorname{Im}(f^{-1}) = D(f) = (0, \pi)$.

Assim, tem-se:

$$y = \operatorname{arc}\cot gx \Leftrightarrow \{\cot gy = x \text{ e } y \in (0, \pi)\}.$$

Os gráficos de f e de sua inversa f^{-1} são mostrados na Figura 11.

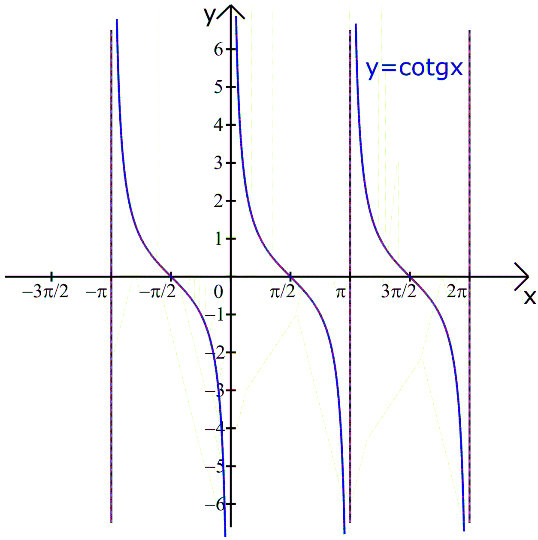

FIGURA 10

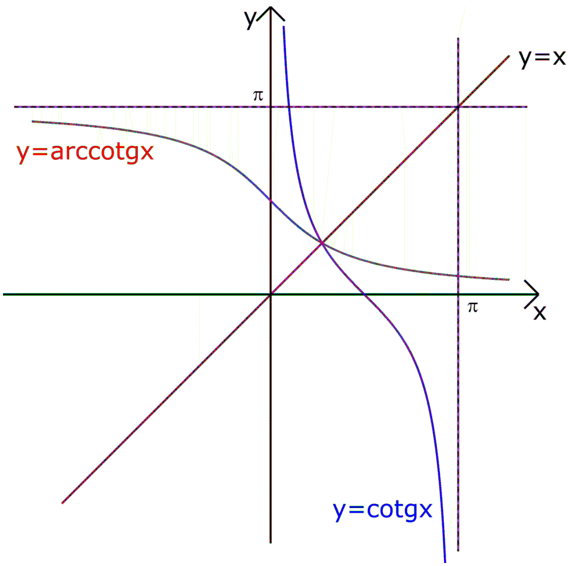

FIGURA 11

Exemplos:

1) Se $\alpha = \text{arc}\cot g 0$, então:
$\alpha = \text{arc}\cot g 0 \Leftrightarrow \{\cot g\alpha = 0 \text{ e } \alpha \in (0,\pi)\}$.
O <u>único</u> arco que pertence ao intervalo $(0,\pi)$ cuja cotangente é igual a zero é $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

2) Calcular $y = \cos\left[\text{arc}\cot g\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right]$.

Chamando: $\alpha = \text{arc}\cot g\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$, quer-se calcular $y = \cos\alpha$. Tem-se:
$\alpha = \text{arc}\cot g\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \Leftrightarrow \left\{\cot g\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{3} \text{ e } \alpha \in (0,\pi)\right\}$.
Segue-se que $\alpha = \frac{2\cdot\pi}{3}$ e vem:
$y = \cos\left(\frac{2\cdot\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$.

3) Se $\alpha = \text{arc}\cot g(-1)$, então:
$\alpha = \text{arc}\cot g 1 \Leftrightarrow \{\cot g\alpha = -1 \text{ e } \alpha \in (0,\pi)\}$.
Portanto, $\alpha = \frac{3\cdot\pi}{4}$.

8.3.5 Função arco-secante

A função secante foi definida da seguinte forma:

$$\begin{aligned} f: D &\to R \\ x &\mapsto y = \sec(x) \end{aligned},$$

onde $D = \left\{x \in R \,/\, x \neq \frac{\pi}{2} + k\cdot\pi \;(k \in Z)\right\}$. Seu gráfico é mostrado na Figura 12.
Desta forma, a função secante não é injetora em seu domínio, já que um **y** da imagem de f é imagem de pelo menos dois valores distin-

tos de **x**. É preciso, então, fazer restrições em seu domínio, para que se torne injetora. Uma vez que funções que são sempre crescentes ou sempre decrescentes são injetoras, deve-se restringir o domínio a um intervalo onde isso ocorra. Por definição, adota-se o conjunto $\left[0,\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2},\pi\right]$, no qual a função é crescente ou decrescente e, portanto, injetora.

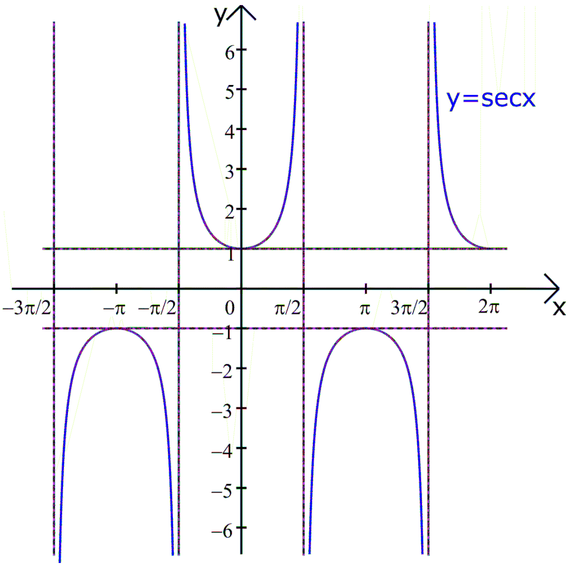

FIGURA 12

Logo, a função passa a ser definida da seguinte forma:

$$\begin{aligned} f : \left[0,\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2},\pi\right] &\to R \\ x &\mapsto y=\sec(x) \end{aligned}.$$

Entretanto, a função assim definida não é sobrejetora, já que seu contra-domínio não é igual à sua imagem. Para torná-la sobrejetora, toma-se seu contra-domínio como sendo o conjunto $(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$, ou seja, a função passa a ser definida da seguinte forma:

$$\begin{aligned} f : \left[0,\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2},\pi\right] &\to (-\infty,-1]\cup[1,+\infty) \\ x &\mapsto y=\sec(x) \end{aligned},$$

sendo bijetora e, portanto, admitindo inversa.

Se $y = \sec x$, então ***x é o arco cuja secante vale y***; escrevemos: $x = \operatorname{arc}\sec y$. Trocando **x** por **y**, obtém-se $y = \operatorname{arc}\sec x$, isto é, a função inversa de f é: $f^{-1}(x) = \operatorname{arc}\sec x$.

Tem-se:

$D(f^{-1}) = \operatorname{Im}(f) = (-\infty,-1] \cup [1,+\infty)$ e

$\operatorname{Im}(f^{-1}) = D(f) = \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$.

Assim, tem-se:

$$y = \operatorname{arc}\sec x \Leftrightarrow \left\{\sec y = x \ \text{ e } \ y \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]\right\}.$$

A Figura 13 apresenta os gráficos de f e de sua inversa f^{-1}.

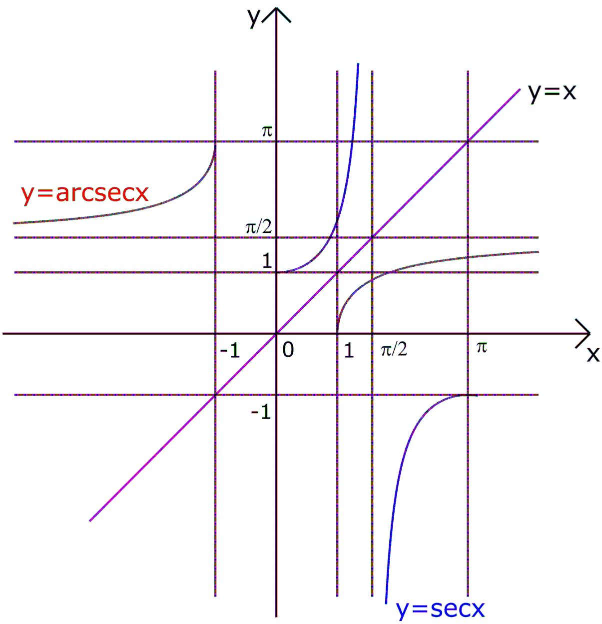

FIGURA 13

Exemplos:

1) Se $\alpha = \operatorname{arc}\sec 1$, então:

$$\alpha = \text{arc}\sec 1 \Leftrightarrow \left\{ \sec\alpha = 1 \ \text{ e } \ \alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right] \right\}.$$

O <u>único</u> arco que pertence ao intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ cuja secante é igual a 1 é $\alpha = 0$.

2) Calcular $y = \text{sen}\left(\text{arc}\sec\left(-\frac{2\cdot\sqrt{3}}{3}\right)\right)$.

Chamando: $\alpha = \text{arc}\sec\left(-\frac{2\cdot\sqrt{3}}{3}\right)$, quer-se calcular $y = \text{sen}\alpha$. Tem-se:

$$\alpha = \text{arc}\sec\left(-\frac{2\cdot\sqrt{3}}{3}\right) \Leftrightarrow \left\{ \sec\alpha = -\frac{2\cdot\sqrt{3}}{3} \ \text{ e } \ \alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right] \right\}.$$

Tem-se, então:

$$\cos\alpha = -\frac{3}{2\cdot\sqrt{3}} = -\frac{3}{2\cdot\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \ \text{ e } \ \alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right];$$

segue-se que $\alpha = \frac{5\cdot\pi}{6}$ e vem:

$$y = \text{sen}\left(\frac{5\cdot\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}.$$

8.3.6 Função arco-cossecante

A função cossecante foi definida da seguinte forma:

$$\begin{aligned} f: D &\to R \\ x &\mapsto y = \text{cos}\sec(x) \end{aligned},$$

onde $D = \{x \in R \,/\, x \neq k\cdot\pi \ (k \in Z)\}$. Seu gráfico é mostrado na Figura 14.

Vê-se que a função cossecante não é injetora em seu domínio, já que um **y** da imagem de f é imagem de pelo menos dois valores distintos de **x**. É preciso, então, fazer restrições em seu domínio, para que se torne injetora. Uma vez que funções que são sempre crescentes ou sempre decrescentes são injetoras, deve-se restringir o domínio a um intervalo onde isso ocorra. Por definição, adota-se o conjunto

$\left[-\frac{\pi}{2},0\right)\cup\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$, no qual a função é crescente ou decrescente e, portanto, injetora.

Logo, a função passa a ser definida da seguinte forma:

$$\begin{aligned} f:\left[-\frac{\pi}{2},0\right)\cup\left(0,\frac{\pi}{2}\right] &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto y=\text{cossec}(x) \end{aligned}.$$

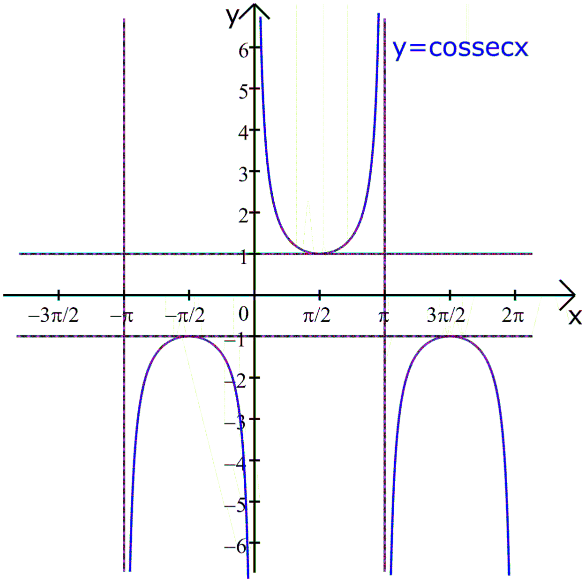

FIGURA 14

Entretanto, a função assim definida não é sobrejetora, já que seu contra-domínio não é igual à sua imagem. Para torná-la sobrejetora, toma-se seu contra-domínio como sendo o conjunto $(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$, ou seja, a função passa a ser definida da seguinte forma:

$$\begin{aligned} f:\left[-\frac{\pi}{2},0\right)\cup\left(0,\frac{\pi}{2}\right] &\to (-\infty,-1]\cup[1,+\infty) \\ x &\mapsto y=\text{cossec}(x) \end{aligned},$$

sendo bijetora e, portanto, admitindo inversa.

Se $y=\text{cossec}\,x$, então ***x é o arco cuja cossecante vale y***; escrevemos: $x=\text{arccossec}\,y$. Trocando **x** por **y**, obtém-se $y=\text{arccossec}\,x$, isto é, a função inversa de f é: $f^{-1}(x) = \operatorname{arccossec} x$.

Tem-se:

$$D(f^{-1}) = \operatorname{Im}(f) = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$$

$$\operatorname{Im}(f^{-1}) = D(f) = \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right].$$

Assim, tem-se:

$$y = \operatorname{arccossec} x \Leftrightarrow \left\{\operatorname{cossec} y = x \;\text{ e }\; y \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right]\right\}.$$

Os gráficos de f e de sua inversa f^{-1} são mostrados na Figura 15.

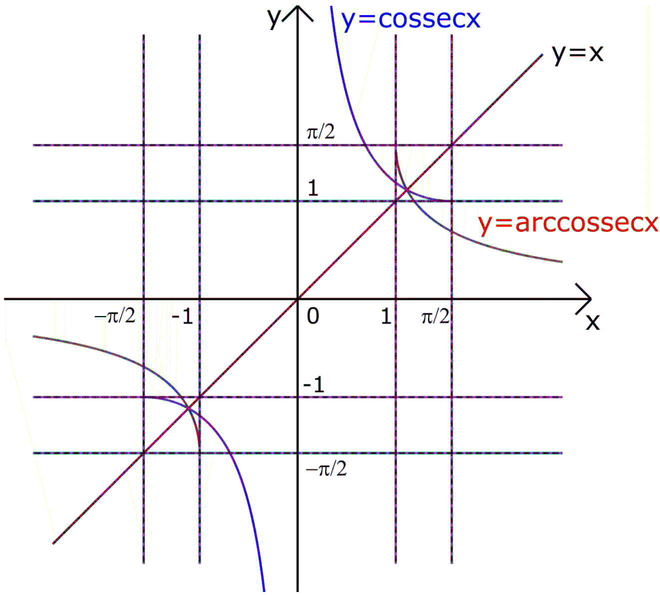

FIGURA 15

Exemplos:

1) Se $\alpha = \operatorname{arccossec} 1$, então:

$$\alpha = \operatorname{arccossec} 1 \Leftrightarrow \left\{\operatorname{cossec} \alpha = 1 \;\text{ e }\; \alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right]\right\}.$$

O <u>único</u> arco que pertence ao intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ cuja cossecante é igual a 1 é $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

2) Calcular $y = \mathrm{tg}\left[\mathrm{arccossec}(-2)\right]$.

Chamando: $\alpha = \mathrm{arccossec}(-2)$, quer-se calcular $y = \mathrm{tg}\alpha$. Tem-se:

$$\alpha = \mathrm{arccossec}(-2) \Leftrightarrow \left\{ \mathrm{cossec}\,\alpha = -2 \ \text{ e } \ \alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right] \right\}.$$

Tem-se, então, que $\mathrm{sen}\alpha = -\frac{1}{2}$ e $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$. segue-se que $\alpha = -\frac{\pi}{6}$ e vem:

$$y = \mathrm{tg}\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

8.3.7 Exercícios

1) Calcular $y = \mathrm{sen}\left[\arccos\left(\frac{4}{5}\right) + \mathrm{arctg}\left(\frac{5}{12}\right)\right]$.

Faz-se:

$$\alpha = \arccos\left(\frac{4}{5}\right) \ \text{ e } \ \beta = \mathrm{arctg}\left(\frac{5}{12}\right);$$

assim, quer-se determinar o valor de $y = \mathrm{sen}(\alpha + \beta)$, ou seja, o valor de

$$y = \mathrm{sen}(\alpha + \beta) = \mathrm{sen}\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \mathrm{sen}\beta.$$

De $\alpha = \arccos\left(\frac{4}{5}\right)$, vem:

$$\alpha = \arccos\left(\frac{4}{5}\right) \Leftrightarrow \left\{ \cos\alpha = \frac{4}{5} \ \text{ e } \ \alpha \in [0, \pi] \right\} \ \therefore \ \alpha \in 1^{\mathrm{o}}\mathrm{Q};$$

então:

$$\mathrm{sen}^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha = 1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25} \ \therefore \ \mathrm{sen}\alpha = \frac{3}{5}.$$

De $\beta = \mathrm{arctg}\left(\frac{5}{12}\right)$, vem:

$$\beta = \operatorname{arctg}\left(\frac{5}{12}\right) \Leftrightarrow \left\{ \operatorname{tg}\beta = \frac{5}{12} \ \text{ e } \ \beta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \right\} \therefore \beta \in 1^{o}\,Q\,.$$

Logo,

$$\sec^2\beta = 1 + \operatorname{tg}^2\beta = 1 + \frac{25}{144} = \frac{169}{144} \ \therefore \ \sec\beta = \frac{13}{12} \Rightarrow \cos\beta = \frac{12}{13}\,.$$

Assim, tem-se:

$$\operatorname{sen}\beta = \operatorname{tg}\beta \cdot \cos\beta = \frac{5}{12} \cdot \frac{12}{13} = \frac{5}{13}\,.$$

Obtém-se, finalmente, o valor procurado de **y**:

$$y = \frac{3}{5} \cdot \frac{12}{13} + \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{13} = \frac{56}{65}\,.$$

2) Calcular $y = \operatorname{tg}\left[\operatorname{arcsen}\left(-\frac{24}{25}\right) - \arccos\left(\frac{1}{5}\right)\right]$.

De modo análogo ao exercício anterior, faz-se:

$$\alpha = \operatorname{arcsen}\left(-\frac{24}{25}\right) \ \text{ e } \ \beta = \arccos\left(\frac{1}{5}\right);$$

isto é, quer-se determinar o valor de $y = \operatorname{tg}(\alpha - \beta)$:

$$y = \operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta}\,.$$

De $\alpha = \operatorname{arcsen}\left(-\frac{24}{25}\right)$, vem:

$$\alpha = \operatorname{arcsen}\left(-\frac{24}{25}\right) \Leftrightarrow \left\{ \operatorname{sen}\alpha = -\frac{24}{25} \ \text{ e } \ \alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \right\} \ \therefore \ \alpha \in 4^{o}\,Q\,;$$

então:

$$\cos^2\alpha = 1 - \operatorname{sen}^2\alpha = 1 - \frac{576}{625} = \frac{49}{425} \ \therefore \ \cos\alpha = \frac{7}{25}\,,$$

e, portanto,

$$\operatorname{tg}\alpha = -\frac{24}{7}\,.$$

De $\beta = \arccos\left(\frac{1}{5}\right)$, vem:

$$\beta = \arccos\left(\frac{1}{5}\right) \Leftrightarrow \left\{ \cos\beta = \frac{1}{5} \ \text{ e } \ \beta \in [0, \pi] \right\} \ \therefore \ \beta \in 1^{o}\,Q\,;$$

logo,

$$\text{sen}^2\beta = 1 - \cos^2\beta = 1 - \frac{1}{25} = \frac{24}{25} \;\therefore\; \text{sen}\beta = \frac{2\cdot\sqrt{6}}{5}.$$

Assim, tem-se:

$$\text{tg}\beta = \frac{2\cdot\sqrt{6}}{1} = 2\cdot\sqrt{6}.$$

Assim, o valor procurado de **y** é:

$$y = \frac{-\frac{24}{7} - 2\cdot\sqrt{6}}{1 + \left(-\frac{24}{7}\right)\cdot 2\cdot\sqrt{6}} = \frac{-\frac{24+14\cdot\sqrt{6}}{7}}{\frac{7-48\cdot\sqrt{6}}{7}} = -\frac{24+14\cdot\sqrt{6}}{7-48\cdot\sqrt{6}} =$$

$$= -\frac{24+14\cdot\sqrt{6}}{7-48\cdot\sqrt{6}}\cdot\frac{7+48\cdot\sqrt{6}}{7+48\cdot\sqrt{6}} = -\frac{168+1152\cdot\sqrt{6}+98\cdot\sqrt{6}+4032}{49-2304\cdot 6} =$$

$$= \frac{4200+1250\cdot\sqrt{6}}{-13775} = \frac{168+50\cdot\sqrt{6}}{551}$$

3) Determinar o domínio da função:

$f(x) = \text{arcsen}(x-3) + \text{arccos}(x^2-10)$.

Lembrando que o domínio das funções $y = \text{arcsen}x$ e $y = \text{arccos}\,x$ é o intervalo $[-1,1]$, para que cada uma das parcelas da função dada esteja definida, deve-se ter:

$$\begin{cases} -1 \le x-3 \le 1 & \text{(I)} \\ -1 \le x^2-10 \le 1 & \text{(II)} \end{cases}.$$

Resolve-se, assim, cada uma dessas desigualdades.

(I) $-1 \le x-3 \le 1$

- $-1 \le x-3 \Rightarrow x-3 \ge -1 \Rightarrow x-3+3 \ge -1+3 \Rightarrow x \ge 2$
- $x-3 \le 1 \Rightarrow x-3+3 \le 1+3 \Rightarrow x \le 4$

Logo, a solução das desigualdades (I) é: $2 \le x \le 4$.

(II) $-1 \le x^2-10 \le 1$

- $-1 \le x^2-10 \Rightarrow x^2-10 \ge -1 \Rightarrow x^2-10+1 \ge -1+1 \Rightarrow x^2-9 \ge 0$.

Os zeros da função $y = x^2-9$ são x = -3 e x = 3 e o estudo de sinal dessa função é mostrado na Figura 16.

Portanto, os valores de **x** que tornam a função maior ou igual a zero são aqueles que são menores ou iguais a -3 ou maiores ou iguais a 3.

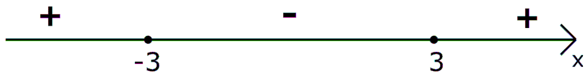

FIGURA 16

• $x^2 - 10 \leq 1 \Rightarrow x^2 - 10 - 1 \leq 1 - 1 \Rightarrow x^2 - 11 \leq 0$.

Os zeros da função $y = x^2 - 11$ são $x = -\sqrt{11} \cong -3{,}32$ e $x = \sqrt{11} \cong 3{,}32$; o estudo de sinal dessa função é apresentado na Figura 17.

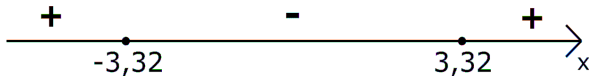

FIGURA 17

Os valores de **x** que tornam a função menor ou igual a zero estão no intervalo $\left[-\sqrt{11}, \sqrt{11}\right]$. Têm-se, então, os diagramas da Figura 18, que mostram os valores de **x** que satisfazem ambas as inequações simultaneamente.

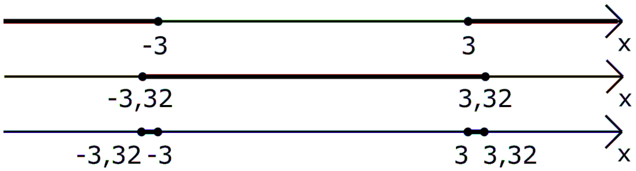

FIGURA 18

Assim, os valores de **x** que satisfazem as desigualdades (II) são os que estão nos intervalos $\left[-\sqrt{11}, -3\right]$ ou $\left[3, \sqrt{11}\right]$.

Faz-se, agora, a interseção das soluções das inequações de (I) e (II), conforme mostra a Figura 19.

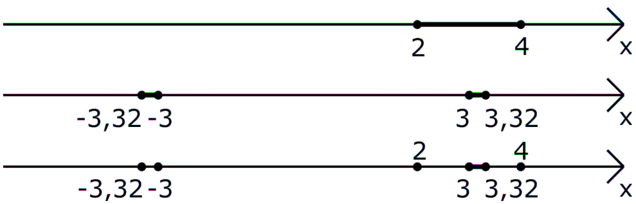

FIGURA 19

Logo, os valores de **x** que satisfazem (I) e (II) estão no intervalo $\left[3,\sqrt{11}\right]$, ou seja:

$D(f)=\left\{x\in R/3\leq x\leq\sqrt{11}\right\}$.

4) Sabe-se que se $y=\operatorname{tg}x$, então $y=\dfrac{\operatorname{sen}x}{\cos x}$. Dizer se é verdadeira ou falsa a afirmação: "se $y=\operatorname{arctg}x$, então $y=\dfrac{\operatorname{arcsen}x}{\arccos x}$". Dar os domínios das funções $y=\operatorname{arctg}x$ e $y=\dfrac{\operatorname{arcsen}x}{\arccos x}$.

A afirmação é falsa. A função $y=\operatorname{arctg}x$ é a função inversa da função $y=\operatorname{tg}x$.

A expressão $y=\dfrac{\operatorname{arcsen}x}{\arccos x}$ é um quociente das funções $\operatorname{arcsen}x$ e $\arccos x$, que são, respectivamente, as funções inversas das funções $\operatorname{sen}x$ e $\cos x$.

Considere-se, por exemplo, x = 1. Tem-se:

$y=\operatorname{arctg}1\Rightarrow \operatorname{tg}y=1\therefore y=\dfrac{\pi}{4}$;

por outro lado, vem:

$$y=\frac{\operatorname{arcsen}1}{\arccos 1}=\frac{\frac{\pi}{2}}{0},$$

que não está definido.

O exemplo deixa claro que $\operatorname{arctg}x\neq\dfrac{\operatorname{arcsen}x}{\arccos x}$. Observe-se, ainda, que os domínios das funções $y=\operatorname{arctg}x$ e $y=\dfrac{\operatorname{arcsen}x}{\arccos x}$ são diferentes. No caso da primeira função, seu domínio é R; já para a função $y=\dfrac{\operatorname{arcsen}x}{\arccos x}$, é preciso observar que, olhando separadamente as funções que estão no numerador e no denominador, o domínio de cada uma delas é o intervalo $[-1,1]$. Entretanto, é preciso excluir do domínio da função que está no denominador os valores de **x** que a anulam, ou seja, os valores de **x** tais que $\arccos x=0$. Ora, o único $x\in[-1,1]$ tal que $\arccos x=0$ é x = 1. Conclui-se, assim, que se deve excluir do domínio da função $\arccos x$ o valor $x = 1$. Assim, o domínio de $y = \dfrac{\text{arcsen}x}{\arccos x}$ é $[-1,1)$.

Exercícios propostos:

1) Calcular $y = \cos\left[\text{arcsen}\left(-\dfrac{8}{17}\right) - \arccos\left(-\dfrac{5}{13}\right)\right]$ $\left(\text{R.}: y = -\dfrac{171}{221}\right)$

2) Determinar o domínio das funções:

(a) $f(x) = \text{arctg}\left(\dfrac{x^2-5}{x+3}\right)$ $\left(\text{R.}: D(f) = \{x \in R \,/\, x \neq -3\}\right)$

(b) $f(x) = \arccos\left(x^2 - 1\right)$ $\left(\text{R.}: D(f) = \{x \in R \,/ -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}\}\right)$

3) Calcular $y = \cos\left[2 \cdot \arccos\left(\dfrac{3}{5}\right)\right]$ $\left(\text{R.}: y = -\dfrac{7}{25}\right)$

4) Calcular $y = \text{tg}\left[2 \cdot \text{arcsen}\left(\dfrac{3}{5}\right) + \arccos\left(\dfrac{5}{13}\right)\right]$ $\left(\text{R.}: y = -\dfrac{204}{253}\right)$

9 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ANTUNES, F. C. **Trigonometria**. São Paulo: Scipione, 1988 (Coleção Matemática por Assunto, 3).

AYRES JR, F. **Trigonometria**. São Paulo: McGraw-Hill, 1971 (Coleção Schaum).

BIANCHINI, E.; PACCOLA, H. **Matemática**. V. 2. São Paulo: Moderna, 1995.

CHUEIRI, V. M. M. **Notas de aula**. Faculdade de Ciências, Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Bauru.

FLEMMING, D. M.; GONÇALVES, M. B. **Cálculo A - funções, limite, derivação, integração**. 5. ed. São Paulo: Makron Books, 1992.

GARNICA, A. V. M. Argumentação: dialogando a partir de alguns problemas matemáticos e suas resoluções. In: SIMPÓSIO DE MATEMÁTICA, 2005, Faxinal do Céu.

IEZZI, G. et alli. **Trigonometria**. 8. ed. São Paulo: Atual, 1993 (Coleção Fundamentos de Matemática Elementar, 3).

LEANDRO, T. A. S. **Elementos de cálculo vetorial e trigonometria**. São Paulo: Íris Gráfica, 1982.

PIERRO NETO, S. DI. **Matemática**. V. 1. São Paulo: Ática, 1984.

ROCHA, L. M.; BARBOSA, R. M.; PIERRO NETO, S. DI. **Matemática**. V. 1. São Paulo: Instituto Brasileiro de Edições Pedagógicas, 1967.

As autoras

Eliete Maria Gonçalves é licenciada em Matemática pela Fundação Educacional de Bauru - FEB (1977), mestre em Matemática (Fundamentos da Matemática) pela Unesp (1994) e doutora em Agronomia (Energia na Agricultura) pela Unesp (2000). Em 1978, ingressou no Departamento de Matemática da FEB, posteriormente incorporada à Unesp, onde desenvolve seu trabalho docente e direciona suas pesquisas para o Ensino de Matemática.

Vanilda Miziara Mello Chueiri é licenciada e bacharel em Matemática pela Fundação Educacional de Bauru - FEB (1976), mestre em Ciências (Equações Diferenciais) pelo Instituto de Matemática da UFRJ (1981) e doutora em Agronomia (Energia na Agricultura) pela Unesp (1994). Em 1977, ingressou no Departamento de Matemática da FEB, posteriormente incorporada à Unesp, onde desenvolve seu trabalho docente e direciona suas pesquisas para o Ensino de Matemática.

ISBN 978-85-98605-63-0